

С. фонъ-Завацкій.

Инженеръ — капитанъ, репетиторъ
Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

РАСЧЕТЪ
КРУГЛЫХЪ ВОДОПРОВОДНЫХЪ ТРУБЪ
СЪ ТОНКИМИ СТѢНКАМИ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. И. Эрлиха (влад. А. Э. Коллпновъ), Мел. Дворянская, 19.
1914.

С. фонъ-Завацкій.

Инженеръ — капитанъ, репетиторъ
Николаевской Инженерной Академіи и Училища.

РАСЧЕТЪ
КРУГЛЫХЪ ВОДОПРОВОДНЫХЪ ТРУБЪ
СЪ ТОНКИМИ СТѢНКАМИ.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Типографія Ю. Н. Эрлихъ (влад. А. Э. Коллинсъ), Мал. Дворянскій, 19.

1914.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

	СТР.
Введеніе	—
I. Тонкостѣнные трубы	1
1. Трубы растягиваемыя равномѣрнымъ внутреннимъ давленіемъ	1
2. Примѣнимость линейнаго закона распредѣленія напряженій	8
3. Труба сжимаемая равномѣрнымъ наружнымъ давленіемъ	10
II. Труба, лежащая на землѣ	16
1. Вліяніе вѣса воды, заполняющей трубу	16
2. Вліяніе собственнаго вѣса трубы	26
3. Внутреннее равномѣрное давленіе	33
III. Труба, лежащая въ землѣ	43
1. Давленіе земли	43
2. Внутреннее равномѣрное давленіе	58
IV. Труба лежащая на фундаментѣ	63
1. Вліяніе вѣса воды, заполняющей трубу	63
2. Вліяніе собственнаго вѣса трубы	70
3. Внутреннее равномѣрное давленіе	78
V. Труба задѣланная въ кладку	90
1. Вліяніе вѣса воды, заполняющей трубу	90
2. Вліяніе собственнаго вѣса трубы	100
3. Давленіе земли	104
VI. Важнѣйшія формулы и общія замѣчанія по поводу расчета трубъ	114
Литература	125

Трубопроводы составляют важнейшую отрасль городского хозяйства. При устройстве водоснабжения, газоснабжения и канализации затрата на устройство сети труб является главным расходом в общем итоге стоимости подобного рода сооружений. Например в проектах дальнейшего развития водоснабжения и канализации г. Москвы на долю сети приходится около 60%, всех затрат достигающих 250 миллионов рублей, а за последние два десятилетия Москва уже затратила на трубопроводы около 70 миллионов; в проект снабжения Петербурга Ладужской водой стоимость водовода будет не меньше 20—25%, всех расходов и тоже составит крупную сумму—около 15 миллионов рублей. Эти колоссальные затраты должны были-бы заставить со вниманием отнестись к выработке профилей труб.

Характерной особенностью расчета труб является то, что рассчитав кусок трубы метровой или сантиметровой длины, применяют затѣм установленный профиль на протяжении тысяч и десятков тысяч метров, т. е. при излишней прочности трубы затрачивают сотни и даже тысячи пудов лишнего матерьяла, при недостаточной— в той-же пропорции увеличивают возможность разрыва трубы, ведущая иногда к миллионным убыткам.

Водопроводныя трубы примѣняются преимущественно чугуныя, круглаго сѣченія. Расчетъ этихъ трубъ ходовыхъ, малыхъ размѣровъ дѣлается разъ на всегда по самому невыгодному случаю нагрузки; результаты расчета, устанавливающіе нормальные размѣры трубъ, объединяются въ такъ называемомъ сортаментѣ и трубы этого сортамента обыкновенно примѣняются во всехъ случаяхъ водопроводной практики безъ дальнѣйшихъ разсужденій. Сортаменты для трубы каждаго діаметра даютъ лишь одну толщину стѣнки.

Трубы, указанныя въ сортаментѣ, рассчитаны по формулѣ вида $e = aD + b$, гдѣ e толщина стѣнки, D внутренній діаметръ. Первое слагаемое опредѣляетъ толщину стѣнки по внутреннему давленію, второе—эмпирическій добавокъ, учитывающій вліяніе всехъ остальныхъ силъ.

Водопроводные инженеры привыкнувъ примѣнять трубы сортамента безъ долгихъ размышленій и привыкнувъ къ расчету трубы по одному лишь внутреннему давленію, примѣняютъ обыкновенно этотъ расчетъ и къ трубамъ большихъ размѣровъ желѣзнымъ и стальнымъ. Попытки установленія иного, болѣе точнаго расчета весьма немногочисленны. Одну изъ нихъ представляетъ эта работа для такъ называемыхъ тонкостѣнныхъ трубъ.

I. Тонкостѣнные трубы.

Подъ тонкостѣнной трубой подразумѣвается труба съ такими тонкими стѣнками, что съ достаточной точностью можно, при расчетѣ ея, пользоваться простѣйшими гипотезами относительно распредѣленія напряженій въ стѣнкахъ.

Основныя упрощенія состоятъ въ томъ, что при расчетѣ кольца единичной длины вдоль оси трубы 1) при растяженіи или сжатіи трубы равномернымъ и нормальнымъ къ ея наружной или внутренней поверхности давленіемъ можно полагать, что напряженія распредѣлены по сѣченію стѣнки равномерно и величина ихъ можетъ быть опредѣлена простымъ дѣленіемъ нормальнаго усилія N на площадь сѣченія стѣнки ω и 2) что при сплющиваніи трубы напряженія, вызываемыя изгибающимъ моментомъ M , распредѣлены по сѣченію стѣнки по линейному закону (гипотеза Навье).

Эти упрощенія объединяются въ формулѣ, которую, въ самомъ общемъ случаѣ, можно примѣнять для опредѣленія напряженій въ стѣнкахъ тонкостѣнной трубы:

$$\sigma = \frac{N}{\omega} + \frac{Mv}{J},$$

гдѣ J моментъ инерціи площади сѣченія стѣнки относительно нейтральной оси проходящей черезъ ея центръ тяжести, а v разстояніе разсматриваемой точки отъ нейтральной оси.

Чтобы выяснить, при какой толщинѣ стѣнки эти предположенія приводятъ къ практически допустимымъ ошибкамъ, необходимо сравнить приближенное рѣшеніе съ точнымъ.

1. Трубы, растягиваемыя равномернымъ внутреннимъ давленіемъ.

Точное рѣшеніе этой задачи принадлежитъ Ламе. Имъ были (въ 1852 г.) выведены формулы, опредѣляющія напряженія въ трубѣ внутренняго радіуса r_i и наружнаго радіуса r_e не закрытой съ концовъ и растягиваемой равномернымъ внутреннимъ давленіемъ k атмосферъ (кгр./см.²).

Оказывается, что при такой нагрузкѣ въ стѣнкахъ трубы появляются напряженія σ_n въ направленіи касательной къ поверхности трубы (въ дальнѣйшемъ мы ихъ будемъ называть нормальными). Если обозначить черезъ x разстояніе разсматриваемой точки отъ оси трубы, то нормальное напряженіе въ этой точкѣ будетъ

$$\sigma_n = k \frac{r_a^2}{r_n^2 - r_a^2} \left(1 + \frac{r_n^2}{x^2} \right)^1 \dots \dots \dots (I)$$

Одновременно съ такими растягивающими напряженіями появляются напряженія σ_r въ направленіи радіуса, опредѣляемая формулой

$$\sigma_r = k \frac{r_a^2}{r_n^2 - r_a^2} \left(1 - \frac{r_n^2}{x^2} \right)^1 \dots \dots \dots (II)$$

Очевидно, что эти напряженія, являясь функціями разстоянія отъ оси трубы x , не будутъ постоянны въ разныхъ точкахъ сѣченія стѣнки. Радіальныя напряженія σ_r не играютъ при расчетѣ водопроводныхъ трубъ большой роли потому, что давленія k не бываютъ велики. Какъ видно изъ формулы, опредѣляющей радіальное напряженіе, наибольшее значеніе σ_r соответствуетъ наименьшему x ; при $x = r_a \dots \sigma_r = -k$. Давленіе k нормально 5—6 ат. и лишь для пожарныхъ водопроводовъ достигаетъ 20—25 к./см². Но напряженіе даже въ 20—25 к./см². не играетъ существенной роли сравнительно съ нормальными напряженіями, достигающими допускаемыхъ для матеріала трубы границъ.

О томъ какъ измѣняются напряженія σ_n и σ_r по толщѣ стѣнки можно судить по діаграммѣ распредѣленія напряженій (черт. 1), построенной для трубы $r_a = 10$ см., $r_n = 15$ см. Какъ видно, разница между наибольшимъ и наименьшимъ нормальнымъ напряженіемъ для такой трубы равняется величинѣ равномѣрнаго давленія k , при чемъ наибольшее нормальное напряженіе тоже получается на внутренней поверхности трубы.

При расчетѣ толстостѣнныхъ трубъ толщину стѣнокъ обыкновенно опредѣляютъ не по формулѣ (I) при $x = r_a$, т. е. не по наибольшему изъ напряженій, а, сообразно господствующей сейчасъ теоріи прочности, по наибольшему изъ, такъ называемыхъ, приведенныхъ напряженій, т. е. по напряженію, соотвѣтствующему наибольшему удлиненію.

Это наибольшее удлиненіе будетъ въ направленіи касательной, т. е. въ направленіи нормальныхъ напряженій и соотвѣтствуетъ $x = r_a$. Если удлиненія въ этомъ направленіи мы назовемъ ϵ_n , то приведенное напряженіе будетъ

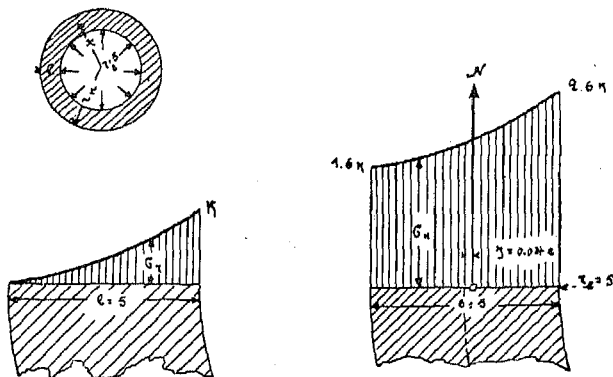
$$\sigma_{\text{прив.}} = E \epsilon_n = \sigma_n - \frac{1}{m} \sigma_r,$$

¹⁾ Въ этихъ формулахъ за положительныя приняты растягивающія напряженія.

гдѣ $\frac{1}{m}$ Пуассонова постоянная для матеріала стѣнокъ трубы; наибольшее приведенное напряженіе

$$\max \sigma_{\text{прив.}} = \left(\sigma_n - \frac{1}{m} \sigma_r \right) = \frac{k}{r_n^2 - r_a^2} \left(\frac{m-1}{m} r_a^2 + \frac{m+1}{m} r_n^2 \right) \quad \text{.. (III)}$$

$x = r_a$



Черт. 1.

Если мы выразимъ условіе прочности, положивъ это наибольшее приведенное напряженіе меньше допускаемаго z , то при $m = \frac{10}{3}$ получимъ формулу, данную Винклеромъ (въ 1860 г.) ¹⁾

$$r_n^2 \geq r_a^2 \sqrt{\frac{z + 0,7 k}{z - 1,3 k}}$$

При выводѣ этой формулы (Zivilingenieur 1860 г.) Винклеръ указывалъ, что она годится лишь для того случая, когда нѣтъ усилій, дѣйствующихъ въ направленіи оси трубы.

Въ дѣйствительности такія усилія всегда есть въ трубѣ, растягиваемой внутреннимъ давленіемъ. Если труба закрыта по концамъ, то эти растягивающія усилія будутъ равны давленію на площадь поперечнаго сѣченія трубы. Для такого объемнаго напряженного состоянія соотвѣтствующія формулы, опредѣляющія напряжения, даны Винклеромъ и позже Бахомъ. Эти формулы тоже довольно часто примѣняются къ расчету толстостѣнныхъ трубъ.

Понято, что наибольшее приведенное нормальное напряженіе при такихъ условіяхъ будетъ меньше, чѣмъ по формулѣ (III), т. к. растяженіе въ направленіи оси трубы уменьшитъ относительное растяженіе ϵ_n въ направленіе касательной. Въ этомъ случаѣ

$$\max \sigma_{\text{прив.}} = \frac{k}{r_n^2 - r_a^2} \left(\frac{m-2}{m} r_a^2 + \frac{m+1}{m} r_n^2 \right).$$

¹⁾ Винклеромъ дана эта формула при $m = 4$.

Если труба, растягиваемая внутреннимъ давленіемъ, не закрыта съ концовъ и укрѣплена концами неподвижно, то продольныя усилія, равныя давленію на площадь поперечнаго сѣченія трубы, будутъ восприниматься укрѣпленіемъ и не будутъ растягивать трубы, но все-же напряженія дѣйствующія параллельно оси трубы будутъ и въ этомъ случаѣ. Дѣйствительно, подъ вліяніемъ напряженій σ_n и σ_r опредѣляемыхъ формулами (I) и (II), труба не укрѣпленная своими открытыми концами, измѣнитъ длину. Обозначая удлиненіе въ направленіи оси трубы ϵ_l , найдемъ для этого случая

$$\epsilon_l = \frac{1}{E} \left(-\frac{1}{m} \sigma_n - \frac{1}{m} \sigma_r \right).$$

По введеніи выраженій σ_n и σ_r по (I) и (II) получимъ

$$\epsilon_l = -\frac{2}{mE} \frac{k r_o^2}{r_n^2 - r_o^2}.$$

Какъ видно удлинеше это будетъ отрицательнымъ, т. е. труба укоротится. Если положить теперь, что концы трубы укрѣплены неподвижно, то понятно, что укороченія ϵ_l не будетъ, но возникнутъ соотвѣтствующія ему напряженія.

$$\sigma_l = E \epsilon_l = \frac{2k}{m} \frac{r_o^2}{r_n^2 - r_o^2}.$$

Кромѣ этихъ двухъ причинъ, могущихъ вызвать напряженія въ направленіи параллельномъ оси трубы, такія-же напряженія могутъ появиться благодаря измѣненіямъ температуры, хотя для водопроводныхъ трубъ вліяніе этой причины весьма не велико благодаря тому, что температура воды, заполняющей трубу, измѣняется обыкновенно въ довольно узкихъ границахъ отъ 0° до 20—25°. Вліяніе этой причины отразится на наибольшемъ приведенномъ напряженіи при чемъ вліяніе это будетъ больше для трубы съ жесткими соединеніями, т. е. клепанной или соединенной изъ отдѣльныхъ стволовъ фланцами на болтахъ или муфтами и меньше при допускающихъ нѣкоторую подвижность раструбныхъ соединеніяхъ.

Наконецъ, даже и для трубы съ открытыми и неукрѣпленными концами давленіе воды на изгибы и колѣна этой трубы вызоветъ растягивающія вдоль оси трубы напряженія.

Во всякомъ случаѣ растягивающія вдоль оси трубы усилія, до тѣхъ поръ, пока они вызваны лишь указанными выше причинами не бываютъ особенно велики и понижаютъ приведенное нормальное растягивающее напряженіе; потому мы воспользуемся формулой (III), дающей напряженія большія дѣйствительныхъ для выясненія при какой толщинѣ стѣнки трубы, вычисляя напряженіе дѣленіемъ нормальнаго усилія N

на площадь сѣченія стѣнки ω , мы не сдѣлаемъ существенной ошибки. Такъ какъ дѣйствительное наибольшее напряженіе, благодаря продольному растяженію, будетъ меньше, то и установленная нами разница въ вычисленіяхъ будетъ тоже меньше и слѣдовательно, при опредѣленной допускаемой ошибкѣ въ величинѣ напряженія, тонкостѣнной можно назвать трубу съ болѣе толстой стѣнкой,

Условимся принять эту допускаемую разницу въ $4\%_0$ — $5\%_0$. Конечно, эта цифра совершенно произвольна, но, какъ увидимъ изъ дальнѣйшаго, она представляетъ нѣкоторыя удобства и вмѣстѣ съ тѣмъ не является чрезмѣрно большой, такъ какъ не съ большой точностью опредѣляемъ мы въ нѣкоторыхъ случаяхъ нагрузку и механическія свойства матерьяла трубы.

Нормальное усиліе N для кольца выдѣленнаго изъ трубы толщиной стѣнки e двумя сѣченіями перпендикулярными къ ея оси при ихъ взаимномъ удаленіи равномъ ед. длины будетъ kr_e . Площадь сѣченія стѣнки такого кольца— e . При равномерномъ распредѣленіи напряженій это усиліе вызоветъ напряженіе

$$\sigma = \frac{kr_e}{e}.$$

Въ такомъ видѣ эта формула, взятая въ отдѣльности, вполне удобна для расчета трубы, такъ какъ въ нее входитъ, обычно задаваемый, внутренній радіусъ. Но такъ какъ намъ придется имѣть дѣло съ трубой не только растягиваемой, но и сплющиваемой изгибающими моментами M , а также и съ деформациями этой трубы, которыя выразить въ зависимости отъ внутренняго радіуса довольно затруднительно, то мы будемъ опредѣлять нормальныя напряженія въ стѣнкахъ трубы отъ равномернаго растяженія по формулѣ

$$\sigma = \frac{kr_0}{e},$$

гдѣ r_0 средній между r_e и r_n радіусъ.

Такимъ расчетомъ мы нѣсколько преувеличимъ нормальное усиліе N и приблизимъ опредѣляемое упрощеннымъ способомъ напряженіе σ къ точно вычисляемому по форм. (III).

Эту формулу можно преобразовать слѣдующимъ образомъ, введя въ нее средній радіусъ и толщину стѣнки e

$$\text{так } \sigma_{\text{приб.}} = \frac{kr_0}{e} \left(1 + \frac{1}{m} \frac{e}{r_0} + \left(\frac{e}{r_0} \right)^2 \right).$$

Полагая

$$1 + \frac{1}{m} \frac{e}{r_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{e}{r_0} \right)^2 = 1,04$$

найдемъ относительную толщину стѣнки

$$\frac{e}{r_0} = -\frac{2}{m} \pm \sqrt{\frac{4}{m^2} + 0,16} = \frac{2}{m} [\pm \sqrt{1 + 0,04 m^2} - 1]$$

При $m = \frac{10}{3}$

$$\frac{e}{r_0} = 0,6 \left| \sqrt{1 + \frac{4}{9}} - 1 \right| = 0,1212 \approx \frac{1}{8,25}$$

Опредѣлимъ отношеніе толщины стѣнки къ внутреннему радіусу

$$\frac{e}{r_0} = \frac{1}{8,25} = \frac{e}{r_e + \frac{e}{2}} = \frac{1}{\frac{r_e}{e} + \frac{1}{2}}$$

откуда

$$\frac{r_e}{e} = 7,75 \text{ и } \frac{e}{r_e} = \frac{1}{7,75}.$$

Если бы при этихъ условіяхъ мы ввели въ расчетъ напряженіе опредѣляемое по формулѣ $\frac{k r_e}{e}$, то сдѣлали бы ошибку уже не меньше 40%, а значительно больше, такъ какъ

$$\max \sigma_{\text{прив.}} = 1,11 \frac{k r_e}{e} \left(\text{при } \frac{r_e}{e} = 7,75 \right).$$

Въ томъ случаѣ, когда внутреннее давленіе растягиваетъ сплюсываемую какими либо силами трубу, къ изгибающимъ моментамъ M , вызываемымъ этими силами, прибавятся моменты нормальныхъ усилій N .

Если мы назовемъ черезъ η измѣренныя по направленію радіуса перемѣщенія средней линіи сѣченія трубы (окружности радіуса r_0) при деформаци, то моменты нормальныхъ усилій будутъ $N\eta$ (см. труба, лежащая на землѣ), если усиліе N приложено въ центрѣ сѣченія.

Но, какъ видно изъ чертежа 1, это усиліе всегда приложено ближе къ внутренней поверхности трубы и чтобы имѣть право вычислять моменты умноженіемъ нормального усилія N на разстояніи η надо чтобы эксцентриситетъ усилія N былъ достаточно малъ сравнительно съ η .

Выяснить точно какой онъ долженъ быть въ общемъ случаѣ невозможно потому, что величина η зависитъ не отъ одного лишь давленія k , какъ вычисленныя выше приведенныя напряженія, а еще и отъ изгибающихъ моментовъ M , т. е. отъ нагрузки, которая можетъ быть весьма разнообразна. Строго говоря, въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ необходимо было бы убѣдиться въ достаточной малости эксцентриситета сравнительно съ величиной деформаци η , но практически это бесполезно вотъ почему: если стѣнки трубы толсты, то

деформации будут ничтожны и значение момента $N\eta$ не существенно, если же стѣнки трубы тонки, деформации будут велики и небольшой добавки къ η въ видѣ эксцентриситета не играютъ роли.

Все же интересно выяснить, какъ велика величина этого эксцентриситета. Для этого вычислимъ сумму моментовъ нормальныхъ напряжений относительно центра трубы. Раздѣливъ эту сумму на величину нормального усилія kr_0 и вычтя частное изъ r_0 найдемъ эксцентриситетъ ξ . Элементарный моментъ $dM = \sigma_n dx \cdot x$, введя сюда σ_n по (II) и интегрируя въ предѣлахъ отъ r_0 до r_n получимъ

$$M = \frac{kr_0^2}{r_n^2 - r_0^2} \int_{r_0}^{r_n} \left[x + \frac{r_n^2}{x} \right] dx = \frac{kr_0^2}{r_0^2 - r_n^2} \left[\frac{r_n^2 - r_0^2}{2} - r_n^2 \lg_n \frac{r_0}{r_n} \right] \quad 1)$$

Плечо нормального усилія относительно центра

$$x_0 = \frac{r_0}{r_n^2 - r_0^2} \left[\frac{r_n^2 - r_0^2}{2} - r_n^2 \lg_n \frac{r_0}{r_n} \right].$$

Откуда эксцентриситетъ

$$\xi = \frac{r_0 r_n^2}{r_n^2 - r_0^2} \left[\lg_n \frac{r_0}{r_n} + \frac{r_n^2 - r_0^2}{2r_0 r_n} \right],$$

а по соответствующемъ преобразованіи

$$\xi = e \frac{8 + 4t - 2t^2 - t^3}{16t^3} \left[\lg_n \frac{2 - t}{2 + t} + \frac{4t}{4 - t^2} \right],$$

гдѣ t означаетъ $\frac{e}{r_0}$.

Этотъ эксцентриситетъ ξ составляетъ даже и при не особенно тонкихъ стѣнкахъ очень небольшую долю ихъ толщины. При $t = \frac{1}{8,25}$; ξ около 0,01 e , при $t = \frac{1}{20}$ уже лишь 0,002.

Кажется, что можно удовольствоваться эксцентриситетомъ въ $\frac{1}{100}$ толщины стѣнокъ тѣмъ болѣе, что относительная толщина $t = \frac{1}{8,25}$ встрѣчается въ водопроводныхъ трубахъ лишь изъ такихъ матеріаловъ какъ: чугунъ, бетонъ, желѣзо-бетонъ и обожженная глина, для которыхъ всѣ наши расчеты оказываются не очень точными и для которыхъ допустимыя величины, какъ деформации η , такъ нормального растягивающаго усилія настолько не велики, что не стоитъ зачастую принимать во вниманіе момента $N\eta$, что лишь послужитъ въ пользу прочности.

Оставимъ пока въ сторонѣ вопросъ о сжатіи трубы и выяснимъ

1) Логариемъ натуральный.

при какой толщинѣ стѣнки гипотеза линейнаго распредѣленія напряженій отъ изгиба (сплющиванія) трубы не приведетъ къ большимъ ошибкамъ.

2. Примѣнимость линейнаго закона распредѣленія напряженій.

Въ общемъ случаѣ напряженія въ какомъ либо сѣченіи стѣнки трубы приводятся къ силѣ N и парѣ M .

Вопросъ о законѣ распредѣленія напряженій въ этомъ случаѣ остается неопредѣленнымъ при рѣшеніи задачи элементарнымъ путемъ. Этотъ законъ долженъ быть или заданъ гипотезой или найденъ изъ разсмотрѣнія условій равновѣсія элементарнаго параллелоипеда (изъ основныхъ уравненій теоріи упругости) дополненныхъ условіями на поверхности тѣла, т. е. заданіемъ закона распредѣленія внѣшнихъ силъ. Но точное рѣшеніе этой задачи, представляя значительныя математическія трудности, даетъ законъ распредѣленія напряженій и деформаціи бруса лишь для данной нагрузки и такимъ образомъ для каждаго случая нагрузки необходимо рѣшать задачу о распредѣленіи напряженій снова ¹⁾. При этомъ само собою разумѣется, что законъ распредѣленія внѣшнихъ силъ долженъ выражаться аналитически, что далеко не всегда осуществимо. Иногда-же этотъ законъ вовсе не извѣстенъ, или извѣстенъ, но весьма не точно, что мы, напримѣръ, имѣемъ для трубъ относительно давленія земли или реакціи жесткой опоры, на которую опирается труба значительной частью своей поверхности.

При такихъ условіяхъ точное рѣшеніе не имѣетъ большихъ преимуществъ передъ приближеннымъ, но цѣнность этихъ рѣшеній и цѣль ихъ заключается не въ непосредственномъ приложеніи полученныхъ результатовъ къ расчетамъ конструкцій, а въ повѣркѣ приближенныхъ теорій путемъ сравненія ихъ съ точными въ различныхъ частныхъ случаяхъ.

Другой не менѣе важный способъ повѣрки приближенныхъ теорій, это сравненіе результатовъ расчета съ данными хорошо поставленнаго опыта. При этомъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что всѣ расчеты справедливы лишь до предѣла упругости, а потому и опыты, производимые для сравненія, слѣдуетъ ограничивать этимъ предѣломъ для на-

¹⁾ Подобнаго-же рода задачу представляетъ вопросъ о расчетѣ прямого бруса. Математическія трудности расчета въ этомъ случаѣ B. de St.-Venant уменьшилъ примѣненіемъ своего полуобратнаго метода, заключающагося въ томъ, что часть напряженій предполагается извѣстной, а лишь остальные находятся изъ упрощенныхъ этимъ предположеніемъ уравненій при различныхъ условіяхъ на поверхности. Конечно такіа рѣшенія тоже являются частными, но они пригодны для большинства интересныхъ для практики случаевъ.

пряжений. Въ этомъ случаѣ кажется особенно пригоднымъ примѣненіе оптическаго метода.

На основаніи подобныхъ опытовъ и точныхъ рѣшеній для частныхъ случаевъ изгиба кривыхъ брусевъ, можно заключить, что болѣе вѣрна гипотеза плоскихъ сѣченій (гип. Бернулли) или, точнѣе, ея приближенное слѣдствіе при пренебреженіи поперечнымъ сжатіемъ сѣченій, гиперболическій законъ распредѣленія напряженій.

При этомъ оказывается, что при прямоугольномъ сѣченіи бруса и при $t < \frac{1}{4}$ разница между точнымъ рѣшеніемъ, принимающимъ во вниманіе поперечное сжатіе и приближеннымъ, имъ пренебрегающимъ, ничтожна.

При большихъ $t = \frac{e}{r_0}$ эта разница возрастаетъ и приобретаютъ важное значеніе мѣстныя напряженія близъ точки приложенія груза. При точномъ рѣшеніи (какъ и для прямыхъ брусевъ) предполагается, обыкновенно, что внѣшнія силы дѣйствуютъ въ торцевыхъ сѣченіяхъ бруса, т. е. что разсматриваемыя сѣченія достаточно удалены отъ точекъ приложенія внѣшнихъ силъ; очевидно, что при большихъ t это не осуществимо такъ какъ у бруска не будетъ точекъ достаточно удаленныхъ отъ торцовъ.

Итакъ при $t < \frac{1}{4}$ можно, съ достаточной точностью, рассчитывать кривые брусья не принимая во вниманіе ни поперечнаго сжатія, ни мѣстныхъ напряженій, предполагая, что напряженія отъ изгиба распредѣляются по гиперболическому закону.

Однако расчетъ при гипотезѣ гиперболическаго распредѣленія напряженій относительно сложенъ и гораздо болѣе простымъ является расчетъ при предположеніи, что напряженія распредѣлены въ сѣченіи по линейному закону.

Предѣлъ примѣнимости этой послѣдней гипотезы можно установить сравненіемъ результатовъ вычисленія при указанныхъ двухъ гипотезахъ, что подробно сдѣлано проф. Митинскимъ въ его статьѣ «Объ изгибѣ кривыхъ брусевъ». Изъ составленныхъ имъ сравнительныхъ таблицъ видно, что напряженія, опредѣляемые по двумъ гипотезамъ, разнятся не болѣе 4% для бруса прямоугольнаго сѣченія до тѣхъ поръ пока $t = \frac{e}{r_0}$ не больше $\frac{1}{10}$. Разница-же въ величинѣ деформации отъ изгиба при такомъ отношеніи вовсе ничтожна, меньше 0,01%. Деформации отъ измѣненія длины срединной линіи разнятся значительно и разность зависитъ отъ отношенія нормальной силы къ изгибающему моменту; при $\frac{M}{N} = 1$ и $t = \frac{1}{10}$ она около 10%, но такъ какъ перемѣщеніе точекъ изгибаемаго бруса зависитъ главнымъ образомъ отъ измѣненія угла и эти послѣднія почти исключительно отъ изгибающаго момента M , то эта ошибка не играетъ роли. Къ такимъ-же выводамъ приходитъ и проф. Тимошенко.

Кривые брусъ съ $t < \frac{1}{10}$ называютъ, обыкновенно, брусъями малой кривизны. Въ примѣненіе къ трубамъ мы назовемъ тонкостѣнною ту трубу, у которой толщина стѣнки меньше $\frac{1}{10}$ средняго радіуса.

При такой толщинѣ, какъ это было выяснено раньше, напряженія отъ равномернаго внутренняго движенія h могутъ быть опредѣляемы съ точностью большей 40% по формулѣ $\frac{kr_0}{e}$ и ихъ равнодѣйствующую можно полагать проходящей черезъ центръ сѣченія стѣны (эксцентриситетъ ξ для $t = \frac{1}{10} \dots 0,008 e$).

3. Труба, сжимаемая равномернымъ наружнымъ давленіемъ.

Въ томъ случаѣ, когда труба сжимается равномернымъ наружнымъ давленіемъ h атмосферъ (кгр./см.²) формулы (I) и (II), опредѣляющія нормальныя и радіальныя напряженія будутъ

$$\sigma_n = - \frac{r_n^2 h}{r_n^2 - r_a^2} \left(1 + \frac{r_a^2}{x^2} \right) \dots \dots \dots (I')$$

и

$$\sigma_r = - \frac{r_n^2 h}{r_n^2 - r_a^2} \left(1 - \frac{r_a^2}{x^2} \right) \dots \dots \dots (II')$$

какъ и при растяженіи здѣсь предполагается отсутствіе усилій вдоль оси трубы.

Опредѣляя приведенное напряженіе получимъ

$$\sigma_{\text{прив.}} = \left(\sigma_n - \frac{1}{m} \sigma_r \right).$$

Наибольшее значеніе этого приведеннаго напряженія, какъ и въ случаѣ растяженія трубы, будетъ при $x = r_a$ и оно равно

$$\max \sigma_{\text{прив.}} = - \frac{2 r_n^2 h}{r_n^2 - r_a^2} \dots \dots \dots (III')$$

При сравненіи этого наибольшаго нормальнаго напряженія съ вычисленнымъ упрощенно, нѣтъ необходимости выражать и то и другое въ зависимости отъ средняго радіуса r_0 потому, что при расчетѣ водопроводныхъ трубъ на сжатіе намъ не придется одновременно опредѣлять напряженій отъ сжатія и отъ изгиба моментомъ M .

Дѣйствительно: рассчитывать на сжатіе придется трубы лишь въ томъ случаѣ, когда онѣ уложены подъ водой. Это будутъ или напорныя трубы — дюкера или безнапорныя — забирныя трубы. Для этихъ трубъ не будетъ большой ошибкой если мы положимъ, что на наружной поверхности ихъ дѣйствуетъ только нормальное давленіе. Это давленіе можно разложить на двѣ системы силъ: 1) равномерное давленіе, соотвѣтствующее глубинѣ погруженія высшей точки поперечнаго сѣченія трубы и 2) давленіе соотвѣтствующее столбу воды вы-

сотой отъ разсматриваемой точки до упомянутой высшей точки сѣченія. Вторая система силъ уравнивается такимъ же давленіемъ на внутреннюю поверхность трубы отъ вѣса воды заполняющей трубу. Такимъ образомъ труба, лежащая на днѣ и заполненная водой, оказывается сжимаемой только равномернымъ наружнымъ давленіемъ.

Случай, когда водопроводная труба, лежащая подъ водой, будетъ пуста для тонкостѣнной трубы совершенно исключителенъ, такъ какъ обычно при укладкѣ не принимается какихъ либо особыхъ мѣръ для укрѣпленія трубы ко дну, а потому, если труба будетъ опорожнена, она всплыветъ на поверхность.

Для напорной трубы болѣе неблагоприятнымъ будетъ тотъ случай, когда напоръ въ ней понизится до нуля

Поэтому мы сравнимъ напряженіе опредѣляемой по формулѣ (III') напряженіемъ $\sigma = \frac{k r_n}{e}$.

Выражая приведенное напряженіе (III') въ зависимости отъ наружнаго радіуса трубы и отношенія толщины стѣнки e къ этому радіусу получимъ

$$\max \sigma_{\text{прив.}} = - \frac{k r_n}{e} \frac{2}{2 - \frac{e}{r_n}}.$$

Допуская разницу между точнымъ значеніемъ наибольшаго напряженія и $\frac{k r_n}{e}$ около 4% положимъ

$$\frac{2}{2 - \frac{e}{r_n}} = 1,04$$

откуда

$$\frac{e}{r_n} = \frac{1}{13} \quad \text{и} \quad t = \frac{e}{r_0} \approx \frac{2}{25}.$$

При выводѣ формулъ (I') и (II') предполагалось, что круглая форма трубы сохраняется неизмѣнной и что наружное равномерное давленіе только сжимаетъ трубу. Но это предположеніе справедливо лишь до известной величины давленія, которое мы назовемъ критическимъ.

Величина этого давленія установлена впервые Морисомъ Леви и Буссинекомъ. М. Леви разсматривалъ конечныя деформаціи тонкаго прямолинейнаго или изогнутаго по дугѣ круга стержня подъ дѣйствіемъ силъ и паръ приложенныхъ на его концахъ и нагруженнаго кромѣ того давленіемъ, равномерно распределеннымъ по его осевой линіи, нормальнымъ къ ней и остающимся нормальнымъ каковы бы ни были деформаціи.

Имъ было доказано, что для того, чтобы круглое кольцо не деформировалось подъ вліяніемъ наружнаго давленія k необходимо, чтобы

$$\frac{EI}{k r_0^3} > \frac{1}{3} \quad \text{т. е.} \quad k < \frac{3EI}{r_0^3}.$$

Въ послѣдовавшей по поводу мемуаръ М. Леви замѣткѣ, Буссинекъ далъ упрощенный выводъ этого условія.

Положимъ, что нагруженное описаннымъ образомъ круговое кольцо ничтожно уклонилось отъ своей первоначальной формы.

Въ этомъ случаѣ уравненіе срединной линіи въ полярныхъ (r, ω) координатахъ при полюсѣ смежномъ съ центромъ круга можно написать такъ

$$r = r_0 (1 + \varepsilon),$$

гдѣ ε малая функція ω .

Выраженіе для кривизны срединной линіи въ точкѣ (ω, r)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2(r')^2 + rr''}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}}$$

обратится въ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - (\varepsilon + \varepsilon'')}{r_0} \dots \dots \dots (a)$$

если пренебречь произведеніями и квадратами $\varepsilon, \varepsilon'$ и ε'' .

Съ другой стороны приращеніе кривизны срединной линіи

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\Delta d\varphi}{ds} \dots \dots \dots (b)$$

гдѣ $\Delta d\varphi$ есть приращеніе угла смежности, угла между касательными къ срединной линіи въ двухъ безконечно близкихъ точкахъ этой линіи. Отношеніе $\frac{\Delta d\varphi}{ds}$, выражается въ зависимости отъ нормального усилія N и момента M такъ:

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + C \dots \dots \dots (c)$$

гдѣ C слагаемое, зависящее отъ N , которое въ данномъ случаѣ можно считать постояннымъ.

Соединяя (a), (b) и (c) получимъ

$$\varepsilon'' + \varepsilon = -\frac{Mr_0}{EI} - C_1 \dots \dots \dots (d)^1$$

¹⁾ Въ послѣдующемъ мы будемъ пользоваться этимъ уравненіемъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ. Понятно, что $\varepsilon = \frac{\eta}{r_0}$, гдѣ η есть радіальное перемѣщеніе точки срединной линіи при деформациі, слѣдовательно

$$\frac{d^2\eta}{d\omega^2} + \eta = -\frac{Mr_0^2}{EI} - C_1 r_0$$

или пренебрегая членомъ, зависящимъ отъ N , очень мало вліяющимъ на η

$$\frac{d^2\eta}{d\omega^2} + \eta = -\frac{Mr_0^2}{EI} \dots \dots \dots (B)$$

Знакъ минуса въ правой части зависитъ отъ принятыхъ за положительныя направленій η и M .

Если мы рассмотрим часть кольца заключающуюся между некоторой точкой A и какой-либо (ω, r) и определим моменты наружного давления на часть кольца между этими двумя точками, относительно точки (ω, r) , то этот моментъ, очевидно, равенъ $\frac{1}{2} k u^2$, гдѣ u разстояние отъ A до (ω, r) . Дѣйствительно: опишемъ около точки (ω, r) рядъ окружностей; моментъ наружного давления на дугу кольца ds , заключающуюся между окружностями радіуса u и $u + du$ будетъ $(k du) u$; интегрируя отъ $u = 0$ до u найдемъ: $\frac{1}{2} k u^2$.

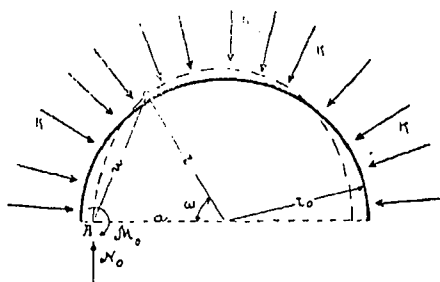
Если къ этому суммарному моменту прибавить моментъ силы и пары приложенныхъ въ точкѣ A , то найдемъ изгибающій моментъ въ точкѣ (ω, r) равнымъ суммѣ постоянного члена и произведенія $\frac{1}{2} k$ на квадратъ разстоянія отъ точки (ω, r) отъ некоторой опредѣленной точки. Эта точка, въ нашей задачѣ, гдѣ радіусъ кривизны ρ и изгибающій моментъ мало измѣняются, должна быть смежна съ центромъ безъ чего она не была бы, какъ это должно быть, почти равноудалена отъ всѣхъ точекъ (ω, r) оси кольца. Мы положимъ, что ее выбрали за полюсъ и что слѣдовательно величина изгибающаго момента въ (ω, r) будетъ $\frac{1}{2} k r_0^2 (1 + \epsilon)^2 - C_2$ ¹⁾.

Пренебрегая квадратомъ ϵ

$$M = C_3 + k r_0^2 \epsilon.$$

¹⁾ Мы приводимъ почти дословно выводъ Буссинека, который въ этомъ пунктѣ нуждается въ разъясненіи. Положимъ, что полюсъ координатъ (ω, r) въ центрѣ круга (черт. 2). Тогда для точки (ω, r)

$$M = -M_0 + \frac{1}{2} k u^2 - N_0 (a - r \cos \omega).$$



Черт. 2.

Но $N_0 = ak$, u какъ сторона треугольника: $u^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \omega$, и $r = r_0 (1 + \epsilon)$ по основному уравненію. Введя все это въ выраженіе изгибающаго момента получимъ

$$M = -C_2 + \frac{1}{2} k r_0^2 (1 + \epsilon)^2.$$

Введя это M въ ур. (d) получимъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2 \epsilon}{d\omega^2} + \left(1 + \frac{k r_0^3}{EI}\right) (\epsilon - \alpha) = 0 \dots \dots \dots (e)$$

гдѣ α нѣкоторая постоянная.

Интегрируя это уравненіе получимъ конечное уравненіе деформированной срединной линіи.

$$\epsilon = \alpha + c_1 \cos \left(c_2 + \omega \sqrt{1 + \frac{k r_0^3}{EI}} \right)$$

гдѣ c_1 и c_2 постоянныя.

Изъ условія, что эта кривая сомкнута, слѣдуетъ, что при измѣненіи ω на 2π значенія ϵ повторяются, т. е.

$$\sqrt{1 + \frac{k r_0^3}{EI}} = i, \text{ гдѣ } i \text{ цѣлое, или } \frac{k r_0^3}{EI} = i^2 - 1.$$

Нельзя положить $i = 1$, такъ какъ тогда по ур. (e) $\epsilon'' + \epsilon = \text{const}$ и слѣдовательно $\frac{1}{\rho} = \text{const}$, т. е. изгиба нѣтъ.

Наименьшее возможное значеніе $i = 2$, тогда

$$\frac{k r_0^3}{EI} = 3 \quad \text{или} \quad k = \frac{3EI}{r_0^3} \dots \dots \dots (IV)$$

Это есть наибольшее возможное давленіе, при которомъ кольцо круглой формы будетъ устойчиво сопротивляться внѣшнему давленію. При большихъ давленіяхъ круглая форма не устойчива, но возможны иныя устойчивыя формы равновѣсія.

Прилагая этотъ выводъ не къ кольцу, а къ трубѣ, надо учесть то обстоятельство, что кольцу единичной ширины по направленію оси трубы препятствуютъ сплющиваться смежныя части, что, какъ извѣстно, можно учесть, введя вмѣсто произведенія EI , цилиндрическую жесткость $\frac{EI}{1 - \frac{1}{m^2}}$. При $m = \frac{10}{3}$ получимъ $\approx 1,1EI$ и

$$k = \frac{3,3EI}{r_0^3} \dots \dots \dots (IV')$$

На практикѣ внѣшнее давленіе не должно превосходить нѣкоторой доли критическаго, такъ что допускаемое внѣшнее давленіе

$$k_d = \frac{1}{n} \frac{3,3EI}{r_0^3} \dots \dots \dots (V)$$

Такъ какъ всѣ наши разсужденія справедливы лишь до тѣхъ поръ, пока напряженія въ стѣнкахъ трубы не превосходятъ предѣла упругости, то очевидно, что и формула (IV') пригодна только при соблюденіи этого условія.

Какъ выяснено было раньше, рассчитывая тонкостѣнную трубу на сжатіе, можно опредѣлять наибольшее напряженіе по формулѣ $\sigma = \frac{k r_n}{e}$.

Выяснимъ при какой толщинѣ стѣнки это напряженіе будетъ при критическомъ давленіи меньше предѣла упругости.

Для этого положимъ, что $\sigma = \frac{k r_n}{e} \leq R'$, гдѣ R' предѣлъ упругости и введемъ сюда k по форм. (IV'). Строго говоря, эти k нѣсколько отличаются другъ отъ друга, такъ какъ критическое давленіе k относится къ срединной линіи, а k въ формулѣ опредѣляющей напряженіе къ наружной поверхности трубы, но понятно, если изобразить давленіе k въ видѣ столба воды надъ трубой, что рѣшительно все равно измѣрять-ли высоту этого столба отъ наружной поверхности трубы или отъ срединной линіи.

Итакъ

$$\frac{k r_n}{e} \leq R' \quad \text{или} \quad \frac{3,3EI}{r_0^3} \frac{r_n}{e} \leq R'.$$

Такъ какъ $I = \frac{e^3}{12}$ и $r_n = r_0 + \frac{e}{2}$, то предыдущее напишется

$$t^3 + 2t^2 \leq \frac{24 R'}{3,3E},$$

гдѣ t какъ и раньше означаетъ $\frac{e}{r_0}$.

Полагая для желѣза $R' = 2000$ кгр./см. и $E = 2,15 \cdot 10^6$ кгр./см.² найдемъ, что неравенство удовлетворяется при $t < 0,0578 \approx \frac{1}{17,3}$ т. е. что при всякой толщинѣ стѣнки меньшей $\approx \frac{1}{17} r_0$ желѣзная труба можетъ быть сплющена наружнымъ давленіемъ, несмотря на то, что напряженіе отъ сжатія будетъ ниже предѣла упругости. Для стальныхъ трубъ это значеніе t будетъ то же самое, такъ какъ коэффициентъ упругости E и предѣлъ упругости R' находятся почти въ томъ-же отношеніи, что для желѣза. Для чугуна ¹⁾ это отношеніе нѣсколько больше, а слѣдовательно и толщина стѣнки, при которой становится опаснымъ сплющиванье, будетъ тоже больше.

При расчетѣ трубъ на сжатіе, такъ-же какъ и на сплющиванье, вводится нѣкоторый запасъ прочности, т. е. допускаются напряженія

¹⁾ Предѣлъ упругости для чугуна, въ зависимости отъ величины пренебрегаемаго остающагося удлиненія, величина переменная. Для водопроводныхъ трубъ при сжатіи $R' \approx 1000 - 1200$ к./см.².

относительно этого закона предположеніе, которое значительно упроститъ расчетъ и вмѣстѣ съ тѣмъ не противорѣчитъ извѣстному намъ объ этомъ давленіи.

Положимъ, что давленіе въ каждой точкѣ опорной поверхности нормально къ ней и пропорціонально $\cos \omega$ угла ω (черт. 3), измѣряемаго отъ вертикальнаго діаметра снизу вверхъ. т. е. что напряженіе давленія k (давленіе на ед. площади).

$$k = \lambda \cos \omega.$$

При этомъ предположеніи k равно нулю на уровнѣ горизонтальнаго діаметра и наибольшее при $\omega = 0$.

Такъ какъ всякая труба, уложенная съ нѣкоторымъ уклономъ дренируетъ почву, то слои грунта, прилежающіе къ трубѣ будутъ имѣть небольшой уголъ тренія и предположеніе нормальности давленія не слишкомъ уклоняется отъ дѣйствительности.

Коэффициентъ пропорціональности λ найдемъ изъ условія равновѣсія трубы. Проектируя силы, дѣйствующія на участокъ трубы единичной длины вдоль ея оси, на вертикальную ось, получимъ

$$\pi r^2 \cdot \gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lambda \cos \omega \cdot r d\omega \cdot \cos \omega$$

гдѣ γ вѣсъ ед. объема воды.

Въ этомъ уравненіи не принять во вниманіе собственный вѣсъ трубы, вліяніе котораго мы рассмотримъ потомъ отдѣльно.

Изъ этого уравненія

$$\lambda = 2\gamma r \dots \dots \dots (1)$$

Давленіе воды, нормальное къ внутренней поверхности трубы, можетъ быть выражено для верхней половины трубы въ зависимости отъ центральнаго угла ω_1 такъ: $\gamma r (1 - \cos \omega_1)$.

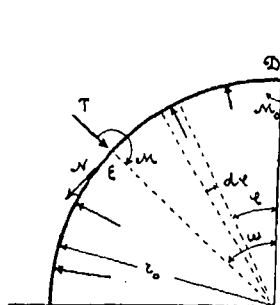
Для любой точки нижней половины трубы сумма давленій воды и земли, въ зависимости отъ центральнаго угла ω ; $\gamma r (1 + \cos \omega) - 2\gamma r \cos \omega = \gamma r (1 - \cos \omega)$, выражается точно такъ, какъ для верхней половины одно давленіе воды. Слѣдовательно труба нагружена симметрично, какъ относительно вертикальнаго, такъ и относительно горизонтальнаго діаметровъ и достаточно расчитать только одинъ квадрантъ.

Разсмотримъ лѣвый верхній квадрантъ (черт. 4).

Присутствіе смежныхъ квадрантовъ замѣнимъ силами и моментами, дѣйствующими въ крайнихъ сѣченіяхъ.

Благодаря симметріи трубы и нагрузки составляющія этихъ силъ въ направленіи радіусовъ должны быть равны нулю. Нормальныя къ

сѣченію составляющія опредѣляются изъ условій равновѣсія. Проектируя силы на ось N_0 получимъ:



$$N_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma r (1 - \cos \omega) r d\omega \sin \omega = \frac{1}{2} \gamma r^2.$$

Черт. 4.

Статически неопредѣлимымъ остается лишь моментъ M_0 въ сѣченіи $\omega = 0$. Для его опредѣленія воспользуемся теоремой Кастильяно. По одному изъ ея слѣдствій, производная отъ потенциальной энергіи по моменту, не производящему при деформации работы, должна быть равна нулю.

Моментъ M_0 какъ разъ удовлетворяетъ условно, такъ какъ сѣченіе $\omega = 0$ при деформации не поворачивается.

При допущеніи линейнаго закона распредѣленія напряженій въ зависимости отъ разстоянія волоконъ отъ нейтральной оси (гипотеза Навье), потенциальная энергія кривого бруса постоянной толщины e , выражается, въ зависимости отъ длины дуги срединной линіи, такъ:

$$D = \frac{1}{2E} \int_0^L \left(\frac{N^2}{e} + \frac{12M^2}{e^3} + \frac{2MN}{er_0} \right) ds \quad \dots \quad (A) ^1$$

гдѣ r_0 радиусъ срединной линіи.

Въ этомъ выраженіи не принято во вниманіе вліяніе радіальныхъ усилій T , но оно совершенно пренебрежимо.

Выраженіе потенциальной энергіи въ зависимости отъ центрального угла ω , для нашего случая будетъ:

$$D = \frac{r_0}{2E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N^2}{e} + \frac{12M^2}{e^3} + \frac{2MN}{er_0} \right) d\omega \quad \dots \quad (A')$$

Выраженія N и M въ любомъ сѣченіи квадранта найдемъ изъ условій равновѣсія части квадранта, соотвѣтствующей центральному углу ω .

Проектируя дѣйствующія на дугу DE силы на направленіе N и суммируя ихъ моменты относительно точки E , получимъ:

$$\begin{cases} N - N_0 \cos \omega - \int_0^{\omega} \gamma r (1 - \cos \varphi) r d\varphi \sin (\omega - \varphi) = 0 \\ M + M_0 + N_0 r_0 (1 - \cos \omega) - \int_0^{\omega} \gamma r (1 - \cos \varphi) r d\varphi \cdot r_0 \sin (\omega - \varphi) = 0 \end{cases}$$

¹⁾ Собр. сочиненій Ф. С. Ясинскаго. Т. II. стр. 214.

Откуда по выполненіи интегрированія и по замѣнѣ N_0 черезъ $\frac{1}{2} \gamma r^2$

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \omega + \gamma r^2 \left(1 - \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right) = \\ &= \gamma r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right) \\ M &= \gamma r^2 r_0 \left(1 - \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right) - N_0 r_0 (1 - \cos \omega) - M_0 = \\ &= \gamma r^2 r_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right) - M_0 \end{aligned} \right\} . (2)$$

Какъ видно изъ этихъ формулъ N отъ M_0 не зависитъ, а потому изъ (1')

$$\frac{\partial D}{\partial M_0} = 0 = \frac{r_0}{2E} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{24M}{e^3} \frac{\partial M}{\partial M_0} + \frac{2N}{er_0} \frac{\partial M}{\partial M_0} \right\} d\varphi$$

Изъ (2)

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = -1$$

и слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{12}{e^2} M + \frac{1}{r_0} N \right\} d\varphi = 0$$

Подставляя въ послѣднее M и N изъ (2) получимъ

$$\begin{aligned} \gamma r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right) \left(\frac{1}{r_0} + \frac{12r_0}{e^2} \right) d\omega - \frac{6\gamma r^2 r_0}{e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = \\ = \frac{6\pi}{e^2} M_0 \end{aligned}$$

откуда

$$\gamma r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_0} + \frac{12r_0}{e^2} \right) - \frac{6\gamma r^2 r_0}{e^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{6\pi}{e^2} M_0.$$

Изъ этого уравненія

$$M_0 = -\gamma r^2 r_0 \left[\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{6r_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \right].$$

Подставляя это M_0 во второе изъ уравн. (2) получимъ формулу, по которой можно вычислить изгибающій моментъ M для любого значенія угла ω .

$$M = \gamma r^2 r_0 \left[\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{e^2}{6r_0^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \right].$$

Присутствіе въ этомъ выраженіи слагаемаго, зависящаго отъ отношенія $\frac{e}{r}$, обусловлено тѣмъ, что въ выраженіи потенциальной энергіи A мы приняли во вниманіе слагаемое $\frac{2MN}{er_0}$. Если пренебrecь имъ и разницей между внутреннимъ радіусомъ трубы r и радіусомъ средней линіи r_0 , то мы получимъ сокращенное выраженіе для изгибающаго момента

$$M = \gamma r^3 \left[\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right] \quad . \quad . \quad . \quad (31^1)$$

Вліяніе отброшеннаго слагаемаго совершенно ничтожно. Опредѣлять размѣры трубы надо по наибольшему изгибающему моменту, который соотвѣтствуетъ, какъ легко видѣть, $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Въ этомъ сѣченіи

$$M = \gamma r^2 r_0 \left[-0,1488 - \frac{e^2}{6r_0^2} \cdot 0,1817 \right] = -0,1488 \gamma r^2 r_0 \left[1 + 0,2036 \frac{e^2}{r_0^2} \right].$$

При отношеніи $\frac{e}{r_0} = \frac{1}{10}$ второе слагаемое составляетъ лишь 0,2% отъ величины наибольшаго изгибающаго момента и слѣдовательно имъ дѣйствительно можно пренебrecь.

При выводѣ формулы (3) нами допущенъ еще одинъ источникъ погрѣшностей. Необходимо опредѣлить его вліяніе. Въ нашемъ разсужденіи мы рассматривали трубу круглой формы и именно для такой трубы составляли условія равновѣсія. Опредѣляя общее выраженіе изгибающаго момента (2), мы суммировали моменты относительно точки E , центра тяжести сѣченія ω , въ его первоначальномъ положеніи—до деформаци, тогда какъ, строго говоря, слѣдовало бы суммировать моменты относительно того положенія, которое эта точка займетъ послѣ деформаци. Если мы обозначимъ радіальное перемѣщеніе точки E при деформаци черезъ η , то въ выраженіе моментовъ относительно новаго положенія этой точки войдетъ прежній моментъ M и къ нему еще прибавится моментъ нормальнаго усилія $N\eta$. Усиліе T , какъ направленное по радіусу дастъ моментъ равный нулю. При тонкостѣнной трубѣ, быть можетъ, радіальное перемѣщеніе будетъ такъ значительно, что моментомъ $N\eta$ нельзя пренебrecь? Необходимо этотъ вопросъ выяснить.

Прежде всего не трудно замѣтить, что моментъ $N\eta$ будетъ всегда знака противоположнаго съ M . Дѣйствительно: положительный моментъ M , при обозначеніяхъ черт. 4, вызываетъ сжатіе у наружной поверхности трубы и растяженіе у внутренней, т. е. подъ вліяніемъ такого момента рассматриваемое сѣченіе перемѣстится по направленію радіуса къ центру трубы (радіусъ кривизны увеличится). Благодаря

¹⁾ Формула инымъ путемъ получена проф. Ph. Forchheimer'омъ. Zeitsch. des Öster. Ing. und Arch. Ver. 1904.

этому, усилие N , постоянно растягивающее, т. е. направленное от сѣченія внаружу, будетъ имѣть моментъ, относительно новаго положенія центра сѣченія, отрицательный. Обратное будетъ при отрицательномъ M . Слѣдовательно добавокъ $N\eta$ уменьшаетъ опредѣленное въ (3) значеніе M и съ тѣмъ вмѣстѣ уменьшаетъ и величину η . Поэтому, если мы опредѣлимъ величину радіальнаго перемѣщенія исходя изъ выраженія (3) и по найденному η опредѣлимъ вліяніе момента $N\eta$, то этимъ мы преувеличимъ его значеніе и если оно будетъ пренебрежимо, то тѣмъ болѣе не стоитъ обращать вниманія на точное значеніе этой поправки.

Для опредѣленія деформаций трубы воспользуемся дифференціальнымъ уравненіемъ изогнутой оси.

$$\frac{d^3\eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{r_0^2 M}{EJ} \dots \dots \dots (B) 1)$$

гдѣ E и J обычные обозначенія коэф. упругости и момента инерціи.

Введя въ него выраженіе M по форм. (3), замѣнивъ r на r_0 , чѣмъ еще увеличимъ η , получимъ:

$$\frac{d^3\eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{\gamma r_0^5}{EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \omega - \frac{\omega}{2} \sin \omega \right).$$

Рѣшеніе этого уравненія, въ чемъ не трудно убѣдиться подстановкой,

$$\eta = \frac{\gamma r_0^5}{EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{16} \cos \omega - \frac{3}{8} \omega \sin \omega + \frac{\omega^3}{8} \cos \omega \right) - c_1 \cos \omega + c_2 \sin \omega.$$

Произвольныя постоянныя опредѣлимъ изъ условій, что $\frac{d\eta}{d\omega}$ должна быть равна нулю при $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$, такъ какъ послѣ деформаций труба должна остаться симметричной относительно вертикальнаго и горизонтальнаго діаметровъ. Изъ этихъ условій

$$c_2 = 0 \text{ и } c_1 = \frac{\gamma r_0^5}{EJ} \left(\frac{5}{16} + \frac{\pi^2}{32} \right).$$

По подстановкѣ найденныхъ значеній c_1 и c_2 въ η получимъ

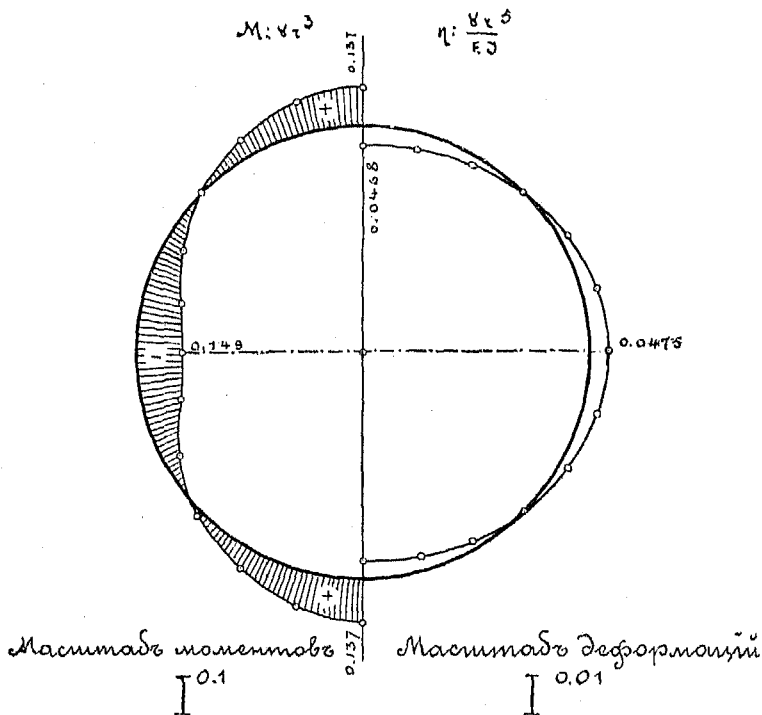
$$\eta = \frac{\gamma r_0^5}{EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{3}{8} \cos \omega - \frac{3}{8} \omega \sin \omega + \frac{\omega^3}{8} \cos \omega - \frac{\pi^2}{32} \cos \omega \right). \dots (4)$$

Подсчитанные по формуламъ (3) и (4) значенія M и η черезъ 15° приведены ниже въ таблицѣ и изображены на черт. 5.

1) При выводѣ этого уравненія въ правой части мы получили знакъ —. Вообще говоря здѣсь долженъ быть двойной знакъ $\pm$ и который изъ нихъ удержать въ каждомъ частномъ случаѣ зависитъ отъ принятыхъ за положительныя направленій M и η . Въ дальнѣйшемъ мы будемъ принимать для моментовъ M вращеніе по часовой стрѣлкѣ положительнымъ, въ ур. (B) обѣ части возьмемъ со знакомъ + и уже въ соотвѣтствіи съ этимъ выберемъ положительное направленіе для η .

ТАБЛИЦА I.

ω	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$M: \gamma r^3$	+0.1366	+0.1198	+0.0727	+0.0053	-0.0668	-0.1250	-0.1488
$\eta: \frac{\gamma r_0^5}{EJ}$	-0.0468	-0.0406	-0.0237	-0.0004	+0.0233	+0.0409	+0.0475



Черт. 5.

Выяснимъ теперь значеніе упомянутой выше поправки изгибающаго момента на частныхъ примѣрахъ.

Примѣръ 1. Труба водовода на гидроэлектрической станціи Ніагарскаго водопада. Діаметръ $11\frac{1}{2} \approx 3,36$ метр., радіусъ $r_0 = 168$ см. Толщина стѣнки $e = 2,85$ см. Труба желѣзная, клепанная. (Сидоровъ стр. 227). Какъ видно изъ вышеприведенной таблицы наибольшій изгибающій моментъ соотвѣтствуетъ $\omega = 90^\circ$, тамъ приблизительно

$$M = -0,149 \gamma r^3 = -0,149 \cdot 10^{-8} \cdot 4,74 \cdot 10^8 = -706 \text{ клг. см. } ^1).$$

¹⁾ При вычисленіи M и N мы r замѣнили на r_0 . Въ данномъ случаѣ это не имѣетъ значенія, т. к. $\frac{a}{r_0} \approx \frac{1}{60}$.

Въ этомъ сѣченіи нормальное усиліе по форм. (2)

$$N = 0,215 \gamma r^2 = 0,215 \cdot 10^{-3} \cdot 2,82 \cdot 10^4 = 6,06 \text{ клг.}$$

Радіальное перемѣщеніе по таблицѣ I

$$\eta = 0,0475 \frac{4,74 \cdot 10^6 \cdot 2,82 \cdot 10^4 \cdot 12}{10^3 \cdot 2,15 \cdot 10^6 \cdot 23,1} \approx 1,54 \text{ см.}$$

Моментъ $N\eta = 9,3$ клг. см., т. е. величина совершенно пренебрежимая сравнительно съ моментомъ M . Кромѣ того очевидно и на напряженія вызываемыя нормальными усиліями не стоитъ обращать вниманія. Дѣйствительно

$$\sigma_1 = \frac{N}{e} = \frac{6,06}{2,85} = 2,12 \text{ клг./см}^2.$$

тогда какъ

$$\sigma_2 = \frac{Mv_{max}}{J} = \frac{6M}{e^3} = \frac{6 \cdot 706}{8,12} = 522 \text{ клг./см}^2.$$

Примѣръ 2. Труба русскаго нормальнаго метрическаго сорта-мента чугунныхъ водопроводныхъ трубъ, раструбная, $d = 1200$ мм. $r = 60$ см., $e = 3$ см.

Опредѣляя M , N и η , какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, принявъ $E = 10^6$ клг./см.², получимъ

$$M = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 2,16 \cdot 10^6 = -32,2 \text{ кгр. см.}$$

$$N = 0,215 \cdot 10^{-3} \cdot 3,60 \cdot 10^3 = 0,77 \text{ кгр.}$$

$$\eta = \frac{2,33 \cdot 10^5 \cdot 3,78 \cdot 10^3 \cdot 12}{10^3 \cdot 10^6 \cdot 27} \cdot 0,0475 = 0,0185 \text{ см.}$$

Моментъ $N\eta = 0,77 \cdot 0,0185 = 0,0143$ кгр. см., т. е. совершенно ничтоженъ.

Напряженія, вызываемыя моментомъ M

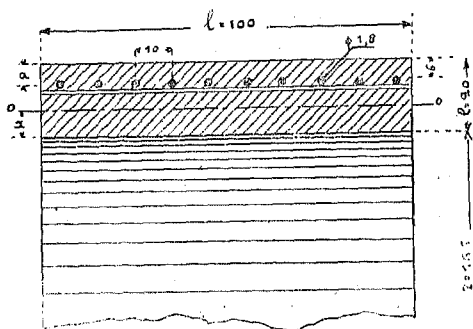
$$\sigma_2 = \frac{6 \cdot 32,2}{9} = 21,5 \text{ кгр./см}^2$$

Примѣръ 3. Водоводъ гидроэлектрической станціи въ Шамп, на рѣкѣ Драс (Франція). Желѣзо-бетонная труба. Внутренній радіусъ 165 см. Сѣченіе стѣнки изображено на черт. 6 на протяженіи 1 метра вдоль оси трубы. (Le Genie civil. Т. XLII. р. 52).

Опредѣлимъ положеніе нейтральной оси не принимая во вниманіе растянутого бетона.

Въ сѣченіи $\omega = 90^\circ$ растянуты наружныя волокна, сжаты — внутреннія. Обозначая разстояніе нейтральной оси отъ сжатого края черезъ x и при прочихъ обозначеніяхъ черт. 6 имѣемъ для опредѣ-

ленія x изъ уравненія суммы статическихъ моментовъ площадей относительно нейтральной оси



Черт. 6.

$$x = \frac{n f_{жс}}{l} \left[\sqrt{1 + \frac{2l(e-a)}{n f_{жс}}} - 1 \right]$$

Площадь желѣза $f_{жс} = 25,4 \text{ см.}^2$,
отношеніе коэффиц. упругости
желѣза и бетона $n = 15$, $a = 6$
см., $e = 20$ см. и $l = 100$ см.;
подставляя эти цифры, полу-
чимъ

$$x = \frac{15 \cdot 25,4}{100} \left[\sqrt{1 + \frac{200 \cdot 14}{15 \cdot 25,4}} - 1 \right] = 7,2 \text{ см.}$$

Что касается вычисленія изгибающаго момента, то здѣсь необходимо сдѣлать небольшую поправку. Принявъ для изгибающаго момента упрощенное выраженіе (3) мы, между прочимъ, пренебрегли разницей между радіусомъ внутренней поверхности трубы r и радіусомъ средней линіи r_0 . Такъ какъ $r_0 = r + \frac{e}{2}$, гдѣ e толщина стѣнки, то можно выразить r_0 въ зависимости отъ r такъ:

$$r_0 = r \left(1 + \frac{e}{2r} \right)$$

При $e:r = 1:20$, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, $r_0 = 1,025 r$ и слѣдовательно вычисленный нами изгибающій моментъ — 32,2 кгр. см. меньше истиннаго на 2,5%. Въ первомъ примѣрѣ ошибка еще меньше, такъ какъ тамъ $r_0 = 1,0085 r$. Даже при $\frac{e}{r_0} = \frac{1}{10}$ точность формулы (3) до 5%, т. е. примѣрно такова, какова точность (при этомъ-же $\frac{e}{r_0}$) гипотезы линейнаго закона распредѣленія напряженій. Изъ-за такой ошибки не стоитъ вводить поправокъ.

Въ послѣднемъ-же примѣрѣ отношеніе $\frac{e}{r_0}$ выходитъ изъ границъ примѣнимости какъ гипотезы линейнаго распредѣленія напряженій, такъ и упрощенной формулы (3) для вычисленія изгибающихъ моментовъ. Но при расчетѣ желѣзо-бетонныхъ конструкций, ввиду условностей этого расчета, которыя зависятъ отъ того, что мы имѣемъ дѣло съ совершенно неоднороднымъ матеріаломъ, позволительно примѣнять гипотезу линейнаго распредѣленія напряженій и не ограничиваясь отношеніемъ $\frac{e}{r_0} = \frac{1}{10}$ ради той простоты, которую она вноситъ, но моментъ по формулѣ (3) все-же слѣдуетъ исправить, замѣнивъ

множитель r^3 произведениемъ $r^2 r_0$, гдѣ подъ r_0 будемъ подразумѣвать радіусъ срединной линіи, т. е. въ данномъ примѣрѣ 175 см.

Итакъ, для $\omega = 90^\circ$

$$M = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 2,72 \cdot 10^4 \cdot 1,75 \cdot 10^2 = -710 \text{ кгр. см.}$$

$$\text{и } N = 0,215 \cdot 10^{-3} \cdot 2,72 \cdot 10^4 = 5,9 \text{ кгр.}$$

Изъ условій равенства моментовъ внутреннихъ и внѣшнихъ силъ найдемъ наибольшее напряженіе бетона на сжатіе

$$\sigma_0 = \frac{2M \cdot l}{lx \left(e - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 710}{7,2 \cdot 11,6} = 17 \text{ кгр./см.}^2$$

и среднее напряженіе желѣза на растяженіе

$$\sigma_{ж} = \frac{Ml}{I_{ж} \left(e - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{710 \cdot 100}{25,4 \cdot 11,6} = 241 \text{ кгр./см.}^2.$$

Напряженіе вызываемое нормальнымъ растягивающимъ усиліемъ N , даже если предположить, что оно воспринимается исключительно желѣзомъ будетъ

$$\sigma'_{ж} = \frac{Nl}{I_{ж}} = \frac{590}{25,4} = 23,2 \text{ кгр./см.}^2,$$

т. е. меньше $1/10$ величины напряженія вызываемаго изгибающимъ моментомъ; слѣдовательно и въ этомъ случаѣ можно ограничиться расчетомъ по одному лишь изгибающему моменту.

Изъ формулы (2) и (3) опредѣляющихъ N и M понятно, что съ увеличеніемъ радіуса трубы моменты возрастаютъ быстрѣ нормальныхъ усилій и, для нѣкотораго даннаго сѣченія, т. е. опредѣленнаго угла ω , пропорціонально этому радіусу; значитъ, съ тѣмъ большимъ основаніемъ можно пренебречь напряжениями вызываемыми нормальными усиліями, чѣмъ больше радіусъ трубы.

Для вычисленія деформаціи η въ послѣднемъ примѣрѣ; также какъ для вычисленія момента, надо въ таблицѣ I вмѣсто r_0^5 взять $r^2 r_0^3$, т. е. положить для $\omega = 90^\circ$

$$\eta = \frac{\gamma r^2 r_0^3}{EI} \cdot 0,0475.$$

Произведеніе $EI = E_0 [I_0 + n I_{ж}]$ найдемъ вычисливъ предварительно моменты инерціи площадей сѣченія бетона и желѣза I_0 и $I_{ж}$ для 1 пог. сантиметра сѣченія трубы

$$I_0 = \frac{20^3}{12} + 20 \cdot 2,8^2 = 824 \text{ см.}^4$$

$$I_{ж} = \frac{1}{10} [0,52 + 2,54 \cdot 6,8^2] = 11,8 \text{ см.}^4$$

относятся къ кольцу, выдѣленному изъ трубы сѣченіями, перпендикулярными къ ея оси, при ширинѣ кольца равной ед. длины. Число статически неопредѣлимыхъ здѣсь больше чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ: ихъ будетъ 2.

Выберемъ за статически неопредѣлимые нормальное усиліе N_0 и моментъ M_0 въ сѣченіи $\omega = 0$. Для опредѣленія ихъ опять воспользуемся выраженіемъ потенциальной энергіи (A), но упростимъ его сначала, отбросивъ слагаемое, зависящее отъ кривизны $\frac{1}{r_0}$. Вліяніе этого упрощенія уже выяснено.

Итакъ

$$D = \frac{r_0}{2E} \int_0^\pi \left(\frac{N^2}{e} + \frac{12 M^2}{e^3} \right) d\omega. \dots\dots\dots (A'')$$

Для опредѣленія выраженій N и M проектируемъ, по предыдущему, внѣшнія силы, дѣйствующія на дугу срединной линіи DE , на направленіе нормальнаго усилія N въ сѣченіи ω и суммируемъ моменты этихъ силъ относительно точки E . Изъ этихъ двухъ изъ условій равновѣсія получимъ

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \omega - P \cos \hat{P}\hat{N} \\ M &= -N_0 r_0 (1 - \cos \omega) - M_0 - Pp \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

и
гдѣ $P \cos \hat{P}\hat{N}$ и Pp означаютъ проекцію равнодѣйствующей силъ дѣйствующихъ между точками D и E на направленіе N и ея моментъ относительно точки E .

Замѣнивъ N и M въ выраженіи (A'') найденнымъ, получимъ:

$$D = \frac{r_0}{2E} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{e} (N_0 \cos \omega - P \cos \hat{P}\hat{N})^2 + \frac{12}{e^3} [-N_0 r_0 (1 - \cos \omega) - M_0 - Pp]^2 \right\} d\omega.$$

Приравнявъ производныя отъ потенциальной энергіи по статически неопредѣлимымъ N_0 и M_0 нулю, получимъ два уравненія для ихъ опредѣленія:

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^\pi \left\{ (N_0 \cos \omega - P \cos \hat{P}\hat{N}) \cos \omega - \right. \\ &\quad \left. - \frac{12r_0}{e^2} [-N_0 r_0 (1 - \cos \omega) - M_0 - Pp] (1 - \cos \omega) \right\} d\omega = 0 \\ &\int_0^\pi [-N_0 r_0 (1 - \cos \omega) - M_0 - Pp] d\omega = 0. \end{aligned} \right.$$

Упрощая первое изъ нихъ по второму и производя приведеніе:

$$\left\{ \begin{aligned} N_0 \int_0^\pi \left[\cos^3 \omega - \frac{12r_0^2}{e^2} (\cos \omega - \cos^3 \omega) \right] d\omega - \frac{12r_0}{e^2} M_0 \int_0^\pi \cos \omega d\omega - \\ - \int_0^\pi \left[P \cos \hat{P}N \cos \omega + \frac{12r_0}{e^2} Pp \cos \omega \right] d\omega = 0 \\ - N_0 r_0 \int_0^\pi (1 - \cos \omega) d\omega - M_0 \int_0^\pi d\omega - \int_0^\pi Pp d\omega = 0. \end{aligned} \right.$$

Выполняя возможные интегрированія:

$$\left. \begin{aligned} N_0 \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{12r_0^2}{e^2} \right] - \int_0^\pi \left[P \cos \hat{P}N \cos \omega + \frac{12r_0}{e^2} Pp \cos \omega \right] d\omega = 0 \\ - N_0 r_0 \pi - M_0 \pi - \int_0^\pi Pp d\omega = 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

Изъ перваго уравненія найдемъ N_0 и, подставивъ во второе, получимъ и M_0 .

Необходимо вычислить входящія въ уравненіе интегралы. Найдемъ выраженія подынтегральныхъ функцій въ зависимости отъ центральнаго угла ω .

Понятно, что благодаря присутствію наружнаго давленія лишь въ нижней половинѣ трубы, не существуетъ для этихъ функцій общаго выраженія, пригоднаго на всемъ протяженіи измѣненія ω отъ 0 до π . Для каждой ихъ будетъ два: первое—въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$ и второе—отъ $\frac{\pi}{2}$ до π . Соотвѣтственно этимъ предѣламъ разобьемъ и наши интегралы.

Найти эти функціи не представитъ никакихъ затрудненій:

При ω въ предѣлахъ отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$

$$P \cos \hat{P}N = \delta r_0 \omega \sin \omega$$

$$Pp = \int_0^\omega \delta r_0 d\psi \cdot r_0 (\sin \omega - \sin \psi) = \delta r_0^2 (\omega \sin \omega + \cos \omega - 1)$$

и въ предѣлахъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до π

$$P \cos \hat{P}N = \delta r_0 \omega \sin \omega - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 4\delta r_0 \cos \psi \sin (\omega - \psi) d\psi =$$

$$= \delta r_0 \omega \sin \omega - 4 \delta r_0 \left[\frac{1}{2} \sin \omega \sin \psi \cos \psi + \frac{\psi}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \sin^2 \psi \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} =$$

$$= \delta r_0 (\pi \sin \omega - 2 \cos \omega - \omega \sin \omega)$$

и

$$P_p = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \delta r_0 d\psi r_0 (\sin \omega - \sin \psi) - 4 \delta r_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} \cos \psi \sin (\omega - \psi) d\psi =$$

$$= \delta r_0^2 (\omega \sin \omega + \cos \omega - 1) - 4 \delta r_0^2 \left(\frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{\pi}{4} \sin \omega + \frac{1}{2} \cos \omega \right) =$$

$$= \delta r_0^2 (\pi \sin \omega - \omega \sin \omega - \cos \omega - 1)$$

Слѣдовательно искомые интегралы:

$$\int_0^{\pi} P \cos \hat{P} N \cos \omega d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta r_0 \omega \sin \omega \cos \omega d\omega +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \delta r_0 (\pi \sin \omega \cos \omega - 2 \cos^2 \omega - \omega \sin \omega \cos \omega) d\omega = - \delta r_0 \frac{\pi}{2} . \quad (I)$$

$$\int_0^{\pi} P_p \cos \omega d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta r_0^2 (\omega \sin \omega \cos \omega + \cos^2 \omega - \cos \omega) d\omega +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \delta r_0^2 (\pi \sin \omega \cos \omega - \omega \sin \omega \cos \omega - \cos^2 \omega - \cos \omega) d\omega = 0 . \quad (II)$$

$$\int_0^{\pi} P_p d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta r_0^2 (\omega \sin \omega + \cos \omega - 1) d\omega +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \delta r_0^2 (\pi \sin \omega - \omega \sin \omega - \cos \omega - 1) d\omega = \delta r_0^2 (4 - \pi) . \quad (III)$$

Подставляя (I) и (II) въ первое изъ уравненій (7) получимъ

$$N_0 = - \delta r_0 \frac{1}{1 + \frac{12 r_0^2}{e^2}} = - \delta r_0 \xi$$

обозначивъ черезъ ξ дробь $\frac{1}{1 + \frac{12r_0^2}{e^2}}$. Подставивъ найденное N_0 и (III)

во второе изъ уравненій (7) получимъ

$$M_0 = -\delta r_0^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 - \xi \right) = -\delta r_0^2 (0,2732 - \xi).$$

Добавокъ ξ , зависящій отъ присутствія въ выраженіи потенциальной энергіи слагаемаго, содержащаго нормальное усилие N , можетъ быть отброшенъ безъ ущерба для точности.

Дѣйствительно, вынося въ выраженіи M_0 за скобки $\frac{4}{\pi} - 1$, получимъ:

$$M_0 = -\delta r_0^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \left(1 - \frac{\xi}{\frac{4}{\pi} - 1} \right).$$

Дробь $\xi = \frac{1}{1 + \frac{12r_0^2}{e^2}}$ весьма не велика, при $\frac{r_0}{e} = 10$; $\frac{\xi\pi}{4-\pi}$ около 0,003, т. е. величина пренебрежимая сравнительно съ единицей.

Введя найденные M_0 , N_0 и выраженіе момента $\dot{P}r$ во второе изъ уравненій (6) получимъ формулу, служащую для вычисленія изгибающихъ моментовъ: въ предѣлахъ для ω отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, пренебрегая поправками

$$M_1 = \delta r_0^2 \left(\frac{4}{\pi} - \omega \sin \omega - \cos \omega \right) \dots \dots \dots (8)$$

и при томъ же условіи, отъ $\frac{\pi}{2}$ до π

$$M_2 = \delta r_0^2 \left(\frac{4}{\pi} - \pi \sin \omega + \omega \sin \omega + \cos \omega \right) \dots \dots \dots (9)$$

Если изгибающій моментъ M_2 мы выразимъ въ зависимости отъ угла ω_1 , дополняющаго ω до 180° , то получимъ формулу тождественную съ (8)

$$M_2 = \delta r_0^2 \left(\frac{4}{\pi} - \omega_1 \sin \omega_1 - \cos \omega_1 \right).$$

Слѣдовательно изгибающіе моменты въ верхнемъ и нижнемъ квадрантахъ симметричны.

Затѣмъ, если мы сравнимъ (8) съ выраженіемъ изгибающаго момента отъ давленія воды (3), то увидимъ, что въ этихъ двухъ формулахъ многочлены, стоящіе въ скобкахъ, отличаются лишь множителемъ 2 и слѣдовательно для любого значенія угла ω изгибающій моментъ отъ собственнаго вѣса трубы можно получить по изгибающему моменту отъ вѣса воды простымъ умноженіемъ его на нѣко-

торый коэффициентъ. При расчетѣ трубы придется имѣть дѣло съ одновременнымъ дѣйствіемъ этихъ двухъ нагрузокъ, такъ какъ это болѣе невыгодный случай. Воспользуемся указанной выше связью чтобы исправить допущенную нами въ формулѣ (3) ошибку отъ замѣны произведенія $r^2 r_0$ черезъ r_0^3 .

Изгибающій моментъ отъ давленія воды съ достаточной точностью выражается такъ:

$$M_1 = \gamma r^2 r_0 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \right).$$

Изгибающіи моментъ отъ собственнаго вѣса трубы

$$M_2 = \delta r_0^3 \left(\frac{4}{\pi} - \omega \sin \omega - \cos \omega \right).$$

Вѣсъ δ въ зависимости отъ вѣса матеріала трубы γ_1 и толщины стѣнки e : $\delta = e \gamma_1$ и слѣдовательно сумма вышеуказанныхъ моментовъ

$$\mathfrak{M} = \gamma r^2 r_0 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \right) \left[1 + \frac{2 \gamma_1 e r_0^2}{\gamma r^2 r_0} \right].$$

Если мы въ этой формулѣ замѣнимъ r на r_0 , то съ одной стороны мы увеличимъ $\mathfrak{M}$, увеличивъ множитель стоящій внѣ скобокъ, съ другой уменьшимъ, уменьшивъ множитель стоящій въ прямыхъ скобкахъ. Вліяніе на точность этихъ двухъ взаимно компенсирующихся ошибокъ не велико, а формула значительно упрощается

$$\mathfrak{M} = \gamma r_0^3 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \right) \left(1 + \frac{2 \gamma_1 e}{\gamma r_0} \right) . . . (10)$$

Для тонкостѣнныхъ трубъ моменты, вычисляемые по этой формулѣ будутъ нѣсколько больше дѣйствительныхъ.

Напримѣръ для желѣзной трубы среднимъ радіусомъ $r_0 = 100$ см. и толщиной стѣнки $e = 10$ см., т. е. при $\frac{r_0}{e} = 10$ наибольшіе изгибающіе моменты:

отъ давленія воды

$$M_1 = -0,149 \gamma r^2 r_0 = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 9,03 \cdot 10^3 \cdot 100 = -139 \text{ кгр. см.}$$

отъ собственнаго вѣса

$$M_2 = -0,298 \gamma_1 e r_0^3 = -0,298 \cdot 0,00785 \cdot 10 \cdot 10^4 = -234 \text{ » »}$$

Сумма изгіб. мом. — 373 кгр. см.

Изгибающій моментъ по формулѣ (10), при $\omega = 90^\circ$

$$\mathfrak{M} = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \left(1 + \frac{7,85 \cdot 10 \cdot 2}{100} \right) = -382 \text{ кгр. см.}$$

т. е. больше чѣмъ выше опредѣленный, примѣрно на $2,5\%$.

Для той же трубы при $e = 2$ см., т. е. при $\frac{r_0}{e} = 50$ отъ давленія воды

$$M_1 = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 10^3 \cdot 100 = -146 \text{ кгр. см.}$$

отъ собственного вѣса

$$M_2 = -0,298 \cdot 0,00785 \cdot 2 \cdot 10^4 = -46,8 \text{ » »}$$

Сумма изгиб. мом. — 192,8 кгр. см.

Изгибающій моментъ по формулѣ (10)

$$M = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \left(1 + \frac{2 \cdot 7,85 \cdot 2}{100} \right) = -195,8 \text{ кгр. см.}$$

т. е. больше суммы изгибающихъ моментовъ примѣрно на 1,5%.

Изъ этихъ примѣровъ видно, что точность формулы (10) вполне удовлетворительна. Для опредѣленія деформаций отъ совмѣстнаго дѣйствія вѣса воды и собственного можно пользоваться данными таблицы I; цифры тамъ указанныя придется множить при вычисленіи η на $\frac{\gamma r_0^5}{EJ} \left[1 + \frac{2\gamma_1 e}{\gamma r_0} \right]$.

Примѣръ 4. Опредѣлимъ наибольшее напряженіе въ стальной клепанной трубѣ безнапорнаго водовода, соединявшей два резервуара на гидроэлектрической станціи Ballevili (около Fremont) въ штатѣ Ohio (см. примѣръ 21 и черт. 18). Диаметръ трубы 14'. Толщина стѣнки $\frac{5}{16}$ ". Труба усилена кольцами изъ уголковъ $6 \times 4 \times \frac{3}{8}$ " черезъ каждые $6-8\frac{1}{2}$ ". Уголки короткой полкой приклепаны къ трубѣ (Engineering News. 1913. May 1). Внутреннее равномерное давленіе не указано, но оно было очень мало).

Расчитаемъ участокъ трубы ¹⁾, длиною равный разстоянію между кольцами ≈ 2 метра. Моментъ инерціи сѣченія стѣнки и уголка на этомъ протяженіи ≈ 1236 см⁴. Моменты сопротивленія $W_1 = 84$ см³ и $W_2 = 1080$ см³. Наибольшій изгибающій моментъ по формулѣ (10) при $\omega = 90^\circ$

$$M = -0,149 \gamma r_0^3 \left(1 + \frac{2\delta}{\gamma r_0} \right).$$

Вмѣсто r_0 введемъ разстояніе отъ оси трубы до нейтральной оси сѣченія стѣнки. въ данномъ случаѣ (см. черт. 18) $r_0 \approx 214$ см.

Вѣсъ δ вычислимъ принявъ во вниманіе лишь вѣсъ стѣнки, такъ какъ вѣсъ усиливающаго кольца, для опредѣленія δ , надо будетъ дѣлать на 200 (длина расчетнаго участка) и этой величиной можно пренебречь:

$$\delta = e\gamma_1 = 0,8 \cdot 0,00785 = 0,0063.$$

¹⁾ Расчетъ этотъ приближительный, такъ какъ очевидно, что разныя сѣченія трубы на протяженіи 2-хъ-метроваго участка находятся далеко не въ равныхъ условіяхъ.

Слѣдовательно на пог. сант. трубы

$$\mathfrak{M}_1 = - 0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 6,30}{214}\right) = - 1546 \text{ кгр. см.}$$

На участокъ трубы длиной 200 см.

$$\mathfrak{M} = - 309000 \text{ кгр. см.}$$

Наибольшее растягивающее напряженіе на наружномъ концѣ полки уголка

$$\sigma = \frac{309000}{84} = 3670 \text{ кгр./см}^2$$

Напряженіе совершенно недопустимое; понятно, что труба должна была разрушиться при заполненіи водой, что съ ней на самомъ дѣлѣ и случилось.

При этихъ расчетахъ мы игнорировали нормальныя усилія. Но, какъ мы уже видѣли на примѣрахъ при расчетѣ трубъ подъ давленіемъ вѣса воды, оно не играетъ никакой роли. Собственный вѣсъ трубы даетъ нормальное усиліе тоже очень небольшое да при томъ еще обратнаго знака.

Напримѣръ для расчитанной раньше трубы Ниагарской турбинной станціи мы нашли, что отъ давленія воды нормальное растягивающее усиліе $N = 6,06$ кгр. Нормальное усиліе отъ собственнаго вѣса можно вычислить по формулѣ (6) при чемъ N_0 можно положить равнымъ нулю, тогда для ω не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$N = - \delta r_0 \omega \sin \omega.$$

Для $\omega = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$,

$$N = - \delta r_0 \cdot 1,5708 = - 1,5708 \cdot 0,00785 \cdot 2,85 \cdot 168 = - 5,9 \text{ кгр.}$$

Слѣдовательно суммарное $N = 0,16$ кгр., т. е. практически нуль.

3. Внутреннее равномерное давленіе.

Разсмотрѣнныя въ предыдущемъ нагрузки встрѣчаются въ трубахъ самотечныхъ водоводовъ, т. е. ведущихъ воду безъ напора. Если при томъ же способѣ укладки трубы поверхъ земли вода въ ней будетъ находиться подъ нѣкоторымъ давленіемъ въ $\frac{1}{2}$ атмосферъ ¹⁾, то прибавится еще нагрузка, нормальная и равномерно распределенная по внутренней поверхности трубы. Если-бы форма сѣченія трубы оставалась круглой, то къ вычисленнымъ выше моментамъ

¹⁾ Подъ $\frac{1}{2}$ мы подразумѣваемъ равномерно распределенное по срединной линіи давленіе. Оно меньше давленія на внутренней поверхности трубы въ отношеніи $\frac{r_e}{r_0}$.

и усилямъ въ каждомъ сѣченіи трубы прибавилось бы растягивающее усилие N , равное, въ зависимости отъ средняго радіуса трубы и давленія, kr_0 . Напряженія отъ этого усилія можно было бы просто суммировать съ напряжениями, вызываемыми вѣсомъ воды и собственнымъ вѣсомъ трубы. Но въ данномъ случаѣ дѣло обстоитъ вовсе не такъ просто: какъ было показано при разсмотрѣніи вліянія вѣса воды тамъ можно было пренебречь вліяніемъ деформаци и составлять уравненія равновѣсія для круглой трубы, такъ какъ эти уравненія для деформированной и не деформированной трубъ отличались бы весьма незначительно: моментъ нормальнаго усилія $N\eta$ былъ малъ благодаря малости N и малости η . На тѣхъ же основаніяхъ мы примѣнили это къ вліянію собственного вѣса трубы и къ совокупности этой нагрузки и вѣса воды. Если труба содержитъ воду, находящуюся подъ нѣкоторымъ давленіемъ, то нормальныя усилія N не будутъ уже малы и моментъ $N\eta$ приобретаетъ значеніе, пренебреженіе которымъ приведетъ къ неправильнымъ заключеніямъ. Усиліе N въ этомъ случаѣ будетъ растягивающимъ, по нашимъ обозначеніямъ, положительнымъ; такъ какъ η и M , какъ видно изъ табл. I, противоположныхъ знаковъ, то значить и моменты M и $N\eta$ будутъ тоже разныхъ знаковъ какъ это и было, болѣе подробно, выяснено раньше. Если бы мы попросту сложили напряжения, вызываемыя равномернымъ давленіемъ k атмосферъ въ круглой трубѣ съ напряжениями отъ нагрузокъ сплюсывающихъ ее, то значить, мы пренебрегли бы вліяніемъ этого полезнаго для трубы момента, который иногда оказывается настолько, значительнымъ, что увеличеніе давленія k до нѣкоторой величины не только не повышаетъ напряженій, но даже ихъ понижаетъ.

Внутреннее давленіе, такъ сказать, сообщаетъ тонкостѣнной трубѣ недостающую ей жесткость.

Такъ какъ въ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ намъ придется имѣть дѣло только съ радіусомъ r_0 , то опустимъ значекъ 0 и подъ r будемъ подразумѣвать радіусъ срединной линіи.

Кромѣ того пренебрежемъ еще нормальными усилями N отъ вѣса воды и собственного вѣса трубы не имѣющими большого значенія и подъ нормальнымъ усиломъ N будемъ подразумѣвать лишь одно растягивающее, вызываемое равномернымъ давленіемъ k .

Итакъ, мы будемъ разсматривать кольцо единичной длины, выдѣленное изъ трубы, сплюсненной вѣсомъ воды и вѣсомъ ея стѣнокъ, которые вызываютъ изгибающіе моменты

$$M = \gamma r^3 \mu \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \right) (10)$$

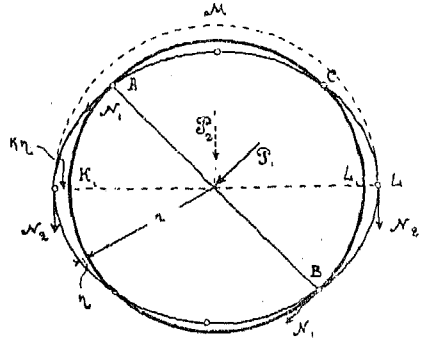
гдѣ $\mu = 1 + \frac{2\gamma_1 c}{\gamma r}$, сплюсненной такъ, что уравненіе изогнутой стѣнки

$$\eta = \frac{\gamma r^5}{EJ} \mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{8} \cos \omega - \frac{3}{8} \omega \sin \omega + \frac{\omega^2}{8} \cos \omega - \frac{\pi^2}{32} \cos \omega \right) . . . (4')$$

При этомъ, какъ деформаци, такъ и моменты симметричны относительно вертикальной и горизонтальной осей сплющенного сѣченія.

Положимъ, что на сплющенное кольцо дѣйствуетъ внутреннее равномерное и нормальное къ поверхности давление k .

Сравнимъ двѣ половины кольца ACB , сплющенную (черт. 8) и полуокруглую между общими ихъ точками A и B . Сила, уравновѣшивающая нормальное къ внутренней поверхности кольца давление для обѣихъ будетъ P_1 , перпендикулярная къ AB . Для круглой трубы она разлагается на двѣ параллельныя ей составляющія N_1 , приложенныя къ центрамъ сѣченій стѣнокъ кольца. Деформированное полукольцо сплющено односторонне относительно AB , но положеніе составляющихъ силъ для него будетъ тоже самое. Казалось бы, что онѣ будутъ направлены по касательнымъ къ изогнутой оси, т. е. повернуты относительно первоначальнаго положенія на одинаковый уголъ, но это невозможно, т. к. ихъ равнодѣйствующей остается та-же сила P_1 . Итакъ, для точекъ общихъ для деформированнаго и круглаго кольца нормальныя усилія N не измѣняются ни по величинѣ, ни по направленію.



Черт. 8.

Если мы рассмотримъ половину сплющенного кольца KLM , гдѣ точки K и L не являются общими съ круглымъ кольцомъ, то, построивъ на KL , какъ на діаметрѣ, полуокружность, убѣдимся, что и въ этомъ случаѣ направленіе силъ N_2 будетъ одинаковое (параллельное) съ соотвѣтствующими силами для круглаго кольца. Величина ихъ будетъ нѣсколько иная

$$N_2 = (r + \eta) k.$$

Для опредѣленія момента, вызываемаго внутреннимъ равномернымъ давлениемъ, надо усиліе N множить на плечо, которымъ въ данномъ случаѣ будетъ соотвѣтствующее η . Напримѣръ для точки K

$$N_2 \eta = kr\eta + \frac{k\eta^2}{2} = kr\eta \left(1 + \frac{\eta}{2r} \right)$$

потому что каждое усиліе N_2 имѣетъ своими составляющими силы kr и $k\eta$. Плечи ихъ относительно точки K для первой η , а для второй $\frac{\eta}{2}$. Но по малости η можно пренебречь отношеніемъ его къ діаметру сравнительно съ единицей.

Итакъ, въ случаѣ присутствія внутренняго равномернаго давленія къ моменту $\mathfrak{M}$ по формулѣ (10) прибавится въ каждомъ сѣченіи моментъ $N\eta = kr\eta$.

Уравненіе (4') не пригодно для этого случая. Для опредѣленія истиннаго значенія радіальнаго перемѣщенія η надо рѣшить измѣненное соотвѣтствующимъ образомъ уравненіе (B)

$$\frac{d^2\eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{r^2}{EJ} (\mathfrak{M} + N\eta) \dots\dots\dots (B')$$

гдѣ $\mathfrak{M}$ опредѣляется формулой (10), т. е.

$$\frac{d^2\eta}{d\omega^2} + A\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \right) \text{ при } A = 1 - \frac{kr^3}{EJ} \dots\dots\dots (B'')$$

Рѣшеніе этого уравненія будутъ различны въ зависимости отъ знака коэффиціента A при η . Предѣльное положительное значеніе этого коэффиціента $+1$, онъ можетъ быть равенъ нулю и затѣмъ, теоретически, можетъ принимать произвольныя отрицательныя значенія; теоретически потому, что при большихъ отрицательныхъ значеніяхъ A давленіе k и толщина стѣнокъ трубы будутъ таковы, что напряженія окажутся значительно больше предѣла упругости, т. е. внѣ тѣхъ границъ, въ которыхъ мы разсматривали все явленіе. Мы не будемъ останавливаться на подробномъ изслѣдованіи рѣшеній уравненія (B'') при разныхъ значеніяхъ A , потому что при обычно встрѣчающихся въ практикѣ условіяхъ коэффиціентъ $A < -1$ и, какъ это будетъ видно изъ дальнѣйшаго, точныя рѣшенія (B'') по ихъ сложности не удобны для практическаго примѣненія и изслѣдованія и мы ихъ замѣнимъ болѣе удобнымъ приближеннымъ способомъ.

Если $A = 1 - \frac{kr^3}{EJ} < 0$ общимъ интеграломъ ур. (B'') будетъ

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{2}{\pi A} + \frac{1}{2(1-A)} \omega \sin \omega + \frac{3-A}{2(1-A)^2} \cos \omega + c_1 e^{\omega \sqrt{1-A}} - c_2 e^{-\omega \sqrt{1-A}} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

гдѣ e есть основаніе натуральныхъ логарифмовъ.

Опредѣляя постоянныя c_1 и c_2 изъ условій, что и при равномерномъ внутреннемъ давленіи $\frac{d\eta}{d\omega} = 0$ при $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$ получимъ

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{(1-A)^2 \sqrt{1-A} \left(e^{\frac{\pi \sqrt{1-A}}{2}} - e^{-\frac{\pi \sqrt{1-A}}{2}} \right)}$$

и слѣдовательно

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{2}{\pi A} + \frac{\omega \sin \omega}{2(1-A)} + \frac{3-A}{2(1-A)^2} \cos \omega + \right. \\ \left. + \frac{e^{\omega \sqrt{1-A}} + e^{-\omega \sqrt{1-A}}}{(1-A)^2 \sqrt{1-A} \left(e^{\frac{\pi \sqrt{1-A}}{2}} - e^{-\frac{\pi \sqrt{1-A}}{2}} \right)} \right\} \dots \dots (12)$$

Понятно, что не смотря на присутствіе внутренняго давленія, наибольшія значенія изгибающаго момента, какъ и раньше, будутъ въ сѣченіяхъ $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$. Это видно хотя бы уже изъ того, что этимъ ω соотвѣтствуютъ наибольшія значенія деформации η .

Для этихъ ω получимъ изъ (12): при $\omega = 0$

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{2}{\pi A} + \frac{3-A}{2(1-A)^2} + \frac{1}{(1-A)^2 \sqrt{1-A} \sin h \left(\frac{\pi \sqrt{1-A}}{2} \right)} \right\} \dots (13)$$

При $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{2}{\pi A} + \frac{\pi}{4(1-A)} + \frac{\cos h \frac{\pi \sqrt{1-A}}{2}}{(1-A)^2 \sqrt{1-A} \sin h \frac{\pi \sqrt{1-A}}{2}} \right\} \dots (14)$$

Формулы эти довольно сложны и не очень удобны для практическаго употребленія потому, что слагаемыя, стоящія въ скобкахъ выражаются при малыхъ A многозначными числами, сумма же ихъ во всякомъ случаѣ должна быть меньше соотвѣтствующихъ чиселъ таблицы I, т. е. меньше 0,0475 для $\omega = \frac{\pi}{2}$. Благодаря этому, вычисленія приходится вести съ 5 и болѣе цифрами. что довольно утомительно.

Примѣръ 5. Труба водовода гидроэлектрической станціи Ніагарскаго водопада. Давленіе $210 \sim 6,4$ атмосферы. Остальныя данныя въ примѣрѣ 1.

$$A = 1 - \frac{kr^3}{EJ} = 1 - \frac{6,4 \cdot 168^3 \cdot 12}{2,15 \cdot 10^8 \cdot 2,85^3} = - 6,317.$$

Примѣняемъ формулы (13) и (14):

$$\frac{\pi \sqrt{1-A}}{2} = \frac{3,1416 \cdot 2,5134}{2} = 3,948;$$

По таблицамъ гиперболическихъ синусовъ и косинусовъ

$$\sin h 3,948 = 25,906 \quad \text{и} \quad \cos h 3,948 = 25,925$$

Для $\omega = 0$ по форм. (13)

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{-2}{3,1416 \cdot 6,317} + \frac{9,317}{2 \cdot 7,317^2} + \frac{1}{7,317^2 \cdot 2,5134 \cdot 25,906} \right\} =$$

$$= \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ -0,1008 + 0,0870 + 0,0003 \right\} = -0,0135 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}.$$

Для $\omega = \frac{\pi}{2}$ по форм. (14)

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ -\frac{2}{3,1416 \cdot 6,317} + \frac{3,1416}{4 \cdot 7,317} + \frac{25,925}{7,317^2 \cdot 2,5134 \cdot 25,906} \right\} =$$

$$= \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ -0,1008 + 0,1073 + 0,0074 \right\} = 0,0139 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}.$$

Для этого примѣра (примѣръ 1) было вычислено $\eta = 1,54$ см. по формулѣ $\eta = 0,0475 \frac{\gamma r^5}{EJ}$, слѣдовательно въ данномъ случаѣ при

$$\mu = 1 + 2 \frac{\gamma_1 e}{\gamma r} = 1 + 2 \frac{7,85 \cdot 2,85}{168} = 1,266$$

для $\omega = 0$, $\eta = 1,54 \cdot \frac{135}{475} \cdot 1,266 = 0,55$ см.

и для $\omega = 90^\circ$ $\eta = 1,54 \cdot \frac{139}{475} \cdot 1,266 = 0,571$ см.

Теперь можно опредѣлить наибольшія напряжения, вызываемыя въ этихъ сѣченіяхъ совиѣстнымъ дѣйствіемъ вѣса воды и трубы и внутреннимъ давленіемъ. Такъ какъ изгибающій моментъ отъ одного лишь дѣйствія вѣса воды для $\omega = 90^\circ$ былъ вычисленъ равнымъ — 706 кгр. см. по формулѣ $M_1 = -0,149 \gamma r^3$, то при тѣхъ-же условіяхъ для $\omega = 0$, $M_2 = 0,137 \gamma r^3 = 649$ кгр. см., а отъ совиѣстнаго дѣйствія вѣса воды и трубы и давленія для:

$$\omega = 0 \quad M = 649 \cdot \mu - 0,55 \cdot 6,4 \cdot 168 = 231 \text{ кгр. см.}$$

$$\omega = 90^\circ \quad M = -706 \cdot \mu + 0,571 \cdot 6,4 \cdot 168 = -280 \text{ кгр. см.}$$

Наибольшія растягивающія напряжения въ этихъ сѣченіяхъ

$$\omega = 0 \quad \sigma = \frac{N}{e} + \frac{6M}{e^2} = \frac{6,4 \cdot 168}{2,85} + \frac{6 \cdot 231}{8,12} = 548 \text{ кгр./см}^2.$$

$$\omega = 90^\circ \quad \sigma = 377 + \frac{6 \cdot 280}{8,12} = 584 \text{ кгр./см}^2.$$

Если-бы мы вычисляли напряжения отъ сплющиванія и растяженія простымъ сложениемъ напряженій, то получили бы на примѣръ для

$$\omega = 90^\circ \quad \sigma = 377 + \frac{6 \cdot 706 \cdot 1,266}{8,12} = 377 + 660 = 1037 \text{ кгр. см}^2.,$$

т. е. почти вдвое больше выше опредѣленнаго.

Примѣръ 6. Водоводъ города Duluth. (Сидоровъ стр. 221).
Напоръ $h = 290 \sim 8,8$ атм. $d = 42$ ", $r \sim 53$ см. Толщина стѣнки
стальной клепанной трубы $e = 1,27$ см,

$$A = 1 - \frac{kr^3}{EJ} = 1 - \frac{8,8 \cdot 53^3 \cdot 12}{2,2 \cdot 10^6 \cdot 1,27^3} = -2,4888.$$

Вычислимъ η для $\omega = 90^\circ$. Примѣнимъ формулу (14)

$$\frac{\pi \sqrt{-A}}{2} = \frac{3,1416 \cdot 1,5776}{2} = 2,4781;$$

$$\sin h \, 2,4781 = 5,9183; \cos h \, 2,4781 = 6,0023$$

$$\eta = \frac{\gamma r^6 \mu}{EJ} \left\{ -\frac{2}{3,1416 \cdot 2,4888} + \frac{3,1416}{4 \cdot 3,4888} + \frac{6,0023}{12,1717 \cdot 1,5776 \cdot 5,9183} \right\} =$$

$$= \frac{\gamma r^6 \mu}{EJ} \left\{ -0,2558 + 0,2251 + 0,0528 \right\} = 0,0221 \frac{\gamma r^6 \mu}{EJ}.$$

Изгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи по таблицѣ I

$$M = -0,149 \gamma r^3 = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 149 \cdot 10^3 = -22,2 \text{ кгр. см.}$$

$$\mu = 1 + 2 \cdot \frac{7,85 \cdot 1,27}{53} = 1,376.$$

Суммарный изгибающій моментъ отъ вѣса воды и трубы

$$M = -22,2 \cdot 1,376 \sim -30,5 \text{ кгр. см.}$$

Радіальное перемѣщеніе

$$\eta = 0,0221 \frac{149 \cdot 10^3 \cdot 28 \cdot 10^3 \cdot 1,376 \cdot 12}{10^3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 2,05} = 0,0339 \text{ см.}$$

Слѣдовательно въ этомъ сѣченіи изгибающій моментъ отъ сплюсчивающихъ силъ и равномернаго внутренняго давленія

$$M = -30,5 + 8,8 \cdot 53 \cdot 0,0339 = -30,5 + 15,8 = -14,7 \text{ кгр. см.}$$

и наибольшее растягивающее напряженіе

$$\sigma = \frac{8,8 \cdot 53}{1,27} + \frac{14,7 \cdot 6}{1,61} = 367 + 55 = 422 \text{ кгр./см.}^2$$

Изъ этихъ примѣровъ видно, что моментъ отъ равномернаго внутренняго давленія составляетъ замѣтную величину, понижающую вліяніе сплющиванія, но сдѣлать съ помощью даже и нѣсколькихъ примѣровъ какіе либо выводы о вліяніи этого давленія на напряженія въ разныхъ случаяхъ трудно, т. к. оно зависитъ и отъ толщины стѣнки трубы, и отъ величины давленія, и отъ матерьяла стѣнокъ. Ввиду этого обратимся къ приближенному способу опредѣленія вліянія внутренняго давленія, предложенному проф. Форшхеймеромъ. Основанъ онъ на слѣдующемъ.

Если между изгибающими моментами $\mathfrak{M}$ сплюснвшими трубу, и соответствующими деформациями η существует постоянное отношение, то влияние внутреннего давления выражается очень просто. Благодаря его присутствию, какъ деформации, такъ и моменты уменьшаются и при томъ всё въ одинаковомъ отношеніи. Дѣйствительно: положимъ, что для сплюсненной трубы $\eta = \alpha \mathfrak{M}$ гдѣ α нѣкоторая постоянная, не зависящая отъ ω величина. Если отъ какой либо причины въ этой трубѣ всё изгибающіе моменты уменьшатся въ нѣкоторомъ отношеніи и вмѣсто $\mathfrak{M}$ мы будемъ имѣть $M = \xi \mathfrak{M}$, то по дифференціальному уравненію изогнутой оси $\frac{d^2 \eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{r^2 M}{EJ}$ въ точно такомъ отношеніи измѣнятся и деформации, вмѣсто η будутъ $\xi \eta$. Уменьшеніе изгибающихъ моментовъ на величину $\mathfrak{M} (1 - \xi)$ можетъ быть вызвано силами N , которыя мы въ каждомъ сѣченіи приложимъ на плечѣ $\xi \eta$, такъ что ихъ моменты будутъ $N \xi \eta$. Эти одинаковыя во всѣхъ сѣченіяхъ силы могутъ быть вызваны равномернымъ внутреннимъ давленіемъ, Приравнивая измѣненія изгибающихъ моментовъ, получимъ $\mathfrak{M} (1 - \xi) = - N \xi \eta$ откуда

$$\xi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} - N \xi} = \frac{1}{1 - \frac{\eta}{\mathfrak{M}} N} = \frac{1}{1 - \alpha N}.$$

Но $\alpha = \frac{\eta}{\mathfrak{M}} = - \frac{\nu r^5 \mu F}{EJ \cdot \gamma r^3 \Psi} = - \frac{r^2}{EJ} \beta$, гдѣ F и Ψ нѣкоторыя функціи отъ ω , а β ихъ отношенія, по условію отъ ω не зависящее. Введя это выраженіе α , а также и $N = kr$, гдѣ k напряженіе давленія, въ формулу ξ получимъ

$$\xi = \frac{EJ}{EJ + kr^3 \beta} \dots \dots \dots (15)$$

Умноженіемъ деформаций η и моментовъ $\mathfrak{M}$ сплюсненной трубы на этотъ коэффиціентъ получимъ деформации и моменты въ сплюсненной и растягиваемой внутреннимъ давленіемъ трубѣ.

Примѣнимъ это къ случаю сплюснванія трубы собственнымъ вѣсомъ и вѣсомъ воды. Коэффиціентъ β найдемъ дѣленіемъ чиселъ, данныхъ въ таблицѣ I.

$\omega = 0^\circ$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\beta = 0,3426$	$0,3389$	$0,3077$	$0,0755$	$0,3488$	$0,3272$	$0,3192$

Какъ видно β можно принять приблизительно равнымъ $\frac{1}{3}$, т. е. въ этомъ случаѣ

$$\xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} \dots \dots \dots (16)^1$$

¹⁾ Въ томъ случаѣ, когда сплюсненная труба сжималась бы равномернымъ вѣншимъ давленіемъ, напряженія отъ изгиба и деформации увеличились и для ξ мы нашли-бы вмѣсто (16) $\xi = \frac{3EJ}{3EJ - kr^3}$.

При $kr^3 = 3EJ \dots \xi$ обратилось бы въ ∞ , что вполнѣ соответствуетъ выведенной раньше формулѣ критическаго давленія $k = \frac{3EJ}{r^3}$.

Сравнительное вычисление деформации η по этому способу и по форм (14) показываетъ, что умноженная на ξ величина деформации η въ отсутствіе внутренняго давленія будетъ, вообще, меньше вычисленной по форм. (14) для значеній A обычно встрѣчающихся въ практикѣ (отъ 0 до -20) примѣрно на $2^{0.5}/u$. Однако, имѣя ввиду, что предполагая растягивающія напряженія отъ внутренняго давленія равномерно распределенными въ сѣченіи стѣнки, мы дѣлаемъ зачастую ошибку не меньшую этой, съ ней можно помириться ради той простоты, которую этотъ способъ вноситъ въ расчетъ.

Опредѣлимъ по этой формулѣ деформации η для двухъ предыдущихъ примѣровъ.

Примѣръ 7. Труба водовода гидроэлектрической станціи Ніагарскаго водопада. Какъ было тамъ вычислено: $\frac{kr^3}{EJ} = 7,317$; по форм. (16)

$$\xi = \frac{3}{3 + 7,317} = 0,291.$$

Слѣдовательно для:

$$\omega = 0 \quad \eta = -0,0468 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \xi = -0,0136 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$$

$$\text{и} \quad \omega = 90^\circ \quad \eta = 0,0475 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \xi = 0,0138 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}.$$

Какъ видно, погрѣшности въ опредѣленіи η весьма не велики: при точномъ ихъ вычисленіи мы нашли — 0,0135 и 0,0139.

Примѣръ 8. Труба водовода города Duluth.

Для этого случая $\frac{kr^3}{EJ} = 3,489$.

$$\text{Слѣдовательно} \quad \xi = \frac{3}{3 + 3,489} = 0,462$$

и пользуясь данными таблицы I для $\omega = 90^\circ$:

$$\eta = 0,0475 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \xi = 0,0219 \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}.$$

И въ этомъ случаѣ оиибка не велика. Было точно вычислено 0,0221.

Воспользуемся формулой (16), чтобы выяснитъ, какъ вліяютъ различные факторы на напряженія въ присутствіи внутренняго давленія.

Наибольшее напряженіе вообще выражается формулой

$$\sigma = \frac{M_{v_{max}}}{J} + \frac{N}{\omega},$$

гдѣ $\sigma_1 = \frac{M_{v_{max}}}{J}$, напряженіе вызываемое изгибомъ и $\frac{N}{\omega} = \frac{kr}{\omega}$ равномернымъ внутреннимъ давленіемъ.

Такъ какъ въ присутствіи внутренняго давленія изгибающіе мо-

менты можно получить по формулѣ (10) умноженіемъ на ξ , то слѣдовательно

$$\sigma_1 = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} \mathfrak{M}v_{max} = \frac{3E}{3EJ + kr^3} \mathfrak{M}v_{max}.$$

Второе слагаемое въ выраженіи наибольшаго напряженія не зависитъ ни отъ коэффиціента упругости, ни отъ момента инерціи, поэтому вліяніе этихъ факторовъ надо выяснитъ лишь на напряженіе σ_1 отъ изгиба.

Легко убѣдиться, что σ_1 возрастаетъ съ увеличеніемъ коэффиціента упругости матеріала стѣнокъ трубы. Производная отъ σ_1 по E будетъ положительна. Это понятно, такъ какъ при большемъ коэффиціентѣ упругости деформаціи будутъ меньше, и слѣдовательно моментъ $N\eta$, понижающій напряженіе отъ изгиба, будетъ тоже меньше.

Подобную же роль играетъ гибкость матеріала стѣнокъ трубы. Если матеріалъ весьма гибокъ, то съ большимъ основаніемъ можно расчетъ вести лишь по одному внутреннему равномерному давленію, такъ какъ напряженія отъ изгибающихъ моментовъ въ присутствіи внутренняго давленія почти исчезаютъ. Въ этомъ случаѣ труба подобна парусиновому шлангу, который въ отсутствіи внутренняго давленія сплющивается въ ленту и принимаетъ правильную круглую форму только будучи занолненъ водой подъ напоромъ.

Измѣненія момента инерціи вліяютъ въ обратномъ направленіи. Значитъ возрастаніе момента $N\eta$, при уменьшеніи J , играетъ меньшую роль, чѣмъ уменьшеніе при этомъ момента сопротивленія.

Вліяніе измѣненія давленія отражается на обоихъ слагаемыхъ напряженія

$$\sigma = \frac{3E}{3EJ + kr^3} \mathfrak{M}v_{max} + \frac{kr}{\omega}.$$

Производная отъ σ по k

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{r}{\omega} \frac{3Er^3}{(3EJ + kr^3)^2} \mathfrak{M}v_{max}.$$

Для того, чтобы при возрастаніи внутренняго давленія напряженія уменьшались, надо чтобы $\frac{\partial \sigma}{\partial k} < 0$.

Положимъ $k = 0$ и посмотримъ каковы должны быть моменты, сплющивающіе трубу для того, чтобы появленіе внутренняго давленія вызвало пониженіе напряженій. Изъ неравенства

$$\frac{r}{\omega} - \frac{r^3}{3EJ^2} \mathfrak{M}v_{max} < 0$$

найдемъ, что

$$\mathfrak{M} > \frac{3EJ^2}{\omega r^2 v_{max}} \dots \dots \dots (17)$$

При такомъ условіи съ появленіемъ внутренняго давленія напряженія будутъ убывать и достигнуть минимума, когда

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k} = 0,$$

т. е. когда

$$k = \frac{3EJ}{r^3} \left[r \sqrt{\frac{\omega \mathfrak{M} v_{max}}{3EJ^2}} - 1 \right] = \frac{3EJ}{r^3} \left[r \sqrt{\frac{2\mathfrak{M}}{EJe}} - 1 \right] \dots (18)^1$$

Посмотримъ каково будетъ это давленіе k для разобранныхъ выше примѣровъ.

Примѣръ 9. Труба Піагарской станціи.

При $\omega = 90^\circ$, $\mathfrak{M} = M_p = 706 \cdot 1,27 \approx 894$ кгр. см.

$$k = \frac{3 \cdot 2,15 \cdot 10^6 \cdot 23,1}{4,74 \cdot 10^6 \cdot 12} \left[168 \sqrt{\frac{2 \cdot 894 \cdot 12}{2,15 \cdot 10^6 \cdot 23,1 \cdot 2,85}} - 1 \right] \approx 2,79 \text{ к/см}^2$$

т. е. при возрастаніи внутренняго давленія отъ нуля до 2,79 атм. напряженія въ стѣнкахъ трубы понижаются, а при дальнѣйшемъ возрастаніи k они будутъ увеличиваться.

Примѣръ 10. Для трубы водопровода Duluth. При $\omega = 90^\circ$ было вычислено $\mathfrak{M} = 30,5$ кгр. см.

$$k = \frac{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 2,05}{1,49 \cdot 10^6 \cdot 12} \left[53 \sqrt{\frac{2 \cdot 30,5 \cdot 12}{2,2 \cdot 10^6 \cdot 2,05 \cdot 1,27}} - 1 \right] \approx -3,04 \text{ атм.}$$

Легко убѣдиться по формулѣ (17), что условіе, при которомъ появленіе внутренняго давленія можетъ вызвать пониженіе напряженій, въ данномъ случаѣ не выполнено: по (17) $\mathfrak{M} > 85$ кгр. см., а у насъ оно только 30,5.

III. Труба лежащая въ землѣ.

1. Давленіе земли.

Въ томъ случаѣ, когда труба водовода уложена въ землѣ, къ вышерассмотрѣннымъ нагрузкамъ, вѣсу воды заключающейся въ трубѣ и собственному вѣсу трубы, прибавится давленіе земли на трубу. Такъ какъ деформация трубы незначительна и въ этомъ случаѣ главную роль, по прежнему, будутъ играть изгибающіе моменты, а нормальныя усилія будутъ не велики, то приложимъ законъ независимости, и напряженія отъ совмѣстнаго дѣйствія нагрузокъ можно опредѣлять сложениемъ напряженій, вызываемыхъ каждой изъ нагрузокъ въ отдѣльности. Поэтому теперь мы рассмотримъ круглую невѣсомую трубу не заполненную водой.

Существеннѣйшій вопросъ о давленіи земли на трубу остается къ сожалѣнію, мало выясненнымъ. Для укладки трубы отрывается, обык-

¹⁾ Въ формулу входитъ абсолютная величина $\mathfrak{M}$

новенно, траншея, откосы которой, для уменьшенія земляныхъ работъ, дѣлаются отвѣсными и поддерживаются до засыпки ея одеждою. Очевидно, что вынутый изъ траншеи и вновь засыпанный въ нее грунтъ измѣняетъ свои механическія свойства, какъ отъ разрыхленія, такъ и отъ увлаженія, которому онъ болѣе доступенъ будучи уложенъ до обратной засыпки кучами по краямъ траншеи.

Условія, въ которыхъ будетъ находиться труба въ траншеѣ послѣ ея засыпки, отличаются какъ отъ тѣхъ въ которыхъ находится труба въ насыпи, такъ и отъ устроенной туннельнымъ способомъ штольни. Если для трубы въ насыпи можно, съ нѣкоторою вѣроятностью, рассчитывать на отсутствіе передачи вѣса земляного столба, находящагося надъ трубой, смежнымъ массамъ, то для трубы уложенной въ траншею и засыпанной потомъ, такая разгрузка почти навѣрное будетъ.

При работахъ производимыхъ туннельнымъ способомъ нарушаются условія равновѣсія въ небольшомъ лишь районѣ земляного массива; повидимому, надъ частью массива давящаго непосредственно на туннель, образуются въ землѣ своды, передающіе давленіе лежащихъ выше нихъ массъ въ стороны. (Engesser. «Über den Erddruck gegen innere Stützwände» 1882). Весьма вѣроятно, что извѣстную роль играетъ здѣсь и сцѣпленіе, которое можетъ быть довольно значительно въ плотно слежавшейся землѣ (Ritter. Statik der Tunnelgewölbe. 1879). Этотъ вопросъ однако еще весьма далекъ отъ полного выясненія.

Труба засыпанная въ траншеѣ занимаетъ среднее положеніе между туннелемъ и трубой въ насыпи. Вѣсъ находящагося надъ ней массива несомнѣнно не передается цѣликомъ трубѣ. Подобно тому, какъ для сыпучаго тѣла засыпаннаго между двумя стѣнками, часть этого вѣса поддерживается главнымъ образомъ треніемъ о стѣнки, отчасти сцѣпленіемъ, быть можетъ, также и посредствомъ образованія сводиковъ. Опыты надъ давленіемъ зерна въ глубокихъ закромахъ, произведенные цѣлымъ рядомъ изслѣдователей (Делькроа, Янсень, Пранте, Луфтъ, Плейснеръ, Джемсонъ) установили съ несомнѣнностью, что давленіе на дно закрома составляетъ лишь небольшую долю вѣса находящагося въ закромѣ зерна, что давленіе это возрастаетъ съ увеличеніемъ глубины очень быстро при малыхъ глубинахъ и практически остается постояннымъ при большихъ, что глубина, послѣ которой давленіе остается чувствительно постояннымъ, зависитъ главнымъ образомъ отъ ширины закрома, т. е. отъ разстоянія между стѣнками и тѣмъ больше, чѣмъ больше эта ширина.

Но опыты эти производившіеся въ разнообразныхъ условіяхъ съ разными породами зерна даютъ лишь общія указанія относительно законовъ давленія, цифровой же матеріалъ мало пригоденъ къ разбираемому случаю. Ввиду такой неопредѣленности вопроса имѣются въ литературѣ попытки опредѣлять давленіе на трубы, замѣняя теорію давленія земли совершенно произвольными гипотезами. Напри-

мѣръ Фрюлингъ (Handbuch fur Ingenieurwissenschaften, III Teil, IV Band) предполагаетъ, что давленіе земли возрастаетъ съ увеличеніемъ глубины по параболическому закону до глубины 5 метровъ; при большихъ глубинахъ давленіе это онъ считаетъ постояннымъ. Такую же зависимость предлагаетъ инж. Блейхъ (The Engineering Record. 1908). Относительно передачи давленія временной нагрузки они дѣлаютъ гипотезу обратную, предполагая, что на 5 метровой глубинѣ это давленіе равно нулю. Подобныя гипотезы обладаютъ тѣмъ недостаткомъ, что не находясь ни въ какой связи съ свойствами грунта онѣ преувеличиваютъ давленіе въ однихъ случаяхъ и уменьшаютъ его въ другихъ, независаящая же отъ размѣровъ трубы глубина, послѣ которой давленіе остается постояннымъ, прямо противорѣчитъ указаніямъ опытовъ надъ давленіемъ зерна въ закромахъ. Кромѣ того гипотезы эти не принимаютъ во вниманіе бокового давленія, которое играетъ существеннѣйшую роль.

Появленіе подобныхъ гипотезъ, вызвано, кажется, главнымъ образомъ тѣмъ, что если при расчетѣ трубъ, опредѣлять давленіе на нихъ по теоріи давленія земли въ необладающей сцѣпленіемъ неограниченной насыпи, то при большихъ глубинахъ размѣры трубъ теряютъ всякое соотвѣтствіе съ дѣйствительностью.

Практика противорѣчитъ теоріи. Напримѣръ, трубы волнистаго желѣза оказалось возможнымъ помѣщать подъ такія насыпи, которыми по расчету труба должна была быть несомнѣнно раздавлена.

При тонкостѣнныхъ трубахъ большую роль играетъ то обстоятельство, неучитываемое расчетомъ, что труба можетъ претерпѣвать значительныя деформаци и что давленіе земли зависитъ отъ этихъ деформациі. Сплюснваемая давленіемъ сверху труба стремится увеличить свой горизонтальный діаметръ и слѣдовательно на этомъ уровнѣ возможно появленіе пассивнаго давленія, значительно большаго, чѣмъ принятое въ расчетѣ. Труба оказывается какъ бы сжатой между двумя стѣнками. Это можно учесть при расчетѣ, принявъ во вниманіе не одно лишь вертикальное давленіе земли ¹⁾, но и горизонтальное и при томъ нѣсколько больнее, чѣмъ оно опредѣляется теоретически въ зависимости отъ угла тренія даннаго грунта. При нашемъ расчетѣ мы не будемъ принимать во вниманіе ни сцѣпленія, о которомъ имѣется слишкомъ мало данныхъ, ни образованія сводиковъ, такъ какъ это лишь одна изъ возможныхъ гипотезъ, объясняющая малое давленіе на большихъ глубинахъ. Что касается упомянутаго выше давленія на трубу зарытую въ траншеѣ, какъ давленія между двумя стѣнками, то дѣйствительныя условія лишь болѣе или менѣе приближаются къ этому случаю. Разъ для поддержанія откосовъ тран-

¹⁾ Frühl. Handbuch der Ing. Wissensch. и Ramisch Zeitschr. des Österr. Ing. und Archit. Vereines. 1903, стр. 106.

и ей необходима одежда и распорки, очевидно безъ нихъ грунтъ не въ состояніи держаться отвѣсно и при расчетѣ было бы неосторожно замѣнять откосы неподвижными стѣнками. Кромѣ того при влажномъ грунтѣ или если, какъ зачастую это бываетъ, укладка трубъ кончается уже въ періодъ заморозковъ, треніе засыпаемаго грунта объ откосы канавы можетъ быть весьма невелико.

Ввиду всѣхъ этихъ обстоятельствъ мы будемъ опредѣлять давленіе земли на трубу, какъ въ неограниченной насыпи лишенной сцѣпленія и лишь увеличимъ нѣсколько горизонтальныя слагающія давленія, противъ опредѣляемыхъ теоріей, чтобы привести расчетъ въ соотвѣтствіе съ дѣйствительностью.

Но и примѣненіе этой теоріи къ данному случаю встрѣчаетъ нѣкоторыя затрудненія.

По этой теоріи вертикальная и горизонтальная составляющія относительнаго давленія (напряженія давленія), на плоскость наклоненную подъ угломъ α къ вертикали въ зависимости отъ глубины h точки подъ свободной поверхностью земли выражается такъ:

$$\left. \begin{aligned} V &= gh \sin \alpha \\ H &= gh \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19) ^1$$

гдѣ g вѣсъ ед. объема грунта и φ уголъ его естественнаго откоса. Для опредѣленія давленія на поверхность трубы мы будемъ замѣнять элементы этой поверхности элементами соответствующихъ касательныхъ плоскостей. Если мы просуммируемъ эти элементарныя давленія по всей поверхности участка трубы ед. длины вдоль оси, то очевидно получимъ вѣсъ земли въ объемѣ трубы, т. е. вѣсъ того земляного цилиндра, который замѣщенъ трубой, а въ дѣйствительности въ результатъ такого суммированія мы должны получить нуль, такъ какъ предположили трубу не вѣсомой.

Формулы (19) не пригодны для опредѣленія давленія на нижнюю половину трубы. Но такъ какъ давленіе на поверхности трубы измѣняется совершенно непрерывно, то при $\omega = 90^\circ$ (черт. 9) очевидно оно

¹⁾ Изъ этихъ формулъ легко получить общезвѣстныя формулы давленія земли на плоскость, простирающуюся отъ поверхности земли до глубины h .

Вертикальная составляющая этого давленія

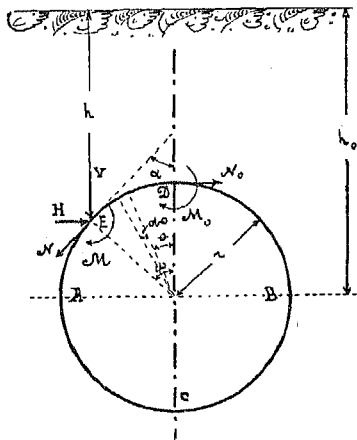
$$V = \int_0^l gh \sin \alpha \, dl = \int_0^h gh \sin \alpha \frac{dh}{\cos \alpha} = \frac{gh^2}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Горизонтальная составляющая

$$H = \int_0^l gh \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \alpha \, dl = \int_0^h gh \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) dh = \frac{gh^2}{2} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

должно быть одинаковымъ опредѣлимъ-ли мы его по форм. (19) или по какимъ-либо другимъ для нижней половины трубы. Слѣдовательно для нижней половины трубы давленія должны измѣняться при измѣненіи ω непрерывно отъ значеній, опредѣляемыхъ формулами (19) при $\alpha = 0$ до неизвѣстныхъ намъ значеній при $\omega = 180$.

Ввиду этой неопредѣленности положимъ, что труба нагружена симметрично въ верхней и нижней половинѣ. Это предположеніе значительно облегчитъ расчетъ и вмѣстѣ съ тѣмъ не представляетъ ничего невѣроятнаго. Вертикальная составляющая давленія въ нижней половинѣ, какъ это и можно ожидать, окажется возрастающей при увеличеніи угла ω и будетъ наибольшей на нижнемъ концѣ вертикальнаго діаметра; измѣненіе горизонтальной составляющей будетъ обратное.



Черт 9.

Примѣненіе формулъ (19) не выполнѣ правильно даже и къ верхней половинѣ трубы потому, что, какъ легко видѣть, уголъ образуемый съ горизонтомъ равнодѣйствующей V и H опредѣляется

$$\operatorname{tg}(\alpha + \delta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}$$

и слѣдовательно для плоскости скольженія при $\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$, $\delta = \varphi$, т. е. уголъ δ , образуемый въ данной точкѣ давленіемъ съ нормалью къ поверхности, можетъ достигнуть значенія угла тренія для даннаго грунта. На самомъ дѣлѣ давленіе не можетъ уклониться отъ нормали на уголъ большій угла тренія грунта о поверхность трубы. Но понятно, что 1) такое предположеніе служить въ пользу прочности трубы, такъ какъ чѣмъ ближе давленія будутъ приближаться къ нормали, тѣмъ меньше для трубы опасность быть сплюсненной, конечно если давленіе не превосходитъ критическаго для данной трубы ($k = \frac{3EJ}{r^3}$) и 2) разъ мы будемъ при нашемъ расчетѣ преувеличивать горизонтальныя давленія, противъ опредѣляемыхъ теоріей, то это значитъ, что мы введемъ въ расчетъ меньшій уголъ тренія, чѣмъ соотвѣтствующій данному грунту и тѣмъ отчасти исправимъ первоначальную ошибку.

Итакъ, рассмотримъ (черт. 9) трубу, нагруженную давленіемъ земли, опредѣляемымъ формулами (19).

При нашихъ предположеніяхъ достаточно разсмотрѣть лишь одинъ квадрантъ. Статически неопредѣлимыхъ, какъ въ случаѣ дѣйствія только вѣса воды, здѣсь одна: изгибающій моментъ въ какомъ-либо сѣченіи. Опредѣлимъ его въ сѣченіи D , назвавъ M_0 .

Опредѣлить его можно тѣмъ-же приѣмомъ, что въ вышеупомянутомъ случаѣ или нѣсколько инымъ, исходя изъ извѣстнаго намъ о деформацияхъ трубы. Очевидно, что въ силу симметричности формы и нагрузки уголъ между радіусами сѣченій D и A остается прямымъ и послѣ деформаціи, т. е. что приращеніе этого угла нуль. Какъ извѣстно, при деформаціи бруса, задѣланнаго однимъ концомъ, уголъ поворота какого-либо сѣченія относительно неподвижнаго (задѣланнаго) сѣченія выражается частной производной отъ потенціальной энергіи по изгибающему моменту въ рассматриваемомъ сѣченіи. Хотя въ разбираемомъ нами случаѣ брусъ и не является вполнѣ задѣланнымъ, но сѣченіе $\omega = 0$ не вращается и потому этотъ способъ опредѣленія угла поворота приложимъ безъ всякихъ измѣненій. Взявъ производную отъ потенціальной энергіи (A') для квадранта трубы по изгибающему моменту, M и приравнявъ ее нулю, такъ какъ уголъ между сѣченіями $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$ остается прямымъ и послѣ деформаціи, получимъ уравненіе, изъ котораго легко опредѣлится M_0 .

$$\frac{\partial D}{\partial M} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{12M}{c^3} + \frac{2N}{r_0} \right) d\omega = 0.$$

Вліяніе нормального усилія N при тонкостѣнныхъ трубахъ на опредѣляемая нами статически неопредѣлимая было выяснено раньше, оно ничтожно и имъ можно пренебречь. О томъ, что оно не будетъ велико въ данномъ случаѣ можно судить хотя бы по тому, что нормальныя усилія не могутъ вообще измѣнить значительно угла между двумя сѣченіями, такъ какъ, вызывая равномерно-распределенныя по толщѣ стѣнки напряженія, они ничтожно удлинняютъ часть стѣнки, заключенную между этими сѣченіями, ничтожно, какъ вслѣдствіи обратной пропорціональности удлинненій коэффиціенту упругости, такъ и вслѣдствіе малости этихъ напряженій, что можно считать достаточно выясненнымъ предыдущими примѣрами.

Итакъ, безъ особыхъ погрѣшностей можно принять, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\omega = 0 \dots \dots \dots (A'')$$

Для опредѣленія выраженій нормального усилія и изгибающаго момента въ какомъ-либо сѣченіи соотвѣтствующемъ центральному углу ω составимъ, по предыдущему, условія равновѣсія части кольца DE

(черт. 9) ед. длины вдоль оси трубы, выбравъ за оси проекцій направлення N и ему перпендикулярное и суммируя моменты относительно E . Для опредѣленія нормальнаго усилія N и момента M намъ понадобятся лишь два изъ нихъ:

$$\left. \begin{aligned} N - N_0 \cos \omega + P \cos \hat{PN} &= 0 \\ M + M_0 + N_0 r (1 - \cos \omega) + Pr &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

гдѣ $P \cos \hat{PN}$ и Pr проекція и моментъ силъ дѣйствующихъ на трубу между D и E .

Выразимъ давленіе земли въ зависимости отъ угла ω и глубины погруженія центра трубы h_0 .

По формуламъ (19)

$$\left. \begin{aligned} V &= g (h_0 - r \cos \omega) \cos \omega \\ H &= g (h_0 - r \cos \omega) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots (19')$$

Входящее въ эту формулу r означаетъ радіусъ наружной поверхности трубы, но можно пренебречь разницей между этимъ радіусомъ и радіусомъ срединной линіи, какъ потому, что она не велика, такъ и потому, что самую величину давленія мы опредѣляемъ съ большею ошибкой.

Обозначимъ для краткости письма уголь $45^\circ - \frac{\varphi}{2} = \psi$, $gh_0 = q_0$, $gr = q_1$, $gh_0 \operatorname{tg}^2 \psi = p_0$ и $gr \operatorname{tg}^2 \psi = p_1$.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} V &= (q_0 - q_1 \cos \omega) \cos \omega \\ H &= (p_0 - p_1 \cos \omega) \sin \omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

Входящее въ уравн. (20) N_0 опредѣлимъ изъ условій равновѣсія всего квадранта AD , спроектировавъ дѣйствующія на него силы на горизонтальную ось:

$$N_0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} H r d\omega = 0,$$

такъ какъ по симметріи въ сѣченіи $\omega = 90^\circ$ можетъ быть лишь нормальное усиліе, проекція котораго на горизонтальную ось-нуль.

Введя сюда H по форм. (21) и выполняя интегрированіе, получимъ

$$N_0 = \frac{1}{2} p_1 r - p_0 r \dots \dots \dots (22)$$

Чтобы не усложнять выкладокъ, мы не будемъ пока вводить найденнаго N_0 въ (20).

Подставивъ въ (A'') M изъ (20)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [M_0 + N_0 r (1 - \cos \omega) + Pp] d\omega = 0$$

найдемъ, что

$$\frac{\pi}{2} M_0 = -N_0 r \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} Pp d\omega \dots \dots (a)$$

Выраженіе момента внѣшнихъ силъ Pp найдемъ, какъ сумму моментовъ вертикальныхъ и горизонтальныхъ составляющихъ давленій на элементарные участки поверхности $r d\omega$. Этотъ моментъ

$$Pp = \int_0^{\omega_0} \{ (q_0 - q_1 \cos \omega) \cos \omega \cdot r \cdot r (\sin \omega_0 - \sin \omega) + \\ + (p_0 - p_1 \cos \omega) \sin \omega \cdot r \cdot r (\cos \omega - \cos \omega_0) \} d\omega.$$

Откуда, отбрасывая значки у ω_0

$$Pp = \frac{1}{2} q_0 r^2 \sin^2 \omega - q_1 r^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \omega \cos \omega + \frac{\omega}{2} \sin \omega + \frac{\cos^3 \omega}{3} - \frac{1}{3} \right) + \\ + p_0 r^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \omega + \cos^2 \omega - \cos \omega \right) - p_1 r^2 \left(-\frac{\cos^3 \omega}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 \omega \cos \omega \right).$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Pp d\omega = \frac{\pi}{8} q_0 r^2 - q_1 r^2 \left(\frac{8}{9} - \frac{\pi}{6} \right) + p_0 r^2 \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right) - p_1 r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{7}{18} \right).$$

Введя это и N_0 изъ (22) въ (a) получимъ

$$M_0 = -\frac{r^2}{4} (q_0 - p_0) + q_1 r^2 \left(\frac{16}{9\pi} - \frac{1}{3} \right) - p_1 r^2 \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9\pi} \right).$$

Если подставимъ теперь найденныя N_0 и M_0 во второе изъ уравненій (20), то получимъ формулу, опредѣляющую изгибающій моментъ для любого сѣченія.

$$M = \frac{r^2}{4} (q_0 - p_0) \cos 2\omega + q_1 r^2 \left(\frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{\cos^3 \omega}{6} - \frac{16}{9\pi} \right) + \\ + p_1 r^2 \left(\frac{\cos^3 \omega}{6} - \frac{2}{9\pi} \right) \dots \dots \dots (23)$$

Для полученія выраженія для N надо найти $P \cos \hat{PN}$ въ зависимости отъ ω . Такъ какъ проекція равнодѣйствующей $P \cos \hat{PN}$ равна суммѣ проекцій составляющихъ, то

$$P \cos \hat{PN} = \int_0^{\omega_0} V \cdot \sin \omega_0 r d\omega - \int_0^{\omega_0} H \cos \omega_0 r d\omega.$$

Подставивъ сюда V и H изъ (21)

$$\begin{aligned} P \cos \hat{PN} &= \sin \omega_0 \int_0^{\omega_0} (q_0 \cos \omega - q_1 \cos^2 \omega) r d\omega - \\ &- \cos \omega_0 \int_0^{\omega_0} (p_0 \sin \omega - p_1 \sin \omega \cos \omega) r d\omega. \end{aligned}$$

Выполняя интегрированія и отбрасывая значекъ у ω_0 , найдемъ

$$\begin{aligned} P \cos \hat{PN} &= q_0 r \sin^2 \omega - \frac{1}{2} q_1 r \sin^2 \omega \cos \omega - \frac{\omega}{2} q_1 r \sin \omega - \\ &+ p_0 r \cos^2 \omega - p_0 r \cos \omega + \frac{1}{2} p_1 r \sin^2 \omega \cos \omega. \end{aligned}$$

Введя это и N_0 въ первое изъ уравненій (20), получимъ N для любого ω

$$\begin{aligned} N &= -q_0 r \sin^2 \omega - p_0 r \cos^2 \omega + \frac{1}{2} q_1 r \sin \omega \left(\omega + \frac{1}{2} \sin 2\omega \right) + \\ &+ \frac{1}{2} p_1 r \cos^3 \omega \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

Если-бы мы въ формулахъ (21), опредѣляющихъ относительное давленіе, приняли во вниманіе лишь слагаемая зависящія отъ глубины погруженія центра трубы h_0 , то въ (23) и (24) вошли бы лишь члены, зависящіе отъ q_0 и p_0 . Не трудно показать, что это равносильно предположенію, что труба нагружена равномерно распределенной по ея горизонтальной и вертикальной проекціямъ нагрузкой.

Дѣйствительно, если мы въ (21) положимъ q_1 и p_1 равными нулю, то значить V и H зависятъ лишь отъ угла ω и отъ глубины h_0 , которая постоянна для данной трубы. Формулы (21) и (19) опредѣляютъ относительное давленіе на поверхность трубы; относительныя-же давленія на горизонтальную и вертикальную проекціи опредѣлятся для каждой точки по раздѣленіи V и H соответственно на $\cos \omega$ и $\sin \omega$, т. е. $\frac{V}{\cos \omega}$ и $\frac{H}{\sin \omega}$. Эти давленія не зависятъ отъ ω и, слѣдовательно, для всѣхъ точекъ поверхности трубы остаются постоянными, т. е. нагрузка равномерно распределена по горизонтальной и вертикальной проекціямъ.

Вводя вмѣсто q_0 , p_0 , q_1 и p_1 ихъ выраженія черезъ h_0 и характеризующія свойство грунта факторы g и φ , получимъ

$$\left. \begin{aligned} M &= gh_0 r^3 \left\{ \frac{tg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) tg \varphi}{2} \cos 2\omega + \frac{r}{h_0} \left[\frac{1}{2} \cos \omega + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{\cos^3 \omega}{6} - \frac{16}{9\pi} + tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{\cos^3 \omega}{6} - \frac{2}{9\pi} \right) \right] \right\} \\ N &= -gh_0 r \left\{ \sin^2 \omega + tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos^2 \omega - \frac{r}{2h_0} \left[\sin \omega \left(\omega + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \sin 2\omega \right) + tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cos^3 \omega \right] \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (25)$$

При $\varphi = 0$ и $g = \gamma$ эти формулы должны дать изгибающій моментъ и нормальное усиліе для пустой трубы, погруженной въ воду. Подставивъ эти значенія φ и g получимъ

$$M = \gamma r^3 \left(-\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\omega}{2} \sin \omega \right),$$

что отличается лишь знакомъ отъ выведенной раньше формулы (3) благодаря тому, что здѣсь вода давитъ не изнутри, а снаружи.

Для N , по замѣнѣ h_0 черезъ $h_1 + r$, гдѣ h_1 глубина погруженія вершины трубы, найдемъ

$$N = -\gamma r h_1 + \gamma r^2 \left(-1 + \frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\omega}{2} \sin \omega \right).$$

Здѣсь, кромѣ знака, сравнительно съ формулой (2), разница еще въ томъ, что добавилось слагаемое $\gamma h_1 r$; оно выражаетъ вліяніе равномернаго нормальнаго внѣшняго давленія γh_1 . При небольшой глубинѣ погруженія формулы эти достаточно точны, но въ тѣхъ случаяхъ, когда давленіе γh_1 будетъ значительно, нельзя пренебрегать вліяніемъ нормальнаго усилія на изгибающій моментъ. Въ этомъ случаѣ, какъ было выяснено при разсмотрѣніи вліянія внутренняго давленія, моментъ M , опредѣленный при отсутствіи равномернаго давленія надо множить на коэффициентъ

$$\xi = \frac{3EI}{3EI - kr^3},$$

большій единицы. Впрочемъ, подобный расчетъ врядъ-ли придется производить для водопроводныхъ трубъ, такъ какъ трудно ожидать, чтобы труба оказалась подъ водой пустой. Пустая труба легче воды, а особыхъ мѣръ для укрѣпленія ея ко дну не принимается, поэтому она всплыветъ раньше, чѣмъ окажется совершенно опорожненной.

Исслѣдованіе выраженія (25) изгибающаго момента показываетъ,

что наибольшія значенія M соотвѣтствуютъ $\omega = 0$ и $\omega = 90^\circ$. При $\omega = 0$

$$M = gh_0 r^2 \left\{ \frac{tg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) tg \varphi}{2} - \frac{r}{h_0} \left[0,2326 - 0,096 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$N = -grh_0 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{r}{2h_0} \right) \dots \dots \dots (26)$$

При $\omega = 90^\circ$

$$M = -gh_0 r^2 \left\{ \frac{tg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) tg \varphi}{2} - \frac{r}{h_0} \left[0,2195 - 0,0707 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$N = -grh_0 \left(1 - \frac{\pi}{4} \frac{r}{h_0} \right) \dots \dots \dots (27)$$

Не трудно выяснитъ условія, при которыхъ абсол. вел. M при $\omega = 90^\circ$ будетъ больше абсол. вел. M при $\omega = 0^\circ$.

Такъ какъ это зависитъ лишь отъ величины второго слагаемаго въ выраженіяхъ моментовъ при $\omega = 0$ и $\omega = 90$, то изъ неравенства

$$0,2326 - 0,0960 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) > 0,2195 - 0,0707 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

найдемъ, что при $\varphi > 18^\circ 40'$ больше будетъ $M_{\omega=90}$, т. е. въ большинствѣ встрѣчающихся въ практикѣ случаевъ придется пустую трубу, зарытую въ землю, рассчитывать по напряженіямъ въ сѣченіи $\omega = 90$. Для водопроводной трубы это будетъ тѣмъ болѣе такъ, потому что отъ дѣйствія собственнаго вѣса трубы и вѣса находящейся въ ней воды, деформирующихъ трубу въ томъ же направленіи что и давленіе земли, наибольшій изгибающій моментъ будетъ тоже при $\omega = 90^\circ$.

Опредѣлимъ теперь деформации трубы подъ вліяніемъ одного лишь давленія земли. Рѣшеніе дифференціальнаго уравненія

$$\frac{d^2 \eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{r^2 M}{EJ},$$

если принять M по формулѣ (25), дало бы слишкомъ сложное выраженіе для η . Такъ какъ въ самомъ опредѣленіи M , ввиду неопредѣленности вопроса о нагрузкѣ, могутъ заключаться большія ошибки, позволительно въ данномъ случаѣ замѣнить M по формулѣ (25) другимъ, болѣе простымъ выраженіемъ.

Обозначимъ

$$\frac{1}{2} \cos \omega + \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{\cos^3 \omega}{6} - \frac{16}{9\pi} = A \quad \text{и} \quad \frac{\cos^3 \omega}{6} - \frac{2}{9\pi} = B$$

и подсчитаемъ ихъ значенія для ω отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$.

ω^0	A	B	$A : \cos 2\omega$	$B : \cos 2\omega$
0	— 0,2326	+ 0,0960	— 0,2326	+ 0,0960
15	— 0,1994	+ 0,0795	— 0,2303	+ 0,0918
30	— 0,1103	+ 0,0376	— 0,2206	+ 0,0752
45	+ 0,0065	— 0,0118	+ ∞	— ∞
60	+ 0,1168	— 0,0499	— 0,2336	+ 0,0998
75	+ 0,1928	— 0,0678	— 0,2226	+ 0,0783
90	+ 0,2195	— 0,0707	— 0,2195	+ 0,0707

Изъ этой таблицы видно, что можно положить приблизительно

$$A = - 0,226 \cos 2\omega \quad \text{и} \quad B = 0,085 \cos 2\omega,$$

тогда вмѣсто (25) получимъ для M

$$M = gh_0 r^2 \cos 2\omega \left[\frac{tg \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) tg \varphi}{2} - \frac{r}{h_0} \left(0,226 - 0,085 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right]. \quad (28)$$

Ошибка, происходящая отъ такой замѣны, не будетъ велика, такъ какъ слагаемое съ множителемъ $\frac{r}{h_0}$ играетъ роль поправки. О пригодности этого упрощеннаго выраженія можно судить по прилагаемой ниже таблицѣ, подсчитанной по формуламъ (25) и (28) при $\varphi = 25^\circ$. (Этотъ уголъ отвѣчаетъ примѣрно среднимъ условіямъ).

Т А Б Л И Ц А II ($\varphi = 25^\circ$)

ω^0	$M : gh_0 r^2$ по форм. (25)	$M : gh_0 r^2$ по форм. (28)
0	0,148—0,193 $\frac{r}{h_0}$	0,148—0,191 $\frac{r}{h_0}$
15	0,128—0,167 $\frac{r}{h_0}$	0,128—0,165 $\frac{r}{h_0}$
30	0,074—0,095 $\frac{r}{h_0}$	0,074—0,096 $\frac{r}{h_0}$
45	0+0,002 $\frac{r}{h_0}$	0
60	—0,074+0,097 $\frac{r}{h_0}$	—0,074+0,096 $\frac{r}{h_0}$
75	—0,128+0,165 $\frac{r}{h_0}$	—0,128+0,165 $\frac{r}{h_0}$
90	—0,148+0,191 $\frac{r}{h_0}$	—0,148+0,191 $\frac{r}{h_0}$

Обозначая постоянный множитель въ (28), черезъ D , напомнимъ дифференціальное уравненіе изогнутой оси кольца такъ:

$$\frac{d^2\eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{r^2}{EJ} D \cos 2\omega = R \cos 2\omega.$$

Легко убѣдиться, что его рѣшеніе

$$\eta = -\frac{R}{3} \cos 2\omega = -\frac{r^2}{3EJ} M \dots \dots \dots (29)$$

гдѣ произвольныя постоянныя, вводимыя при интегрированіи, по прежнему опредѣлены изъ условій, что $\frac{d\eta}{d\omega} = 0$ при $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Какъ видно въ этомъ случаѣ деформаціи опредѣляются по изгибающимъ моментамъ простымъ лишь умноженіемъ этихъ послѣднихъ на постоянный коэффиціентъ $-\frac{r^2}{3EJ}$.

Опредѣлимъ теперь на частномъ примѣрѣ вліяніе нормальныхъ усилій на опредѣленіе напряженій и деформацій.

Примѣръ 11. Водопроводъ города Duiuth. Стальная клепанная труба діаметромъ $42'' \approx 106$ см., толщина стѣнки $e = 1,27$ м., $r = 53$ см., глубина канавы до трубы $8\frac{1}{2}'' \approx 260$ см. $h_0 = 313$ см.; $\frac{r}{h_0} = 0,169$. Полагая $\varphi = 25^\circ$ по таблицѣ II найдемъ, что при $\omega = 0$, $M = 0,1154 gh_0 r^2$, а при $\omega = 90^\circ$ $M = -0,116 gh_0 r^2$, какъ видно разница не велика. По приближенной формулѣ получили бы въ этихъ сѣченіяхъ равныя моменты $M = -0,116 gh_0 r^2$.

Нормальное усиліе N будетъ больше въ сѣченіи $\omega = 90^\circ$, какъ это легко видѣть изъ сравненія (26) и (27).

При $\omega = 90^\circ$ $N = 0,867 grh_0$. Произведя вычисленія для этого сѣченія при $g = 0,0016$ получимъ

$$M = -0,116 \cdot 0,0016 \cdot 313 \cdot 2,81 \cdot 10^3 = -163,2 \text{ кгр. см.}$$

$$N = -0,867 \cdot 0,0016 \cdot 53 \cdot 313 = -23 \text{ кгр.}$$

Радіальное перемѣщеніе въ этомъ сѣченіи по формулѣ (29)

$$\eta = 163 \cdot \frac{2,81 \cdot 10^3 \cdot 12}{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 2,05} = 0,406 \text{ см.}$$

Для трубы зарытой въ землю не принятыя нами во вниманіе моменты $N\eta$ имѣютъ нѣсколько большее значеніе, чѣмъ въ предыдущихъ случаяхъ, тѣмъ болѣе, что они того же знака, что моментъ M , т. е. увеличиваютъ деформацію. Для нашего примѣра

$$N\eta = -23 \cdot 0,406 = -9,3 \text{ кгр. см.,}$$

что составляетъ около 5,7% отъ $M = -163$.

Все же кажется, что слѣдуетъ пренебречь этой ошибкой во избѣ-

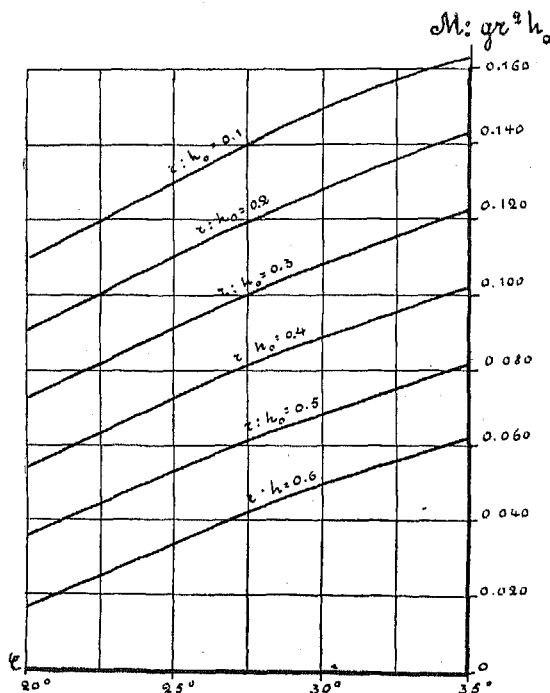
жаніе излишняго усложненія не особенно точнаго въ данномъ случаѣ расчета.

Вліяніе нормальныхъ усилій на напряженіе не велико.

$$\sigma = \frac{N}{e} + \frac{6M}{e^2} = \frac{23}{1,27} + \frac{6 \cdot 163}{1,61} \approx 18 + 607 = 625 \text{ кгр/см}^2.$$

Здѣсь напряжения отъ N составляютъ меньше 3% отъ напряженій вызываемыхъ M .

Интересно еще выяснитъ вліяніе различныхъ факторовъ на наибольшій изгибающій моментъ. Вліяніе g , h_0 и r ясно видно изъ формулы (28). Моменты пропорціональны вѣсу грунта, приблизительно



Черт. 10.

пропорціональны квадрату радіуса (возрастаютъ медленно, чѣмъ r^2) и первой степени высоты насыпи (возрастаютъ быстро, чѣмъ h_0). Зависимость M отъ угла естественнаго откоса не такъ ясна. Общее изслѣдованіе вліянія этого фактора затруднительно по сложности зависимости.

Нѣкоторое представленіе о вліяніи угла φ можно составить на основаніи прилагаемой ниже таблицы значеній абсолютн. величинъ $\max M: gh_0r^2$ при разныхъ φ и $\frac{r}{h_0}$ и чертежа 10.

Т А Б Л И Ц А III ¹⁾ значений

$$M: gh_0 r^2$$

φ°	$tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$	$r:h_0$					
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
20°	0,490	0,109	0,090	0,072	0,053	0,035	0,016
25°	0,406	0,129	0,110	0,091	0,072	0,053	0,034
30°	0,333	0,147	0,127	0,108	0,088	0,068	0,049
35°	0,271	0,162	0,142	0,122	0,102	0,082	0,062

Въ предѣлахъ наиболѣе часто встрѣчающихся въ практикѣ угловъ естественнаго откоса φ :

1) Отношеніе $M: gh_0 r^2$ при данномъ $r:h_0$ возрастаетъ по линейному закону въ зависимости отъ φ .

2) При $r:h_0=0,3$ моменты приблизительно пропорціональны углу φ . Измѣненію угла въ 1,75 раза соотвѣтствуетъ измѣненіе $M: gh_0 r^2$ въ 1,72 раза.

3) При меньшихъ $r:h_0$ моменты возрастаютъ относительно медленнѣе чѣмъ φ , при большихъ—быстрѣе. Въ виду этого слѣдуетъ быть осторожнымъ въ выборѣ угла естественнаго откоса въ тѣхъ случаяхъ когда $r:h_0$ велико. Напримѣръ для $r:h_0=0,6$ взявъ φ вмѣсто 20°—35° мы увеличимъ изгибающіе моменты почти въ четыре раза.

На основаніи таблицы III можно сказать, что въ указанныхъ въ таблицѣ предѣлахъ для φ и $r:h_0$ измѣненію угла φ на 1° соотвѣтствуетъ въ среднемъ измѣненіе $M: gh_0 r^2$ на $\frac{1}{300}$.

Для приведеннаго выше примѣра трубы водовода города Duluth было вычислено, что при $\varphi=25^\circ$, при $\omega=90^\circ$ $M=-0,116 gh_0 r^2$. Если бы φ было не 25°, а 30°, то по только что сказанному

$$M = - gh_0 r^2 \left(0,116 + \frac{5}{300} \right) = - 0,1327 gh_0 r^2.$$

Подсчитывая по формулѣ (28), найдемъ $M = - 0,1336 gh_0 r^2$.

Для $\varphi=20^\circ$ приблизительно

$$M = - gh_0 r^2 \left(0,116 - \frac{5}{300} \right) = - 0,0993 gh_0 r^2,$$

а по формулѣ (28) $M = - 0,0964 gh_0 r^2$; какъ видно, для предварительныхъ соображеній, точность вполне удовлетворительная.

¹⁾ Таблица составлена по точной формулѣ (25).

Приведенного достаточно для расчета трубы самотечного безнапорного водовода. Къ изгибающему моменту по формулѣ (28) для $\omega = 90^\circ$ надо прибавить моментъ въ этомъ сѣченіи по формулѣ (10) и по этому суммарному изгибающему моменту опредѣлять толщину стѣнки, не обращая вниманія на нормальныя усилія. Если вода въ трубѣ находится подъ напоромъ, пренебрегать нормальными усиліями и вызываемыми ими моментами уже нельзя. Теперь мы и перейдемъ къ расчету такихъ трубъ.

2. Внутреннее равномерное давленіе.

Къ этому случаю примѣнимо все, сказанное по поводу расчета напорной трубы, лежащей на поверхности земли (стр. 33). Къ изгибающему моменту по формуламъ (10) и (28)

$$\mathfrak{M} = M_1 + M_2 = \gamma r^3 \mu \left(\frac{2}{\pi} - \frac{\omega}{2} \sin \omega - \frac{1}{2} \cos \omega \right) +$$

$$+ gh_0 r^2 \cos 2\omega \left[\frac{1 - tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)}{4} - \frac{r}{h_0} \left(0,226 - 0,085 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right]$$

въ каждомъ сѣченіи прибавляется моментъ $N\eta$, въ которомъ величина η опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{d^2 \eta}{d\omega^2} + \eta = \frac{r^2}{EJ} [\mathfrak{M} + N\eta] \dots \dots \dots (B)$$

Не повторяя всего тамъ сказаннаго перейдемъ непосредственно къ рѣшенію уравненія (B).

При $A = 1 - \frac{hr^3}{EJ} < 0$

$$\eta = \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ} \left\{ \frac{2}{\pi A} + \frac{\omega \sin \omega}{2(1-A)} + \frac{3-A}{2(1-A)^2} \cos \omega + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos h\omega \sqrt{-A}}{(1-A)^2 \sqrt{-A} \sin h \frac{\pi \sqrt{-A}}{2}} \right\} - \frac{R}{4-A} \cos 2\omega \dots \dots (30)$$

гдѣ
$$R = \frac{gr^4 h_0}{EJ} \left[\frac{1 - tg^2 \psi}{4} - \frac{r}{h_0} (0,226 - 0,085 tg^2 \psi) \right] = \frac{r^2}{EJ} D$$

по обозначеніямъ уравненія (29) при $\psi = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$.

Произвольныя постоянныя, вводимыя при интегрированіи (B) опредѣлены изъ условій, что $\frac{d\eta}{d\omega} = 0$ при $\omega = 0$ и $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Между прочимъ это рѣшеніе (B) лишній разъ подтверждаетъ правильность способа упрощеннаго опредѣленія вліянія напора, при-

мѣненнаго для трубы, лежащей на поверхности земли. Разсмотримъ второе слагаемое въ (30), обозначивъ его черезъ η_0

$$\text{Знаменатель его} \quad 4 - A = \frac{3EJ + kr^3}{EJ},$$

$$\text{поэтому} \quad \eta_0 = - \frac{R}{4 - A} \cos 2\omega = - \frac{EJ}{3EJ + kr^3} R \cos 2\omega.$$

Такъ какъ R здѣсь имѣетъ тоже значеніе, что при разсмотрѣніи деформаций пустой трубы подъ давленіемъ земли, то его можно замѣнить по (29)

$$R \cos 2\omega = - 3\eta,$$

а тогда

$$\eta_0 = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} \eta,$$

т. е. что если пустую трубу, сдавливаемую землей, растягивать равномернымъ внутреннимъ давленіемъ, то деформации η_0 въ этомъ случаѣ получатся изъ деформаций η въ отсутствіи внутренняго давленія умноженіемъ на коэффициентъ, который мы обозначали ξ и который равенъ $\frac{3EJ}{3EJ + kr^3}$.

При разсмотрѣніи этого упрощеннаго способа было указано, что для возможности его примѣненія необходимо соблюденіе условія, чтобы для деформированной трубы, до появленія внутренняго давленія, отношеніе $\eta : M = \text{const}$, что, какъ видно изъ (29), соблюдено въ данномъ случаѣ, благодаря чему результаты двухъ способовъ вполне совпадаютъ.

Слагаемое $-\frac{R}{4-A} \cos 2\omega$ въ (30) можетъ быть вычислено по изгибающему моменту отъ давленія земли M_2 , такъ какъ по (29) и только что доказанному

$$\eta_0 = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} \eta = - \frac{r^2}{3EJ + kr^3} M_2 \dots \dots (31)$$

Примѣненіе упрощеннаго способа вычисленія деформаций и моментовъ къ трубѣ зарытой въ землю и заполненной водой подъ давленіемъ даетъ болѣе точные результаты, чѣмъ въ случаѣ трубы лежащей на поверхности земли, такъ какъ здѣсь η складывается изъ двухъ частей и для одной изъ нихъ, по только что доказанному, этотъ способъ строго правиленъ. Точность конечно будетъ тѣмъ больше, чѣмъ большую роль, сравнительно съ вѣсомъ воды и собственнымъ вѣсомъ трубы, играетъ давленіе земли.

Очевидно все сказанное при изслѣдованіи вліянія внутренняго давленія для трубы лежащей на поверхности земли приложимо къ данному случаю; лишь подъ изгибающимъ моментомъ M слѣдуетъ понимать сумму изгибающихъ моментовъ отъ давленія земли, вѣса воды и вѣса самой трубы.

Примѣръ 12: Труба водовода города Duluth.

Мы уже рассчитывали эту трубу въ томъ случаѣ, если-бы она была зарыта пустой на глубинѣ $8\frac{1}{2}$ (примѣръ 11), а также лежащую на поверхности земли и заполненную водой при равномерномъ внутреннемъ давленіи въ 8,8 атмосферы (примѣръ 6).

Въ дѣйствительности эта труба лежитъ въ канавѣ, глубина которой достигаетъ $8\frac{1}{2}$, и заполнена водой при внутреннемъ давленіи 8,8 атмосферъ. Расчитаемъ трубу при этихъ условіяхъ, какъ по точной формулѣ (30), такъ и по приближенному способу.

Расчеты будемъ производить для $\omega = 90^\circ$, такъ какъ изгибающіе моменты въ этомъ сѣченіи имѣютъ наибольшую величину. Первое слагаемое въ формулѣ (30), какъ вычислено въ примѣрѣ 6, $= 0,0221 \frac{r^5 \mu}{EJ} = 0,0339$ см. Для вычисленія второго слагаемого, воспользуемся формулой (31). Уголъ φ положимъ $= 25^\circ$. Изгибающій моментъ для $\omega = 90^\circ$ найдемъ въ таблицѣ II (примѣръ 11).

$$M = gh_0 r^2 \left[-0,148 + 0,191 \frac{r}{h_0} \right] = -163 \text{ кгр. см.}$$

Слѣдовательно

$$\eta = 0,0339 + \frac{r^2}{3EJ + kr^3} \cdot 163 = 0,0339 + \frac{2809 \cdot 163}{3 \cdot 2,2 \cdot 10^8 \cdot 0,1707 + 8,8 \cdot 1489 \cdot 10^2} = 0,2218 \text{ см.}$$

Изгибающіе моменты тоже были вычислены раньше. Суммируя ихъ, получимъ

$$\mathfrak{M} = -30,5 - 163 = -193,5 \text{ кгр. см.}$$

Къ этому моменту присоединится обратнаго знака моментъ

$$N\eta = kr\eta = 8,8 \cdot 53 \cdot 0,2218 \approx 103,5 \text{ кгр. см.}$$

Суммарный моментъ

$$M = -193,5 + 103,5 = -90 \text{ кгр. см.}$$

Наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{N}{e} + \frac{6M}{e^2} = \frac{kr}{1,27} + \frac{6 \cdot 90}{1,61} = 367 + 335 = 702 \text{ кгр./см.}^2$$

Для этого-же примѣра $\frac{kr^3}{EJ} = 3,4888$

$$\xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} = \frac{3}{3 + 3,4888} = 0,462.$$

Слѣдовательно, изгибающій моментъ {при давленіи извнутри приближенно

$$M = \xi M = -0,462 \cdot 193,5 = -89,5 \text{ кгр./см.}$$

Разница съ точнымъ вычисленіемъ меньше 1%.

Примѣръ 13. Водоводъ Кульхарди въ Австраліи (Coolgardie).

Длина подводящихъ трубъ около 490 верстъ. Трубы стальные съ зажимными брусками (locking bar) діаметромъ 30" $\approx$ 76 см. Толщина стѣнки $e = 1/4"$ $\approx$ 0,64 см., въ нѣкоторыхъ мѣстахъ $e = 5/16"$ $\approx$ 0,8 см. На всемъ протяженіи водовода восемь участковъ, обслуживаемыхъ каждый отдѣльной напорной станціей. Полная высота подъема воды (съ потерей напора) 2600' $\approx$ 790 метровъ. Для расчета примемъ $k=10$ ат. Глубина канавы не указана въ описаніи (Сидоровъ, стр. 239), примемъ $h_0 = 200$ см

Тогда $r:h_0 = 0,19$. Положимъ $g = 0,0016$ кгр./см.³ и $\varphi = 25^\circ$.

Коэффициентъ ξ при $e = 0,64$ см.

$$\xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} = \frac{1}{1 + \frac{10 \cdot 5,49 \cdot 10^4 \cdot 12}{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,262}} = 0,208$$

Изгибающіе моменты въ сѣченіи $\omega = 90^\circ$:

отъ вѣса воды и трубы

$$M_1 = -0,149 \gamma r^3 \mu = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 5,49 \cdot 10^4 \left(1 + 2 \frac{7,85 \cdot 0,64}{38}\right) =$$

$$= -10,3 \text{ кгр. см.}$$

отъ давленія земли

$$M_2 = 0,0016 \cdot 200 \cdot 1,44 \cdot 10^3 (-0,148 + 0,191 \cdot 0,19) = -51,6 \text{ кгр. см.}$$

Суммарный изгибающій моментъ $M \approx -62$ кгр. см.

При напорѣ $M = -\xi \cdot 62 = -12,9$ кгр. см.

Наибольшее растягивающее напряженіе

$$\sigma = \frac{10 \cdot 38}{0,64} + \frac{6 \cdot 12,9}{0,41} = 594 + 189 = 783 \text{ кгр./см.}^2$$

тогда какъ при отсутствіи внутренняго давленія $\sigma = \frac{6 \cdot 62}{0,41} = 907$ кгр. см.² т. е. значительно больше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ. Внутреннее давленіе оказывается благопріятнымъ для трубы.

Подсчитывая для этого примѣра η по формулѣ (30) найдемъ, что $\eta = 0,1293$ см. и слѣдовательно, точно изгибающій моментъ при внутреннемъ давленіи

$$M = -62 + 10 \cdot 38 \cdot 0,1293 = 12,87 \text{ кгр./см.}$$

т. е. практически не отличается отъ выше вычисленнаго 12,9 кгр./см.

Какъ видѣли выше, для этой трубы оказывается, что внутреннее давленіе въ 10 атм. понижаетъ напряженія. Посмотримъ при какомъ давленіи напряженія будутъ наименьшія.

По формулѣ (18) минимуму напряженій отвѣчаетъ давленіе

$$k = \frac{3EJ}{r^3} \left[r \sqrt{\frac{2M}{EJe}} - 1 \right]$$

такъ какъ $J = \frac{e^3}{12} = 0.0218 \text{ см.}^4$, то

$$k = \frac{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,0218}{5,49 \cdot 10^4} \left[38 \sqrt{\frac{2 \cdot 62}{2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,0218 \cdot 0,64}} - 1 \right] \approx 3,7 \text{ атм.}$$

При такомъ давленіи

$$\xi = \frac{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,0218}{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,0218 + 3,7 \cdot 5,49 \cdot 10^4} = 0,415$$

и слѣдовательно, при этомъ наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{3,7 \cdot 38}{0,64} + \frac{6 \cdot 62 \cdot 0,415}{0,41} = 219 + 376 = 595 \text{ кгр./см.}^2$$

Примѣръ 14. Водоводъ города Allegheny въ Америкѣ (Сидоровъ, стр. 219), стальная клепаная труба, діаметромъ 60", $r = 76 \text{ см.}$ лежитъ въ землѣ. Глубина не указана. Толщина стѣнокъ $\frac{1}{2}" = 1,27 \text{ см.}$ Положимъ, что $h_0 = 275 \text{ см.}$, т. е. что труба прикрыта слоемъ земли въ 2 м.—около 1 саж.; примемъ $\varphi = 25^\circ$ и $g = 0,0016 \text{ кгр./см.}^3$. Давленіе въ этихъ трубахъ отъ $1\frac{3}{4}$ до 8,4 атмосферы.

Примемъ для расчета $k = 8,5 \text{ атм.}$ Моментъ инерціи $J = \frac{2,05}{12} = 0,171 \text{ см.}^4$

Тогда

$$\xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} = \frac{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,171}{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,171 + 8,5 \cdot 4,39 \cdot 10^5} = 0,232 \text{ см.}$$

Изгибающіе моменты въ сѣченіи $\omega = 90^\circ$:

Отъ вѣса воды и трубы

$$M_1 = -0,149 \cdot 10^{-3} \cdot 4,39 \cdot 10^5 \left(1 + 2 \frac{7,85 \cdot 1,27}{76} \right) = -82,5 \text{ кгр. см.}$$

Отъ давленія земли

$$M_2 = 0,0016 \cdot 275 \cdot 5,78 \cdot 10^3 \left(-0,148 + 0,191 \frac{76}{275} \right) = -242 \text{ кгр. см.}$$

Суммарный изгибающій моментъ $M \approx 324 \text{ кгр. см.}$

Слѣдовательно, при давленіи въ трубѣ въ 8,5 атм. наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{8,5 \cdot 76}{1,27} = \frac{6 \cdot 324 \cdot 0,232}{1,61} = 509 + 279 = 788 \text{ кгр./см.}^2$$

Для трубы заполненной водой безъ напора наибольшее напряженіе значительно больше: $\sigma = \frac{6 \cdot 324}{1,61} = 1208 \text{ кгр./см.}^2$

Подсчитывая по (18) то давленіе, при которомъ напряженія будутъ наименьшими, получимъ $k \approx 4,62$ ат. При такомъ давленіи напряженія будутъ чуть-ли не въ два раза меньше, чѣмъ только что вычисленное. Дѣйствительно

$$\xi = \frac{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,171}{3 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 0,171 + 4,62 \cdot 4,39 \cdot 10^5} = 0,357$$

и слѣдовательно наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{4,62 \cdot 76}{1,27} + \frac{6 \cdot 324 \cdot 0,357}{1,61} = 276 + 431 = 707 \text{ кгр./см.}^2$$

При давленіи какъ большему 4,62, такъ и меньшему, напряженіе будутъ больше 707 кгр./см.²

Какъ видно изъ этихъ примѣровъ, практикуемый зачастую способъ расчета трубъ по одному лишь внутреннему давленію совсѣмъ не удовлетворителенъ и если многія трубы, рассчитанныя такимъ образомъ, благополучно существуютъ, то лишь именно благодаря значительному внутреннему давленію, предохраняющему ихъ отъ сплющиванья.

IV. Труба, лежащая на фундаментѣ.

1. Вліяніе вѣса воды, заполняющей трубу.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда трубу прокладываютъ въ спеціально для этой цѣли устроенномъ туннелѣ или вообще въ закрытомъ помѣщеніи съ поломъ, подъ нее устраиваютъ очерченный по формѣ трубы фундаментъ, охватывающій болѣе или менѣе значительную часть нижней полуокружности трубы.

Примѣромъ подобной конструкціи можетъ служить изображенный на черт. 11 трубопроводъ близъ Argenteuil'я (Парижъ). Лѣвая труба желѣзобетонная системы Бонна, правая—стальная. И та и другая уложены на фундаментахъ, охватывающихъ около 90° нижней половины трубы. Трубы напорныя, діаметромъ 1,8 м.

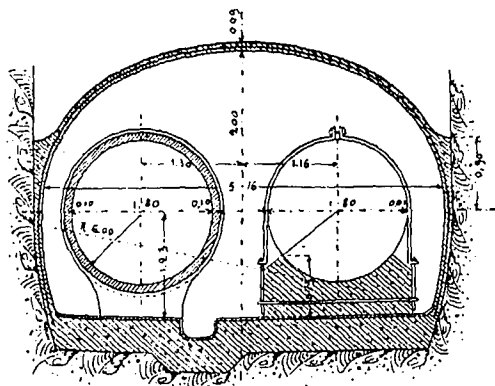
Для расчета трубы необходимо знать законъ распредѣленія давленія, передающагося трубой фундаменту. Такъ какъ дѣйствительное распредѣленіе давленія не извѣстно, то приходится удовольствоваться

какимъ-либо предположеніемъ. Конечно, благодаря произвольности этого предположенія, расчетныя напряженія въ стѣнкахъ трубы будутъ уклоняться отъ дѣйствительныхъ, но, такъ какъ поверхность трубы, надавливающая на фундаментъ составляетъ лишь небольшую часть

всей поверхности трубы, то законъ распредѣленія давленія по этой части поверхности не имѣетъ особенно большого значенія.

Положимъ, что это давленіе равномерно распределено по горизонтальной проекціи, соприкасающейся съ фундаментомъ поверхности.

Будемъ разсматривать участокъ трубы единичной длины вдоль ея оси.



Черт. 11.

Положимъ, что труба заполнена жидкостью уд. вѣсомъ γ , но безъ напора, т. е. такъ, что свободный уровень жидкости совпадаетъ съ высшей точкой профиля трубы— B (черт. 12).

Такъ какъ нагрузка симметрична относительно вертикальной диаметральной плоскости, то достаточно ограничиться расчетомъ лишь одной половины трубы.

Разсмотримъ лѣвую половину. Выдѣлимъ участокъ кольца отъ A до C , соответствующій центральному углу φ .

Къ этому участку будутъ приложены слѣдующія силы:

1. Въ сѣченіи A выбранныя нами за статически неопредѣлимое усиліе N_0 и моментъ M_0 .

2. На участкѣ соответствующемъ центръ углу α давленіе отъ фундамента; напряженіе этого давленія назовемъ k . Величину k найдемъ изъ условія, что сумма проекцій силъ, приложенныхъ къ трубѣ, на вертикальную ось должна быть равна нулю.

$$2kr \sin \alpha = \pi r^2 \cdot \gamma,$$

гдѣ $\pi r^2 \gamma$ есть вѣсъ воды, заполняющей разсматриваемое нами кольцо. Отсюда

$$k = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \gamma r.$$

3. Нормальное къ внутренней поверхности давленіе воды, величина котораго въ каждой данной точкѣ пропорціональна глубинѣ погруженія ея подъ свободнымъ уровнемъ жидкости и равна

$$\gamma r (1 + \cos \varphi).$$

4. Въ сѣченіи C нормальное усиліе N и моментъ M .

Кромѣ этихъ силъ въ сѣченіи C будетъ приложена радіально направленная сила, но такъ какъ она не играетъ въ нашихъ разсужденіяхъ никакой роли, то о ней и не будемъ больше упоминать. Вызываемая ею касательныя напряженія ничтожны.

Составимъ условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ участку AC кольца, выбравъ за ось проекцій направление N . Уравненіе моментовъ напишемъ относительно точки C .

Третье условіе равновѣсія не интересно для насъ, такъ какъ опредѣляетъ упомянутую выше радіальную силу.

Итакъ:

$$\left\{ \begin{array}{l} N - N_0 \cos \varphi - \int_0^{\varphi} \gamma r (1 + \cos \psi) r d\psi \sin(\varphi - \psi) + P \cos \hat{P}N = 0. \\ M + M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) + \int_0^{\varphi} \gamma r (1 + \cos \psi) r d\psi r \sin(\varphi - \psi) - Pp = 0. \end{array} \right.$$

Здѣсь $P \cos \hat{P}N$ и Pp есть проекція и моментъ силъ, приложенныхъ на наружной поверхности кольца отъ A до C .

Изъ этихъ уравненій

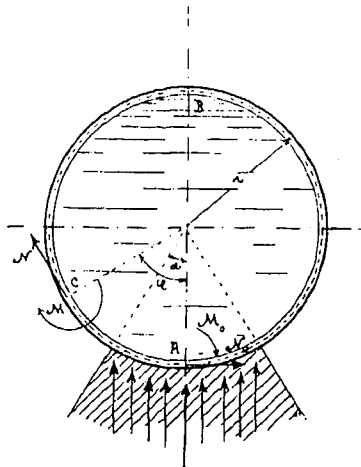
$$\left. \begin{array}{l} N = N_0 \cos \varphi + \gamma r^2 \left(1 + \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \right) - P \cos \hat{P}N = \\ \quad = N_0 \cos \varphi + A, \\ M = N_0 r (1 - \cos \varphi) - \gamma r^3 \left(1 + \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \right) - M_0 + \\ \quad + Pp = N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B \end{array} \right\} . (32)$$

гдѣ A и B означаютъ слагаемыя, независяція отъ выбранныхъ нами статически неопредѣлимыхъ.

Уравненія (32) содержатъ четыре неизвѣстныхъ: N , M , N_0 и M_0 .

Два дополнительныхъ условія для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ, какъ и раньше, получимъ изъ условія, что производныя потенциальной энергіи деформированной трубы по выбраннымъ нами статически неопредѣлимымъ должны быть равны нулю.

При этомъ въ выраженіи потенциальной энергіи (A) интегрированіе



Черт. 12.

должно быть распространено на полуокружность, а по изменении переменнй, длины дуги s —на центральный угол φ , отъ 0 до π . Тогда

$$D = \frac{r}{2E} \int_0^\pi \left[\frac{N^2}{e} + \frac{12M^2}{e^3} + \frac{2MN}{er} \right] d\varphi \dots \dots \dots (33)^1$$

Въ выраженіи потенциальной энергіи (A) мы пренебрегли работой скалывающихъ напряженій, но она имѣетъ весьма малое значеніе, значительно меньшее, чѣмъ нормальныхъ напряженій отъ усилій N , влияніе которыхъ на N_0 и M_0 можно вычислить по опредѣленіи ихъ.

Подставляя въ (33) N и M изъ (32) выразимъ потенциальную энергію черезъ N_0 и M_0 .

$$D = \frac{r}{2E} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{e} (N_0 \cos \varphi + A)^2 + \frac{12}{e^3} [N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B]^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{er} (N_0 \cos \varphi + A) [N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B] \right\} d\varphi.$$

Приравнивая частныя производныя D по N_0 и M_0 нулю, получимъ искомыя дополнительныя уравненія.

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^\pi \left\{ (N_0 \cos \varphi + A) \cos \varphi + \frac{12r}{e^2} [N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B] (1 - \cos \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} [N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B] \cos \varphi + (N_0 \cos \varphi + A) (1 - \cos \varphi) \right\} d\varphi = 0 \\ & \int_0^\pi \left\{ \frac{12}{e^2} [N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B] + \frac{1}{r} (N_0 \cos \varphi + A) \right\} d\varphi = 0 \end{aligned} \right\} (34)$$

Помощью второго уравненія можно упростить первое. Дѣйстви-тельно: въ первомъ имѣются слагаемыя, сумма которыхъ по второму уравненію равна нулю. Сдѣлавъ эту подстановку и возмoжныя въ первомъ уравненіи приведенія, получимъ:

$$N_0 \left(1 - \frac{12r^2}{e^2} \right) \int_0^\pi (\cos \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi - M_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{12r}{e^2} \right) \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \\ + \left(\frac{1}{r} - \frac{12r}{e^2} \right) \int_0^\pi B \cos \varphi d\varphi = 0.$$

¹⁾ При вычисленіи статически неопредѣлимыхъ мы всюду вводимъ радіусъ срединной линіи сѣченія трубы r , т. к., какъ это видно изъ предыдущаго, для тонкостѣнныхъ трубъ это вполне допустимо.

По раздѣленіи на $1 - \frac{12r^2}{e^2}$.

$$N_0 \int_0^\pi (\cos \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi - \frac{1}{r} M_0 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^\pi B \cos \varphi d\varphi = 0. \quad (35)$$

Найдемъ входящіе въ уравненіе интегралы:

$$\int_0^\pi (\cos \varphi - \cos^2 \varphi) d\varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi B \cos \varphi d\varphi &= \int_0^\pi \left[-\gamma r^3 \left(\cos \varphi + \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \varphi \right) + Pp \cos \varphi \right] d\varphi = \\ &= \frac{5\pi}{8} \gamma r^3 + \int_0^\pi Pp \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Выраженіе момента давленія отъ фундамента Pp различно въ предѣлахъ для φ отъ 0 до α и отъ α до π :

отъ 0 до α
$$Pp = \frac{kr^2}{2} \sin^3 \varphi$$

и отъ α до π
$$Pp = kr^2 \sin \alpha \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

Слѣдовательно:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Pp \cos \varphi d\varphi &= \int_0^\alpha \frac{kr^2}{2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_\alpha^\pi kr^2 \sin \alpha \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) \cos \varphi d\varphi = \frac{kr^2}{2} \frac{\sin^3 \alpha}{3} + \\ &+ kr^2 \sin \alpha \left(-\frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) = \frac{\pi}{12} \gamma r^3 \sin^2 \alpha, \text{ а } \int_0^\pi B \cos \varphi d\varphi = \pi \gamma r^3 \left(\frac{5}{8} + \frac{\sin^2 \alpha}{12} \right). \end{aligned}$$

Подставляя найденные интегралы въ уравненіе (35) найдемъ, что

$$N_0 = \gamma r^3 \left(\frac{5}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) \dots \dots \dots (36)$$

Подставивъ найденное N_0 во второе изъ уравненій (34), найдемъ и M_0 . Предварительно вычислимъ входящіе въ это уравненіе интегралы. По приведеніи, это уравненіе напишется такъ:

$$\begin{aligned} N_0 \int_0^\pi \left[\frac{1}{r} \cos \varphi + \frac{12r}{e^2} (1 - \cos \varphi) \right] d\varphi - M_0 \cdot \frac{12}{e^2} \int_0^\pi d\varphi + \\ + \int_0^\pi \left(\frac{1}{r} A + \frac{12}{e^2} B \right) d\varphi = 0 \dots \dots \dots (37) \end{aligned}$$

Искомые интегралы:

$$\int_0^\pi \left[\frac{1}{r} \cos \varphi + \frac{12r}{e^2} (1 - \cos \varphi) \right] d\varphi = \frac{12r}{e^2} \pi; \quad \int_0^\pi d\varphi = \pi.$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{r} A + \frac{12}{e^2} B \right) d\varphi = \int_0^\pi \left[\gamma r \left(1 - \frac{12r^2}{e^2} \right) \left(1 + \frac{\varphi}{2} \sin \varphi - \cos \varphi \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} P \cos \hat{P}N + \frac{12}{e^2} Pp \right] d\varphi = \frac{3\pi}{2} \gamma r \left(1 - \frac{12r^2}{e^2} \right) +$$

$$+ \int_0^\pi \left(\frac{12}{e^2} Pp - \frac{1}{r} P \cos \hat{P}N \right) d\varphi.$$

Выраженія момента Pp были найдены раньше. Найдемъ соотвѣтствующія выраженія проекцій давленія фундамента на направленіе N . Въ предѣлахъ для φ отъ 0 до α . . . $P \cos \hat{P}N = kr \sin^2 \varphi$, а отъ α до π . . . $P \cos \hat{P}N = kr \sin \alpha \sin \varphi$. Слѣдовательно,

$$\int_0^\pi \left(\frac{12}{e^2} Pp - \frac{1}{r} P \cos \hat{P}N \right) d\varphi = \int_0^\alpha k \left(\frac{6r^2}{e^2} - 1 \right) \sin^2 \varphi d\varphi + \int_\alpha^\pi \left[k \sin \alpha \sin \varphi \left(\frac{12r^2}{e^2} - 1 \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{6r^2}{e^2} k \sin^2 \alpha \right] d\varphi = k \left(\frac{6r^2}{e^2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{4} \sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2} \right) + k \sin \alpha (1 + \cos \alpha) \left(\frac{12r^2}{e^2} - 1 \right) -$$

$$- \frac{6r^2}{e^2} k \sin^2 \alpha \cdot (\pi - \alpha) = k \left[\frac{12r^2}{e^2} \left(\sin \alpha + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{4} - \frac{\pi - \alpha}{2} \sin^2 \alpha \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha \right].$$

Такъ какъ $k = \frac{\pi}{2 \sin \alpha} \gamma r$, то

$$\int_0^\pi \left(\frac{12}{e^2} Pp - \frac{1}{r} P \cos \hat{P}N \right) d\varphi = \pi \gamma r \left[\frac{12r^2}{e^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} - \frac{\pi - \alpha}{4} \sin \alpha \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} - \frac{1}{2} \right]$$

и окончательно

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{r} A + \frac{12}{e^2} B \right) d\varphi = \pi \gamma r \left[\frac{12r^2}{e^2} \left(-1 + \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} - \frac{\pi - \alpha}{4} \sin \alpha \right) + \right. \\ \left. + 1 - \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} \right].$$

Подставляя найденные интегралы и N_0 по (36) въ уравнение (37) получимъ:

$$M_0 \cdot \frac{12\pi}{e^2} = \pi \gamma r \left[\frac{12r^2}{e^2} \left(\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} + \frac{1 - (\pi - \alpha) \sin \alpha}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) + \right. \\ \left. + 1 - \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} \right]$$

откуда:

$$M_0 = \gamma r^3 \left(\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} + \frac{1 - (\pi - \alpha) \sin \alpha}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) + \\ + \frac{\gamma r e^2}{12} \left(1 - \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} \right) \dots \dots \dots (38)$$

Если-бы для опредѣленія статически неопредѣлимыхъ мы воспользовались сокращеннымъ выраженіемъ потенциальной энергіи, принявъ во вниманіе лишь членъ зависящій исключительно отъ M , т. е. считали

$$D = \frac{r}{2E} \int_0^\pi \frac{M^2}{J} d\varphi,$$

то получили бы то же самое выраженіе (36) для N_0 , а M_0 выразилось-бы проще: вмѣсто (38) мы имѣли-бы

$$M_0 = \gamma r^3 \left(\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} + \frac{1 - (\pi - \alpha) \sin \alpha}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right). \quad (39)$$

Вліяніе нормальнаго усилія N и кривизны кольца, отъ которыхъ зависятъ отбрасываемая слагаемая въ выраженіи потенциальной энергіи (33), выражается вторымъ слагаемымъ въ выраженіи (38) для M_0 :

$$\frac{\gamma r e^2}{12} \left(1 - \frac{1}{4} \cos \alpha - \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} \right).$$

Вліяніе этого слагаемаго совершенно исчезающее. Дѣйствительно: при $\alpha = 0$ по формулѣ (38) получимъ

$$M_0 = 0,75 \gamma r^3 + 0,5 \frac{\gamma r e^2}{12} = 0,75 \gamma r^3 \left(1 + \frac{2}{3} \frac{e^2}{12r^3} \right).$$

При толщинѣ стѣнки $e = \frac{1}{10} r$ поправка составляет $\frac{1}{1800}$ величины M_0 . При больших α она будетъ больше. Напримѣръ, при $\alpha = 45^\circ$.

$$M_0 = 0,3207 \gamma r^3 \left(1 - 1,7 \frac{e^2}{12r^2} \right).$$

При томъ-же $\frac{e}{r}$ поправка 0,0014, т. е. меньше 0,2%.

Въ виду этого позволительно ограничиться приближеннымъ выраженіемъ (39) для M_0 .

Подставляя найденные N_0 , M_0 , $P \cos \hat{PN}$ и Pp въ уравненіе (32), получимъ формулы, по которымъ можно опредѣлить N и M для любого сѣченія трубы.

Для угловъ φ отъ 0 до α

$$M_1 = \gamma r^3 \left[\frac{\pi - \alpha}{4} \sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4 \sin \alpha} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \right] \dots \dots \dots (40)$$

и для φ отъ α до π

$$M_2 = \gamma r^3 \left[-\frac{\alpha}{4} \sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] \dots \dots \dots (41)$$

2. Вліяніе собственного вѣса трубы.

Не трудно показать, что для трубы лежащей на фундаментѣ, изгибающіе моменты отъ собственного вѣса трубы находятся въ точно такомъ же соотношеніи съ изгибающими моментами отъ вѣса воды, какъ для трубы, лежащей на землѣ. Обозначимъ, какъ и въ предыдущемъ, черезъ δ вѣсъ стѣнки кольца единичной длины вдоль оси трубы на ед. длины его срединной линіи.

Проектируя силы, дѣйствующія на часть незаполненного водой полукольца AB , соотвѣтствующую центральному углу φ , на направленіе N и суммируя ихъ моменты относительно точки C (черт. 12) получимъ вмѣсто уравненій (32)

$$N - N_0 \cos \varphi + P \cos \hat{PN} = 0.$$

$$M + (M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) + Pp = 0,$$

гдѣ $P \cos \hat{PN}$ и Pp означаютъ проекцію и моментъ силъ, дѣйствующихъ не только на внѣшней поверхности трубы, какъ въ предыдущемъ случаѣ, но сюда входитъ и вѣсъ δ .

Изъ этихъ уравненій

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 \cos \varphi - P \cos \hat{P}N = N_0 \cos \varphi + A_1 \\ M &= N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 - Pp = N_0 r (1 - \cos \varphi) - M_0 + B_1 \end{aligned} \right\} (42)$$

Примѣняя въ этомъ случаѣ тотъ-же методъ, что въ предыдущемъ, получимъ уравненія, аналогичныя (35) и (37), гдѣ лишь вмѣсто A и B будутъ A_1 и B_1 .

Для опредѣленія N_0 воспользуемся уравненіемъ (35). Вычислимъ входящій въ него интегралъ $\int_0^\pi B \cos \varphi d\varphi$ для даннаго случая.

Такъ какъ $B_1 = -Pp$ и $A_1 = -P \cos \hat{P}N$, то найдемъ сначала выраженіе этихъ подынтегральныхъ функций, какъ и раньше, отдѣльно для значеній φ отъ 0 до α и отъ α до π .

Для φ отъ 0 до α

$$P \cos \hat{P}N = -r\delta \varphi \sin \varphi + k_1 r \sin^2 \varphi.$$

$$\begin{aligned} Pp &= \int_0^\pi r^2 d\psi \delta (\sin \varphi - \sin \psi) - \frac{k_1 r^2}{2} \sin^2 \varphi = \\ &= \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - \frac{k_1 r^2}{2} \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Относительное давленіе k_1 на горизонтальную проекцію соприкасающейся съ фундаментомъ поверхности трубы найдемъ изъ условій равновѣсія всей трубы. Такъ какъ на трубу дѣйствуютъ только ея вѣсъ и давленіе фундамента, то изъ уравненія проекцій силъ на вертикальную ось $k_1 = \frac{\pi \delta}{\sin \alpha}$.

Для угловъ φ большихъ α

$$P \cos \hat{P}N = -r\delta \varphi \sin \varphi + k_1 r \sin \alpha \sin \varphi.$$

$$Pp = \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - k_1 r^2 \sin \alpha \left(\sin \varphi - \frac{\sin \alpha}{2} \right).$$

Теперь можно вычислить необходимые намъ интегралы.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi B_1 \cos \varphi d\varphi &= - \int_0^\pi Pp \cos \varphi d\varphi = - \left\{ \delta r^2 \int_0^\pi (\varphi \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \cos \varphi) d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_1 r^2}{2} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi - k_1 r^2 \sin \alpha \int_\alpha^\pi \left(\sin \varphi \cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{2} \cos \varphi \right) d\varphi \right\} = - \pi \delta r^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это въ уравненіе (35) найдемъ:

$$N_0 = -\delta r \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right) (43)$$

Для опредѣленія M_0 это N_0 надо подставить въ уравненіе (37). Входящіе въ него интегралы

$$\int_0^\pi A_1 d\varphi = - \int_0^\pi P \cos \hat{P}N d\varphi = - \left\{ - \int_0^\pi r \delta \varphi \sin \varphi d\varphi + k_1 r \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. - k_1 r \sin \alpha \int_\alpha^\pi \sin \varphi d\varphi \right\} = - \pi \delta r \left(\frac{\alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2} \cos \alpha \right)$$

и

$$\int_0^\pi B_1 d\varphi = - \int_0^\pi P p d\varphi = - \left\{ \delta r^2 \int_0^\pi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) d\varphi - \right. \\ \left. - \frac{k_1 r^2}{2} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi d\varphi - k_1 r^2 \sin \alpha \int_\alpha^\pi \left(\sin \varphi - \frac{\sin \alpha}{2} \right) d\varphi \right\} = \\ = \pi \delta r^2 \left(1 + \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} - \frac{\pi - \alpha}{2} \sin \alpha \right).$$

Введя это и вычисленные раньше коэффициенты при N_0 и M_0 въ уравненіи (37), получимъ

$$\frac{12}{e^2} \pi M_0 = - \frac{12 r^3}{e^2} \pi \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right) + \pi \left[- \delta \left(\frac{\alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) + \right. \\ \left. + \frac{12 r^2}{e^2} \delta \left(1 + \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{\alpha}{4 \sin \alpha} - \frac{\pi - \alpha}{2} \sin \alpha \right) \right]$$

а отсюда

$$M_0 = \delta r^2 \left[\left(\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{4 \sin \alpha} + \frac{1 - (\pi - \alpha) \sin \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{e^3}{12 r^2} \left(\frac{\alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \right] (44)$$

Съ той-же примѣрно точностью, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, можно пренебречь въ выраженіи M_0 слагаемымъ, зависящимъ отъ толщины стѣнки e . При $\alpha = 0$

$$M_0 = 1,5 \delta r^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{e^2}{12 r^2} \right)$$

т. е. ошибка такая-же, какъ при опредѣленіи M_0 отъ вѣса воды. При $\alpha = 45^\circ$ погрѣшность меньше, чѣмъ при опредѣленіи M_0 отъ вѣса воды.

$$M_0 = 0,6414 \delta r^2 \left(1 - 1,4 \frac{e^2}{12 r^2} \right)$$

и при $\frac{e}{r} = \frac{1}{10}$ ошибка $\approx 0,12\%$.

Пренебрегая этой поправкой, получимъ для M_0 упрощенное выраженіе:

$$M_0 = \delta r^2 \left[\frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{4 \sin \alpha} + \frac{1 - (\pi - \alpha) \sin \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right] . \quad (45)$$

Функция отъ α , стоящая въ скобкахъ въ этой формулѣ, отличается отъ таковой же въ формулѣ (39) только множителемъ 2.

Если M_0 по форм. (45), вмѣстѣ съ найденнымъ выраженіемъ Pp , мы введемъ въ (42), то получимъ формулы для вычисленія изгибающихъ моментовъ, которыя будутъ отличаться отъ (40) и (41) точно такъ, какъ (8) отличается отъ (3).

Слѣдовательно, для полученія изгибающаго момента въ какомъ-либо сѣченіи стѣнки отъ совмѣстнаго дѣйствія вѣса воды и вѣса трубы, моменты, вычисленные по форм. (40) и (41), надо умножать на коэффициентъ

$$\mu = 1 + 2 \frac{\delta}{\gamma r} = 1 + 2 \frac{\gamma_1 e}{\gamma r}$$

гдѣ γ_1 , вѣсъ единицы объема матеріала стѣнки трубы.

Водопроводныя трубы безнапорныхъ водоводовъ придется рассчитывать въ такомъ именно предположеніи, т. к. это наиболѣе неблагоприятный для нихъ случай нагрузки.

При выводѣ нашихъ формулъ мы не дѣлали разницы между радіусомъ срединной линіи и внутреннимъ радіусомъ трубы, такъ какъ было уже выяснено при расчетѣ трубы лежащей на землѣ, что погрѣшность, происходящая отъ этого для тонкостѣнныхъ трубъ не велика, если въ расчетныхъ формулахъ подразумѣвать подъ r радіусъ срединной линіи.

Для опредѣленія деформаций трубы воспользуемся дифференціальнымъ уравненіемъ изогнутой оси кольца

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{r^2 M}{EJ} (B)$$

Изгибающій моментъ M выражается разнo для φ меньшаго и φ большаго α .

$$\begin{aligned} \text{При } \varphi \leq \alpha \quad M_1 = \gamma r^3 \mu \left[\frac{\pi - \alpha}{4} \sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4 \sin \alpha} \sin^2 \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] (40') \end{aligned}$$

$$\text{При } \varphi \geq \alpha \quad M_2 = \gamma r^3 \mu \left[-\frac{\alpha}{4} \sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} - \left(\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] \dots \dots \dots (41')$$

Обозначимъ для краткости

$$\frac{\pi - \alpha}{4} \sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} = S; \quad -\frac{\alpha}{4} \sin \alpha - \frac{3 \sin \alpha \cos \alpha + \alpha}{8 \sin \alpha} = S_1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} = P \qquad \frac{\pi}{2} = R_1$$

$$\frac{\pi}{4 \sin \alpha} = R$$

Вводя въ уравненіе (B) моментъ по форм. (40') и рѣшая его получимъ для

$$\varphi \leq \alpha \quad \eta_1 = \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ} \left\{ S - \frac{1}{2} P \varphi \sin \varphi + \frac{R}{3} (1 + \cos^2 \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{\varphi}{8} \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi \right\}$$

Произвольныя постоянныя C_1 и C_2 опредѣлимъ изъ условий

$$\left[\frac{d\eta}{d\varphi} \right]_{\varphi=0} = 0 \quad \text{и} \quad [\eta]_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Изъ этихъ уравненій найдемъ, что $C_2 = 0$ и

$$C_1 \cos \alpha = S - \frac{1}{2} P \alpha \sin \alpha + \frac{R}{3} (1 + \cos^2 \alpha) + \frac{\alpha^2}{8} \cos \alpha - \frac{\alpha}{8} \sin \alpha - \frac{1}{16} \cos \alpha \quad . \quad (46)$$

Слѣдовательно при $\varphi \leq \alpha$

$$\eta_1 = \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ} \left\{ S - \frac{1}{2} P \varphi \sin \varphi + \frac{R}{3} (1 + \cos^2 \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{\varphi}{8} \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - C_1 \cos \varphi \right\} \dots \dots \dots (47)$$

гдѣ C_1 опредѣляется для даннаго α по форм. (46).

Если въ урав. (B) вмѣсто M подставимъ M_2 по форм. (41'), то рѣшеніе его опредѣлитъ деформации трубы для угловъ $\varphi \geq \alpha$. Въ этихъ предѣлахъ

$$\eta_2 = \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ} \left\{ S_1 - \frac{1}{2} P \varphi \sin \varphi + R_1 \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{\varphi}{8} \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi - C_1' \cos \varphi + C_2' \sin \varphi \right\}$$

Здѣсь постоянныя C_1' и C_2' надо опредѣлять изъ условій, что

$$\left. \frac{d\eta_2}{d\varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0 \text{ и } |\eta_2|_{\varphi=\alpha} = 0.$$

Изъ этихъ условій $C_2' = \frac{\pi}{12} \sin^2 \alpha$ и

$$C_1' \cos \alpha = S_1 - \frac{1}{2} P \alpha \sin \alpha + R_1 \left(\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \right) + \\ + \frac{\alpha^2}{8} \cos \alpha - \frac{\alpha}{8} \sin \alpha - \frac{1}{16} \cos \alpha + \frac{\pi}{12} \sin^3 \alpha \dots (48)$$

слѣдовательно при $\varphi \geq \alpha$

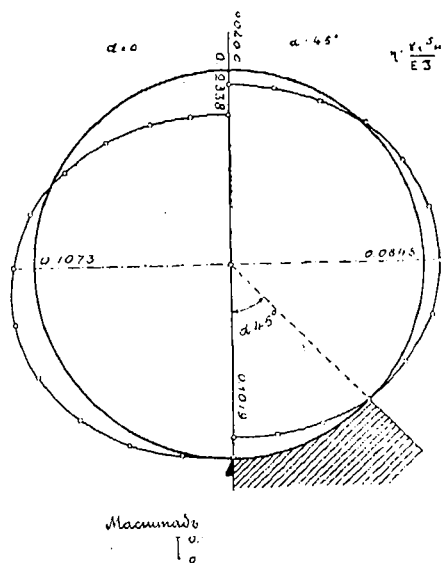
$$\eta_2 = \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ} \left\{ S_1 - \frac{1}{2} P \varphi \sin \varphi + R_1 \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{\varphi}{8} \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi + \frac{\pi}{12} \sin^2 \alpha \sin \varphi - C_1' \cos \varphi \right\}. (49)$$

гдѣ C_1 опредѣляется по (48).

Вычисленныя по этимъ формуламъ значенія $\eta = \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ}$ для $\alpha = 0$ и $\alpha = 45^\circ$ даны въ таблицѣ IV и нанесены на черт. 13, изображающемъ деформированныя половины сѣченія трубы для каждого изъ упомянутыхъ значеній α .

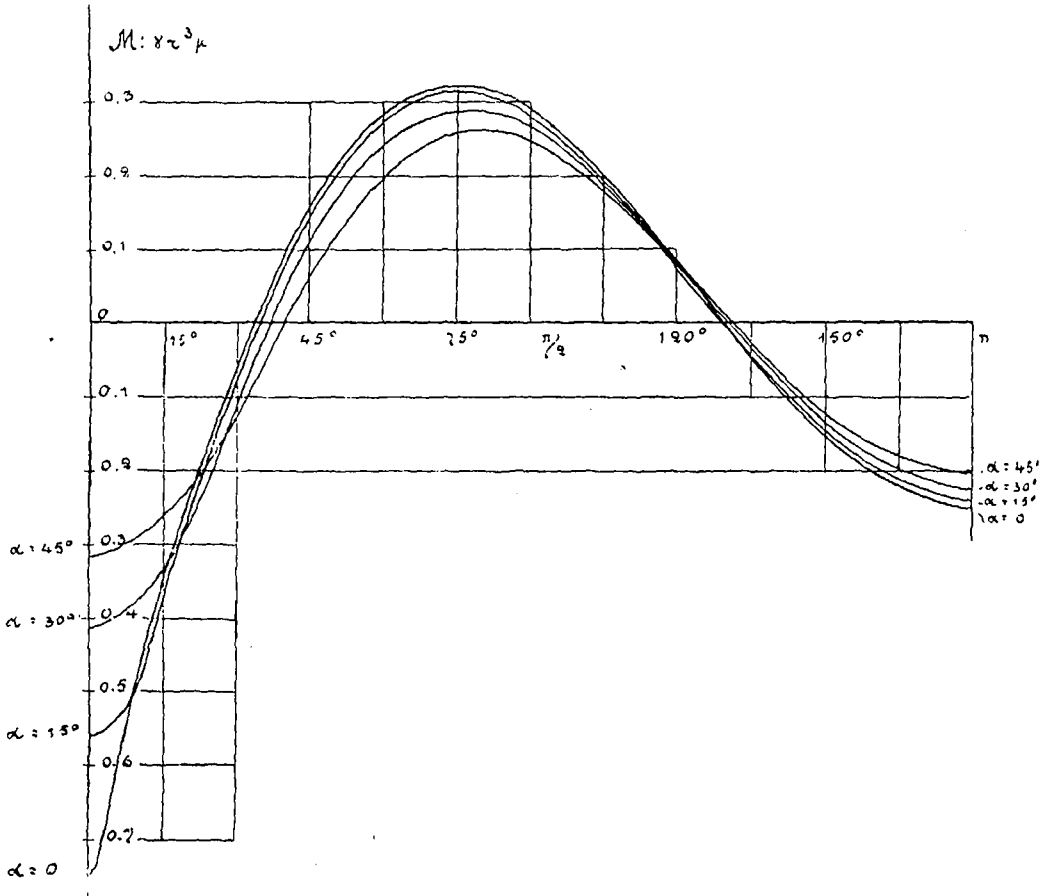
Въ таблицѣ V даны наибольшіе изгибающіе моменты и деформации для разныхъ угловъ $\alpha: 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ и 45° , въ таблицѣ VI формулы (40') и (41') для вычисленія моментовъ и (47) и (49) для вычисленія деформаций съ подсчитанными уже для этихъ же угловъ α коэффициентами.

Изъ этихъ таблицъ, а еще лучше по кривымъ на черт. 14 изображающемъ измѣненіе отношенія $M: \gamma r^3 \mu$ при измѣненіи угла φ видно, что M имѣетъ на протяженіи отъ 0 до π три максимума, причемъ наибольшій соотвѣтствуетъ $\varphi = 0$. При измѣненіи ширины фундамента (т. е. угла α) два изъ нихъ мѣняются мало, третій—наибольшій, наоборотъ, измѣняется сильно. Отсюда можно сдѣлать за-



Черт. 13.

ключеніе, что если проектируемая труба будетъ имѣть постоянную толщину стѣнки и не будетъ усилена въ нижней своей части, фундаментъ слѣдуетъ дѣлать возможно шире, чтобы хотя примѣрно сравнять наибольшіе моменты. Если же трубу предполагается усилить въ нижней части, то, такое усиленіе, независимо отъ ширины фундамента, бесполезно распространять больше чѣмъ на $15-20^\circ$ въ каж-



Черт. 14.

дую сторону отъ нижней производящей, такъ какъ при φ около $15^\circ-20^\circ$ изгибающій моментъ уже примѣрно равенъ наибольшему положительному M , который соответствуетъ $\varphi \approx 75^\circ$ (точное значеніе этого φ можетъ быть опредѣлено рѣшеніемъ уравненія $\operatorname{tg} \varphi = (\pi - \varphi) : \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right)$) потому, что толщина стѣнки трубы въ неусиленной части будетъ опредѣляться именно этимъ моментомъ:

Впрочемъ, къ случаю трубы усиленной въ нижней части выведенныя формулы примѣнимы лишь съ оговоркой, что расчетъ не будетъ вполне точенъ, такъ какъ площадь сѣченія стѣнки ω и ея моментъ

инерціи J не будутъ постоянны. Однако въ виду того, что усиляется обыкновенно лишь незначительная часть окружности трубы, можно удовольствоваться и такимъ расчетомъ, тѣмъ болѣе, что точный будетъ, конечно, гораздо сложнѣе.

Итакъ, при постоянной толщинѣ стѣнки не усиленной трубы расчетъ слѣдуетъ производить по сѣченію соотвѣтствующему $\varphi = 0$.

Примѣръ 15. Провѣримъ расчетомъ трубу, изображенную справа на черт. 11. Труба эта стальная, $r=90$ см. Уголъ $\alpha=50^\circ$. При этомъ углѣ коэффиціенты $S=0,05$; $P=0,348$ и $R=1,03$. Наибольшій изгибающій моментъ при $\varphi=0$ вычислимъ по форм. (40').

$$M = -0,298 \gamma r^3 \mu = -0,298 \cdot 10^{-3} \cdot 7,29 \cdot 10^5 \left(1 + 2 \frac{7,85 \cdot 1}{90} \right) \approx -255 \text{ кгp. см.}$$

При толщинѣ стѣнки въ 1 см. напряженіе

$$\sigma = \frac{6M}{e^2} = \frac{6 \cdot 255}{1} = 1530 \text{ кгp./см}^2.$$

Какъ видно, напряженіе превосходитъ допустимыя даже и для стали нормы; хотя дѣйствительныя напряженія будутъ нѣсколько меньше благодаря присутствію хомутовъ, притягивающихъ трубу къ фундаменту и разсмотрѣнный нами случай нагрузки этой трубы, нормально находящейся подъ внутреннимъ давленіемъ, понижающимъ въ данномъ случаѣ напряженія, исключительно неблагопріятенъ, все же слѣдовало бы утолстить стѣнки трубы.

Примѣръ 16. Желѣзная труба діаметромъ 1 м. Уголъ охвата фундамента 90° , т. е. $\alpha=45^\circ$. Толщина стѣнки $e=0,6$ мм.

Наибольшій изгибающій моментъ по табл. V при $\varphi=0$

$$M = -0,3207 \gamma r^3 \mu = -0,3207 \cdot 10^{-3} \cdot 1,25 \cdot 10^5 \left(1 + 2 \frac{7,85 \cdot 0,6}{50} \right) = -47,6 \text{ кгp. см.}$$

Наибольшее напряженіе $\sigma = \frac{6 \cdot 47,6}{0,36} = 793 \text{ кгp./см}^2$

Какъ видно напряженіе не велико и можно бы уменьшить толщину стѣнки. Но такъ какъ по соображеніямъ конструктивнаго характера толщина 0,6 см. является предѣльною, то не измѣняя ее можно уменьшить уголъ α . Возьмемъ на примѣръ $\alpha=30^\circ$. Такъ какъ для этой ширины фундамента по табл. V наибольшій изгибающій моментъ $M = -0,4201 \gamma r^3 \mu$, то теперь напряженіе будетъ

$$\sigma = 793 \cdot \frac{4201}{3207} \approx 1040 \text{ кгp./см}^2.$$

При расчетѣ мы не обращали вниманія на нормальныя усилія. Подсчитаемъ ихъ для второго примѣра.

Отъ вѣса воды по форм. (36) для $\alpha=45^\circ$ растягивающее нормальное усиліе

$$N = \gamma r^2 \left(\frac{5}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{6} \right) = 10^{-3} \cdot 2,5 \cdot 10^3 \left(\frac{5}{4} + \frac{0,5}{6} \right) = 3,3 \text{ кгр.}$$

Отъ собственного вѣса трубы по форм. (43) сжимающее

$$N = - \delta r \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{3} \right) = -0,6 \cdot 0,00785 \cdot 50 \left(\frac{1}{2} - \frac{0,5}{3} \right) = -0,079 \text{ кгр.}$$

Очевидно, что такія усилія не играютъ никакой роли.

3. Внутреннее равномерное давленіе.

Переходя къ расчету трубъ, находящихся подъ внутреннимъ равномернымъ давленіемъ надо обратить вниманіе на слѣдующее. Такъ какъ изгибающіе моменты отъ вѣса воды и собственного вѣса трубы велики, а деформациі въ предѣлахъ подпертой поверхности при малыхъ α ничтожны, то моменты возстановляющіе форму трубы и понижающіе напряжения не играютъ при такихъ α при расчетѣ трубы той существенной роли, какую они играли въ разсмотрѣнныхъ раньше нами случаяхъ, когда труба опиралась на землю. Если труба опирается по нижней производящей, то моментъ въ сѣченіи по этой производящей, т. е. $M = -0,75 \gamma r^3 \mu$ (табл. V), будетъ одинъ и тотъ же какъ для трубы заполненной водой иодъ давленіемъ, такъ и безъ давленія, такъ какъ въ этомъ сѣченіи, остающемся при деформациі на мѣстѣ, плечо нормального усилія N —равно нулю. Въ такомъ же положеніи при любой ширинѣ фундамента, т. е. любомъ α , будетъ сѣченіе $\varphi = \alpha$, такъ какъ эта точка при деформациі не можетъ перемѣститься. Въ этихъ сѣченіяхъ къ напряжениямъ отъ изгибающаго момента M , вычисленнаго по формулѣ (40') или (41'), прибавятся только растягивающія напряжения отъ равномернаго внутренняго давленія. Если мы сравнимъ данныя таблицы I и V, то увидимъ, что даже для $\alpha=30^\circ$ наибольшій изгибающій моментъ для трубы лежащей на такомъ фундаментѣ примѣрно въ 3 раза больше чѣмъ для трубы уложенной прямо на землю (зарытой до половины высоты), а соотвѣтствующее радіальное перемѣщеніе η на 20% меньше. При $\alpha=15^\circ$ эти отношенія еще больше: моментъ больше почти въ 4 раза, а деформациа меньше въ 2,5 раза. Такъ какъ вліяніе равномернаго внутренняго давленія на величину изгибающаго момента $M + \eta N$ уменьшается съ уменьшеніемъ деформаций η и увеличеніемъ моментовъ M , то понятно, что совокупность этихъ вліяній при малыхъ α позволяетъ при расчетѣ просто суммировать напряжения, вычисленные по изгибающему моменту для безнапорной трубы съ напряжениями отъ равномернаго внутренняго давленія.

При большой ширинѣ фундамента такой расчетъ можетъ повести къ грубымъ ошибкамъ, такъ какъ здѣсь вліяніе момента $N\eta$ становится уже не пренебрегаемымъ. Поэтому займемся теперь опредѣленіемъ деформаций трубы лежащей на фундаментѣ и заполненной водой подъ давленіемъ k атмосферъ. Такъ какъ интереснымъ для расчета является наибольшій изгибающій моментъ, который по прежнему останется въ сѣченіи $\varphi = 0$, то деформации η опредѣлимъ лишь для части трубы опирающейся на фундаментъ.

Въ этихъ предѣлахъ изгибающіе моменты отъ вѣса воды наполняющей трубу и ея собственнаго вѣса опредѣляются по форм. (40')

$$M = \gamma r^3 \mu \left(S - P \cos \varphi + R \sin^2 \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) . . . (40')$$

При равномерномъ внутреннемъ давленіи къ этому моменту въ каждомъ сѣченіи прибавится моментъ $N\eta = kr\eta$, гдѣ k напряженіе внутренняго давленія ¹⁾.

Дифференціальное уравненіе изогнутой оси разсматриваемаго кольца въ данномъ случаѣ будетъ

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{r^3}{EJ} \{M + N\eta\} (B')$$

Введя сюда M по (40') и $N\eta = kr\eta$ получимъ

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{kr^3}{EJ}\right) \eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left(S - P \cos \varphi + R \sin^2 \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right).$$

Обозначимъ по прежнему $1 - \frac{kr^3}{EJ} = A$. Когда это $A < 0$,

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{S}{A} + \frac{P \cos \varphi}{1-A} + \frac{R}{2} \left(\frac{\cos 2\varphi}{4-A} + \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{1-A} \left(\frac{\cos \varphi}{1-A} + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{e^{\varphi \sqrt{-A}}}{2} C_1 - \frac{e^{-\varphi \sqrt{-A}}}{2} C_2 \right\}$$

постоянныя C_1 и C_2 , опредѣлимъ изъ условій, что

$$\left| \frac{d\eta}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \text{ и } |\eta|_{\varphi=\alpha} = 0.$$

По первому изъ этихъ условій $C_1 + C_2 = 0$. Если введемъ это въ найденное выраженіе η и $\frac{e^{\varphi \sqrt{-A}} - e^{-\varphi \sqrt{-A}}}{2}$ замѣнимъ гиперболиче-

¹⁾ Какъ и раньше k давленіе, равномерно распредѣленное по срединной линіи сѣченія трубы.

скимъ косинусомъ, то

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{S}{A} + \frac{P \cos \varphi}{1-A} + \frac{R}{2} \left(\frac{\cos 2\varphi}{4-A} + \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{1-A} \left(\frac{\cos \varphi}{1-A} + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} \right) + C_1 \cos h\varphi \sqrt{-A} \right\} \dots (50)$$

Для вычисленія C_1 по условію $|\eta|_{\varphi=\alpha} = 0$ получимъ

$$C_1 = - \frac{1}{\cos h\alpha \sqrt{-A}} \left\{ \frac{S}{A} + \frac{P \cos \alpha}{1-A} + \frac{R}{2} \left(\frac{\cos 2\alpha}{4-A} + \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{1-A} \left(\frac{\cos \alpha}{1-A} + \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \right) \right\} \dots (51)$$

Для расчета представляетъ интересъ лишь наибольшій изгибающій моментъ, соотвѣтствующій $\varphi = 0$; для этого сѣченія

$$\eta = \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ} \left\{ \frac{S}{A} + \frac{P}{1-A} + \frac{2R}{A(4-A)} + \frac{1}{(1-A)^2} + C_1 \right\} \dots (52)$$

По причинамъ, указаннымъ при разсмотрѣніи напорной трубы лежащей на землѣ, мы не будемъ останавливаться на рѣшеніи уравненія (B') для положительныхъ значеній коэффиціента A .

Формулы (51) и (52) слишкомъ сложны для расчета. Мы замѣнимъ ихъ приближенными, не отличающимися по существу отъ той, которую вывели для трубы, лежащей на землѣ и воспользуемся (51) и (52) для выясненія точности этихъ приближенныхъ формулъ.

Положимъ, что въ предѣлахъ подпертой поверхности трубы, уравненіе изогнутой срединной линіи при отсутствіи напора будетъ

$$\eta = a \cos \frac{\pi \varphi}{2\alpha} \dots (a)$$

По основному дифференціальному уравненію $\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{r^2 M}{EI}$, введя вмѣсто η его выраженіе по (a) получимъ

$$\frac{r^2 M}{EI} = a \left(1 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \right) \cos \frac{\pi \varphi}{2\alpha}$$

или

$$\frac{\eta}{M} = \frac{r^2}{EI} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}}$$

Какъ видно въ этомъ случаѣ отношеніе $\frac{\eta}{M}$ удовлетворяетъ условію, при которомъ возможно примѣненіе упрощеннаго способа вычисленія вліянія внутренняго давленія. При разсмотрѣніи напорной трубы лежащей на землѣ было доказано, что при такихъ условіяхъ и моменты и деформаціи для трубы сплюсненной и растягиваемой внутреннимъ давленіемъ, опредѣляются по соотвѣтствующимъ величинамъ для трубы только сплюсываемой, умноженіемъ на коэффиціентъ $\xi = \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}}$, гдѣ нормальное растягивающее усилие $N = kr$. Введя

въ этотъ коэффициентъ ξ найденное выше выраженіе отношенія $\frac{\eta}{M}$ получимъ:

$$\xi = \frac{1}{1 - \frac{kr^3}{EI} \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}}} \dots \dots \dots (53)$$

Вычисляя $\frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}}$ для разныхъ значеній α получимъ для:

$$\alpha = 15^\circ \dots \xi = \frac{1}{1 + 0,0285 \frac{kr^3}{EI}}$$

$$\alpha = 30^\circ \dots \xi = \frac{1}{1 + 0,125 \frac{kr^3}{EI}}$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \xi = \frac{3EI}{3EI + kr^3}.$$

Какъ видно коэффициентъ ξ при $\alpha = 45^\circ$ получился точно такой, какъ для напорной трубы лежащей на землѣ. Это можно было предполагать, такъ какъ отношеніе $\frac{\eta}{M}$ по табл. IV приблизительно постоянно и равно $\frac{1}{3}$.

Чтобы получить деформацию η при $\varphi = 0$ для напорной трубы при какомъ-нибудь α надо соответствующую деформацию для безнапорной трубы множить на коэффициентъ ξ .

О степени точности этого приближенного способа можно судить по прилагаемой табличкѣ, гдѣ приведены подсчитанные этимъ путемъ, а также и по точнымъ формуламъ (51) и (52) значенія $\eta: \frac{\gamma r^3 \mu}{EI}$ для $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ и 45° для разныхъ значеній $A = 1 - \frac{kr^3}{EI}$. Какъ видно точность эта болѣе чѣмъ достаточна. Лишь для очень большихъ давленій (для большихъ (A)) ошибка превышаетъ 1% .

A	$\alpha = 15^\circ$		$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$	
	точно	прибл.	точно	прибл.	точно	прибл.
0 ¹⁾	0.0183	0.0183	0.0503	0.0503	0.0765	0.0764
— 1	0.0179	0.0178	0.0453	0.0453	0.0613	0.0611
— 5	0.0160	0.0160	0.0322	0.0323	0.0343	0.0340
— 10	0.0142	0.0143	0.0236	0.0238	0.0221	0.0219
— 20	0.0116	0.0117	0.0159	0.0157	0.0130	0.0127

¹⁾ Для вычисленія η при $A = 0$ формула (52) не пригодна; для этого случая надо снова рѣшать ур. (B'). Рѣшеніе его:

$$\eta = \frac{\gamma r^3 \mu}{EI} \left\{ \frac{S \varphi^2}{2} + P \cos \varphi + R \left(\frac{\varphi^2}{4} - \frac{\sin^2 \varphi}{4} \right) + \frac{\varphi \sin \varphi}{2} + \cos \varphi + C_1 \omega + C_2 \right\}.$$

Постоянныя C_1 и C_2 найдутся по прежнему изъ условий, что $\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 0$, при $\varphi = 0$ и что $\eta = 0$, при $\varphi = \alpha$.

Точность эта вообще больше при малых углах α , что понятно, такъ какъ очевидно уравненіе $\eta = \alpha \cos \frac{\pi^2}{2\alpha}$ для большихъ α , благодаря болѣе широкимъ предѣламъ измѣненія φ , хуже подходитъ къ истинному виду изогнутой срединной линіи. Въ большинствѣ случаевъ приближенно вычисленное η оказывается меньше истиннаго, т. е. коэффициентъ ξ въ дѣйствительности долженъ быть больше, чѣмъ вычисленный по форм. (53). Если бы и при приближенномъ методѣ расчета напорныхъ трубъ опредѣлять изгибающій моментъ, прибавляя къ соотвѣтствующему моменту M въ безнапорной трубѣ моментъ $N\eta = k\eta$, то преуменьшеніе при расчетѣ η давало бы запасъ прочности, такъ какъ M и η всегда разныхъ знаковъ, но 1) η приближенное не всегда меньше η истиннаго, 2) такое усложненіе затруднило бы расчетъ и при малыхъ углахъ α , благодаря большому M , мало отразилось бы на его точности. Но при большихъ углахъ α (45° и близкихъ къ нему) η приближенное опредѣленно меньше η истиннаго. Можно отчасти исправить происходящую благодаря этому ошибку въ опредѣленіи изгибающаго момента для напорной трубы не усложняя расчета тѣмъ, что для угловъ α большихъ 45° , гдѣ M относительно не велико, а потому и ошибка можетъ быть значительна, брать коэффициентъ ξ болѣе болѣе, чѣмъ по форм. (53), и вводить въ расчетъ умноженный на этотъ ξ моментъ M .

Подобное упрощеніе, преувеличивающее толщину стѣнокъ трубы, при большихъ углахъ α позволительно ввести еще потому, что по мѣрѣ увеличенія угла α расчетъ нашъ становится все менѣе точнымъ, такъ какъ принятая нами съ самаго начала гипотеза о равномерномъ распредѣленіи давленія по горизонтальной проекціи подпертой поверхности трубы удовлетворительна лишь при относительно небольшой ширинѣ фунтаментѣ.

Примѣръ 17. Опредѣлимъ наибольшее напряженіе въ трубѣ, лежащей на фундаментѣ при $\alpha = 45^\circ$. Радиусъ $r = 50$ см., $e = 0.6$ см. Труба желѣзная. (Труба примѣра 16). Внутреннее равномерное давленіе $p = 5$ ат. Раньше было вычислено наибольшее напряженіе въ сѣченіи $\varphi = 0$ отъ вѣса воды и трубы: $\sigma = 793$ кгр./см.². Отъ равномернаго внутренняго давленія изгибающій моментъ, а съ нимъ и напряженіе отъ изгиба уменьшатся на $\xi = \frac{3EI}{3EI + kr^3}$. Въ данномъ случаѣ это $\xi = 0,157$. Слѣдовательно наибольшее напряженіе будетъ

$$\sigma = \frac{kr}{e} + \xi \frac{6M}{e^2} = \frac{5 \cdot 50}{0,6} + 0,157 \cdot 793 = 416 + 125 = 541 \text{ кгр./см.}^2$$

Если мы воспользуемся точной формулой, то получимъ слѣдующее:

$$A = 1 - \frac{kr^3}{EI} = -15,15.$$

При $\alpha = 45^\circ = 0,7854$; $\alpha \sqrt{-A} = 0,7854 \cdot 3,892 = 3,057$; $\cos \alpha \sqrt{-A} = 10,66$.

По таблицѣ VI для $\alpha = 45^\circ$ и $\varphi < \alpha$, $S = 0,0126$; $P = \frac{1}{3}$; $R = 1,1107$.

По форм. (51)
$$C_1 = -\frac{1}{10,66} \left\{ -\frac{0,0126}{15,15} + \frac{0,7071}{3 \cdot 16,15} - \frac{0,5553}{15,15} + \right. \\ \left. + \frac{1}{16,15} \left(\frac{0,7071}{15,15} + 0,2777 \right) \right\} = 0,00028.$$

По форм. (52)
$$\eta = \frac{\gamma^{5\mu}}{EI} \left\{ -\frac{0,0126}{15,15} + \frac{1}{3 \cdot 16,15} - \frac{2,2214}{15,15 \cdot 19,15} + \right. \\ \left. + \frac{1}{16,15^2} + 0,00028 \right\} = 0,0163 \frac{\gamma^{5\mu}}{EI},$$

такъ какъ
$$\mu = 1 + 2 \frac{7,85 \cdot 0,6}{50} = 1,188,$$

то
$$\eta = 0,156 \text{ см.}$$

Слѣдовательно изгибающій моментъ при внутреннемъ давленіи $M = -47,6^1) + 0,156 \cdot 5 \cdot 50 = -8,6$ кгр. см., тогда какъ при упрощенномъ вычисленіи этотъ моментъ $M = -47,6 \xi = -7,5$.

Точно наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{5 \cdot 50}{0,6} + \frac{6 \cdot 8,6}{0,36} = 416 + 143 = 559 \text{ кгр./см.}^2,$$

что несущественно отличается отъ вычисленнаго раньше $\sigma = 541$ кгр./см.². Если бы и при приблизительномъ методѣ опредѣлять изгибающій моментъ при равномерномъ внутреннемъ давленіи прибавленіемъ къ моменту M въ отсутствіи этого давленія приближенно опредѣленнаго слагаемаго $N\eta$, гдѣ $\eta = \xi \eta_0$, а η_0 радіальное перемѣщеніе въ отсутствіи давленія, то суммарный моментъ $M = -9,1$ кгр. см., т. е. ошибка была бы больше и при томъ въ большую сторону. Впрочемъ, на величинѣ наибольшаго напряженія это отразилось бы мало.

Для этой трубы въ отсутствіи внутренняго давленія лишь отъ вѣса воды и трубы было вычислено напряженіе $\sigma = 793$ кгр./см.², т. е. оказывается, что внутреннее давленіе понижаетъ напряженія. Легко убѣдиться, что условіе (17), при которомъ внутреннее давленіе можетъ понижать напряженія, для даннаго случая удовлетворено.

Положимъ теперь, что эта-же труба лежитъ на фундаментѣ при $\alpha = 30^\circ$.

¹⁾ См. примѣръ 16.

Изгибающий моментъ приблизительно можно опредѣлить умноженіемъ момента въ отсутствіи напора на ξ , при

$$\xi = \frac{1}{1 + 0,125 \cdot 16,15} = 0,331.$$

По таблицѣ V, $M = -0,4201 \gamma r^3 \mu$ и слѣдовательно

$$M\xi = -0,4201 \cdot 10^{-3} \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot 1,188 \cdot 0,331 \approx -20,6 \text{ кгр. см.}$$

При вычисленіи по форм. (51) и (52) получимъ моментъ при внутреннемъ давленіи—18,1 кгр. см. Разница не велика.

При такой ширинѣ фундамента наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{5 \cdot 50}{0,6} + \frac{6 \cdot 18,1}{0,36} = 416 + 302 = 718 \text{ кгр./см.}^2.$$

(При $\varphi = \alpha$ напряженіе будетъ меньше. По табл. V, $M = -0,1192 \gamma r^3 \mu = -17,8$ кгр. см.), т. е. и при такомъ α отъ внутренняго давленія наибольшее напряженіе значительно понижается; для безнапорной трубы въ примѣрѣ 16 было вычислено при $\alpha = 30^\circ \dots \sigma = 1040$ кгр./см.². Если бы мы опредѣлили напряженіе суммируя напряженіе отъ сплющиванья съ напряженіемъ отъ равномернаго растяженія, то получили бы $\sigma = 1040 + 416 = 1456$ кгр./см.², т. е. въ два раза больше точно вычисленнаго.

Для этой же трубы при $\alpha = 15^\circ$ и $\xi = 0,684$ изгибающий моментъ $M\xi = -0,5636 \cdot 0,684 \gamma r^3 \mu = -57,1$ кгр. см., а при точномъ вычисленіи по форм. (51) и (52) изгибающий моментъ при внутреннемъ равномерномъ давленіи $M = -53,4$ кгр. см., т. е. тоже мало отличается отъ вычисленнаго упрощенно. При такомъ α для сѣченія $\varphi = \alpha$ изгибающаго момента по табл. V, $M = -0,3853 \gamma r^3 \mu = -57,2$ кгр. см., очевидно въ этомъ сѣченіи напряженіе будетъ больше, чѣмъ въ сѣченіи $\varphi = 0$, такъ какъ къ напряженіямъ отъ изгиба (моментомъ $M = -57,2$ кгр. см.) прибавится одинаковое для всѣхъ сѣченій напряженіе отъ равномернаго растяженія.

При $\alpha = 15^\circ$ и 30° вычисленіе при приближенномъ методѣ изгибающихъ моментовъ по формулѣ $M + N\eta$, гдѣ $\eta = \xi\eta_0$ даетъ лучшие результаты, чѣмъ вычисленіи по формулѣ $M\xi$. Для $\alpha = 30^\circ$ и $\varphi = 0$: приближенное $M + \eta N = -17,6$ кгр. см., приближенное $M\xi = -20,6$ кгр. см., а точное $M + \eta N = -18,1$ кгр. см. Для $\alpha = 15^\circ$ и $\varphi = 0$: приближенное $M + \eta N = -53$ кгр. см., приближенное $M\xi = -57,1$ кгр. см., а точно $M + \eta N = -53,4$ кгр. см.

Примѣръ 19. Опредѣлимъ наибольшія напряженія для желѣзной клепанной трубы водовода при фундаментахъ: $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 15^\circ$ и $\alpha = 0$. Радиусъ трубы $r = 100$ см. Толщина стѣнки $e = 1,9$ см. Внутреннее давленіе $k = 5$ атм.

$$1) \text{ При } \alpha = 45^\circ \text{ коэффициентъ } \xi = \frac{3EI}{3EI + kr^3} = 0,424.$$

Для этой трубы при отсутствіи внутренняго давленія для $\varphi = 0$ по табл. V

$$\begin{aligned} M &= -0,3207 \gamma r^3 \mu = -0,3207 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \left(1 + 2 \frac{7,85 \cdot 1,9}{100} \right) = \\ &= -320,7 \cdot 1,299 = -416 \text{ кгр. см.} \end{aligned}$$

При внутреннем давлении $M\xi = -177$ кгр. см. При вычислении по формулѣ $M + N\xi\eta_0$ получили бы этотъ суммарный моментъ равнымъ -186 кгр. см. Въ сѣченіи $\varphi = \alpha$ по табл. V, $M = 0,0546 \gamma r^3 \mu$, т. е. меньше только что вычисленнаго $M\xi$.

Наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{500}{1,9} + \frac{6 \cdot 177}{3,61} = 263 + 294 = 557 \text{ кгр./см.}^2.$$

При точномъ вычислении по форм. (51) и (52), при $A = -3,069$, получили бы, что для $\varphi = 0$ при внутреннемъ давлении: $\eta = 0,0435 \frac{\gamma r^3 \mu}{EI} = 0,46$ см. Изгибающій моментъ въ этомъ-же сѣченіи $M = -416 + 0,46 \cdot 500 = -186$ кгр. см. и напряженіе $\sigma = 572$ кгр., т. е. мало отличающееся отъ $\sigma = 557$ кгр./см.².

2) При $\alpha = 30^\circ$ коэффициентъ $\xi = \frac{EI}{EI + 0,125 k r^3} = 0,663$.

Изгибающій моментъ при $\varphi = 0$ по таблицѣ V

$$M = -0,4201 \gamma r^3 \mu = -416 \cdot \frac{0,4201}{0,3207} = -546 \text{ кгр. см.}$$

При внутреннемъ давлении въ 5 атм. $M\xi = -546 \cdot 0,663 = -362$ кгр. см. При вычислении по формулѣ $M + N\xi\eta_0$ получили бы -348 кгр. см.

Въ сѣченіи $\varphi = \alpha$ по табл. V, $M = -0,1192 \gamma r^3 \mu$, что меньше -362 кгр. см.

Слѣдовательно наибольшее напряженіе

$$\sigma = 263 + \frac{6 \cdot 362}{3,61} = 865 \text{ кгр./см.}^2.$$

При вычислении по формуламъ (51) и (52) $\eta = 0,0373 \frac{\gamma r^3 \mu}{EI} = 0,394$ см.

Изгибающій моментъ при внутреннемъ давлении $M = -546 + 0,394 \cdot 100 \cdot 5 = -349$ кгр. см. и точно наибольшее напряженіе

$$\sigma = 263 + \frac{6 \cdot 349}{3,61} = 263 + 580 = 843 \text{ кгр./см.}^2.$$

Разница въ 22 кгр./см.² между приближенно и точно вычисленными напряженіемъ, величина не играющая важной роли по сравненію съ величиной самого напряженія 843 кгр./см.².

$$3) \text{ При } \alpha = 15^\circ \dots \xi = \frac{EI}{EI + 0,0285kr^3} = 0,896.$$

Изгибающій моментъ въ сѣченіи $\varphi = 0$ по табл. V

$$\mathfrak{M} = -0,5636\gamma r^3\mu = -0,5636 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \cdot 1,299 = -732 \text{ кгр. см.}$$

При равномерномъ внутреннемъ давленіи онъ уменьшится до $\xi \mathfrak{M} = -732 \cdot 0,896 = -656$ кгр. с., а по формулѣ $\mathfrak{M} + N\xi\eta_0$ получимъ — 643 кгр. см.

Въ сѣченіи $\varphi = \alpha$ по той-же таблицѣ $M = -0,3853\gamma r^3\mu = -732 \cdot \frac{0,3853}{0,5636} \approx -500$ кгр. см., т. е. меньше 656. Наибольшее напряженіе $\sigma = 263 + \frac{656}{3,61} = 1353$ кгр./см.². При точномъ вычисленіи $M = -644$ кгр. см. и слѣдовательно точно наибольшее напряженіе

$$\sigma = 263 + \frac{644 \cdot 6}{3,61} = 1333 \text{ кгр./см.}^2.$$

Не трудно убѣдиться, что для этой трубы давленіе въ 5 атм. понижаетъ наибольшее напряженіе отъ сплющиванія. Дѣйствительно, для $\alpha = 45^\circ$ было вычислено для безнапорной трубы $\mathfrak{M} = -416$ кгр. см. Слѣдовательно при отсутствіи внутренняго давленія $\sigma = \frac{416 \cdot 6}{3,61} = 691$ кгр./см.², а при давленіи въ 5 атм. $\sigma = 572$ кгр./см.². То же и для $\alpha = 30^\circ$: безъ напора $\sigma = \frac{546 \cdot 6}{3,61} = 907$ кгр./см.², а при напорѣ $\sigma = 843$ кгр./см.².

И здѣсь, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, видно насколько меньше влияние внутренняго давленія на пониженіе напряженій отъ изгиба при малой ширинѣ фундамента.

При $\alpha = 45^\circ$, $\xi = 0,424$, при $\alpha = 30^\circ$. . . $\xi = 0,663$, а при 15° уже 0,896.

4) Эту трубу нельзя заполнять водой даже безъ давленія, если она опирается лишь по одной производящей: при $\alpha = 0^\circ$ по табл. V для $\varphi = 0$, $\mathfrak{M} = -0,75\gamma r^3\mu$, напряженіе получается значительно больше допускаемого: $\sigma = 1620$ кгр./см.², а если добавить еще и давленіе въ 5 ат., то σ близко къ предѣлу упругости.

Какъ видно на этихъ примѣрахъ приближенное вычисленіе изгибающаго момента при внутреннемъ давленіи по формулѣ $\mathfrak{M} + N\xi\eta_0$ даетъ вообще лучшие результаты, чѣмъ по формулѣ $\xi \mathfrak{M}$, но такъ какъ напряженіе при внутреннемъ давленіи суммируется изъ двухъ сла-

гаемыхъ, приблизительно одинаковыхъ, то ошибка въ одномъ изъ нихъ не такъ сильно отражается на окончательномъ результатѣ, чтобы изъ-за этого стоило усложнять расчетъ.

Примѣръ 20. Опредѣлимъ наибольшее напряженіе въ трубѣ примѣра 15, изображенной справа на черт. 11, при равномерномъ внутреннемъ давленіи. Данныхъ о его величинѣ не имѣется (Deutsche Bauzeitung, 1902), но такъ какъ это канализаціонная труба, ведущая стоки на полѣ орошенія, то напоръ, вѣроятно, не очень великъ. Положимъ $k = 3$ атм. На основаніи сказаннаго раньше, примемъ въ данномъ случаѣ коэффициентъ ξ соотвѣтствующій $\alpha = 45^\circ$. (Въ дѣйствительности для этой трубы $\alpha \approx 50^\circ$. Коэффициентъ $\xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} = \frac{3}{14,93} = 0,201$ для $\alpha = 45^\circ$. По формулѣ (53) при $\alpha = 50^\circ$, $\xi = 0,158$). Для этой трубы былъ вычисленъ изгибающій моментъ при $\varphi = 0$, $\mathfrak{M} = -255$ кгр. см. Слѣдовательно, при внутреннемъ давленіи $k = 3$ атм. $\xi \mathfrak{M} = -51$ кгр. см. и наибольшее напряженіе $\sigma = \frac{3 \cdot 90}{1} + \frac{6 \cdot 51}{1} = 576$ кгр./см.²

Вычислимъ изгибающій моментъ болѣе точно.

$A = 1 - \frac{kr^3}{EJ} = -10,93$. По формулѣ (51) $C_1 = 0,0007$. По формулѣ (52) $\eta = 0,0196 \frac{r^3 \mu}{EJ}$; въ данномъ случаѣ $\mu = 1,174$ и $\eta = 0,743$ см. Слѣдовательно, при давленіи въ 3 атм. изгибающій моментъ $M = -255 + 0,743 \cdot 3 \cdot 90 \approx -53,4$ кгр. см. и напряженіе въ этомъ сѣченіи $\sigma = 270 + 320 = 590$ кгр./см.² немного больше вычисленнаго раньше σ .

Но для этой трубы значительно больше будетъ въ этомъ случаѣ напряженіе при $\varphi = \alpha = 50^\circ$. По формулѣ (40') для приведенныхъ въ примѣрѣ 15 значеній S , P и R въ этомъ сѣченіи будетъ изгибающій моментъ $\mathfrak{M} = 0,0948 r^3 \mu = 81,2$ кгр. см. и слѣдовательно наибольшее напряженіе $\sigma = 270 + 487 = 757$ кгр./см.² Но даже и это напряженіе вдвое меньше наибольшаго напряженія 1530 кгр./см.² вычисленнаго для этой трубы при отсутствіи внутренняго давленія. Вѣроятно именно благодаря такому благоприятному вліянію внутренняго давленія труба благополучно существуетъ до сихъ поръ безъ какихъ либо поврежденій.

Подсчитаемъ еще при какомъ внутреннемъ давленіи напряженіе въ сѣченіи $\varphi = 0$ будетъ наименьшимъ. По формулѣ (18) при $\mathfrak{M} = -255$ кгр. см. это

$$k = \frac{3EJ}{r^3} \left[r \sqrt{\frac{2\mathfrak{M}}{EJ}} - 1 \right] \approx 2,86 \text{ атм.}$$

Принятое нами $k = 3$ атм. весьма близко къ наивыгоднѣйшему.

ТАБЛИЦА IV.

Изгибающие моменты $\mathcal{M}$ и деформации η .

φ°	$\alpha = 0$		$\alpha = 45^\circ$	
	$\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$	$\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$
0°	-0.7500	0.0	-0.3207	+0.1019
15	-0.3689	-0.0211	-0.2688	+0.0878
30	-0.0620	-0.0661	-0.1292	+0.0499
45	+0.1562	-0.1115	+0.0546	0.0
60	+0.2819	-0.1392	+0.1973	-0.0464
75	+0.3203	-0.1388	+0.2558	-0.0768
90	+0.2854	-0.1073	+0.2425	-0.0848
105	+0.1969	-0.0494	+0.1760	-0.0715
120	+0.0785	+0.0258	+0.0773	-0.0403
135	-0.0455	+0.1031	-0.0295	-0.0017
150	-0.1526	+0.1712	-0.1234	+0.0350
165	-0.2246	+0.2173	-0.1871	+0.0611
180	-0.2500	+0.2338	-0.2096	+0.0706

ТАБЛИЦА V.

Наибольшие значения $\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$ и $\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$ для трубы, лежащей на фундаменте.

φ°	$\alpha = 0$		$\alpha = 15^\circ$	
	$\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$	$\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$
0°	-0.7500	0.0	-0.5636	+0.0188
α	-0.7500	0.0	-0.3853	0.0
75	+0.3203	-0.1388	+0.3118	-0.1285
180	-0.2500	-0.2338	-0.2444	+0.2047
φ	$\alpha = 30^\circ$		$\alpha = 45^\circ$	
	$\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$	$\mathcal{M} : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EJ}$
0°	-0.4201	+0.0566	-0.3207	+0.1019
α	-0.1192	0.0	+0.0546	0
75	+0.2884	-0.1050	+0.2558	-0.0768
180	-0.2295	+0.1431	-0.2096	+0.0706

Т А Б Л И Ц А VI.

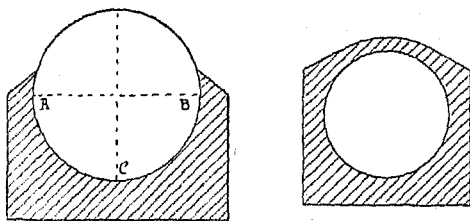
Формулы для вычисления изгибающих моментовъ и деформаций.

α	φ	$M: \gamma r^3 \mu$	$\eta: \frac{\gamma r^3 \mu}{EJ}$
0°	$\leq \alpha$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos \varphi + 1,5708 \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$-\frac{1}{2} + 0,7854 \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{\varphi}{4} \sin \varphi - 0,7854 \varphi \cos \varphi - \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$
	$\geq \alpha$		
15°	$\leq \alpha$	$-0,3024 - 0,2612 \cos \varphi + 3,0348 \sin^2 \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$0,7092 - 1,7020 \cos \varphi - 0,2556 \varphi \sin \varphi + 1,0116 \cos^2 \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$
	$\geq \alpha$	$-0,5056 - 0,2612 \cos \varphi + 1,5708 \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$-0,5056 + 0,8029 \sin \varphi + 0,5234 \cos \varphi - 0,2556 \varphi \sin \varphi - 0,7854 \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$
30°	$\leq \alpha$	$-0,1284 - 0,2917 \cos \varphi + 1,5708 \sin^2 \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$0,3952 - 0,8622 \cos \varphi - 0,2708 \varphi \sin \varphi + 0,5236 \cos^2 \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$
	$\geq \alpha$	$-0,5212 - 0,2917 \cos \varphi + 1,5708 \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$-0,5212 + 0,8509 \sin \varphi + 0,5694 \cos \varphi - 0,2708 \varphi \sin \varphi - 0,7854 \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$
45°	$\leq \alpha$	$0,126 - 0,3333 \cos \varphi + 1,1107 \sin^2 \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$0,3828 - 0,6511 \cos \varphi - 0,2917 \varphi \sin \varphi + 0,3702 \cos^2 \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$
	$\geq \alpha$	$-0,5429 - 0,3333 \cos \varphi + 1,5708 \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi$	$-0,5429 + 0,9163 \sin \varphi + 0,6203 \cos \varphi - 0,2917 \varphi \sin \varphi - 0,7854 \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi$

V. Труба задѣланная въ кладку.

1. Вліяніе вѣса воды, заполняющей трубу.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда желаютъ увеличить прочность водовода прибѣгаютъ къ обдѣлкѣ его до половины высоты, а иногда и больше каменной кладкой или бетономъ. Иногда, при трубахъ малыхъ размѣровъ, эта обдѣлка закрываетъ цѣликомъ всю трубу, какъ изображено справа на черт. 15. Но обдѣлка верхней половины трубы обыкновенно тонкая, скорѣе штукатурка, не обладаетъ большой прочностью и играетъ роль забутки. Поэтому мы не будемъ вводить ее въ расчетъ при опредѣленіи прочныхъ размѣровъ трубы.



Черт. 15.

Обдѣланные трубы или зарываютъ въ грунтъ цѣликомъ или, что особенно часто при водоводахъ къ гидроэлектрическимъ стан-

ціямъ, онѣ зарыты лишь на половину своей высоты до уровня обдѣлки.

Разсмотримъ сначала послѣдній случай, когда внѣшними силами, дѣйствующими на трубу будутъ вѣсъ заполняющей ее воды и реакція опорной поверхности. Внутреннее равномерное давленіе пока оставимъ въ сторонѣ.

Въ этомъ случаѣ законъ распредѣленія давленія по опорной поверхности въ противоположность съ рассмотрѣннымъ выше случаемъ трубы подпертой по небольшой ширинѣ нижней полуокружности, играетъ существенную роль.

Подъ вліяніемъ вѣса воды труба стремится сплюснуться съ увеличеніемъ горизонтальнаго и уменьшеніемъ вертикальнаго діаметровъ. Но увеличенію горизонтальнаго діаметра препятствуетъ обдѣлка трубы; радіальныя перемѣщенія здѣсь должны быть равны нулю.

Довольно вѣроятно предположить также, что и низшая точка профиля трубы *С* не перемѣстится, такъ какъ она прижимается къ фундаменту вѣсомъ воды, заполняющей трубу.

Сцѣпленіемъ трубы съ кладкой фундамента можно пренебречь, такъ какъ при гладкой поверхности трубы оно будетъ дѣйствительно отсутствовать при каменномъ фундаментѣ и будетъ ничтожно при бетонномъ.

Кромѣ сказаннаго выше о деформациіи трубы на основаніи того, что нагрузка трубы симметрична, можно утверждать: 1) что сѣченія стѣнки трубы вертикальной діаметральной плоскостью не повернутся

Ввиду симметріи нагрузки можно ограничиться разсмотрѣніемъ половины кольца CD .

Составляя условія равновѣсія части кольца DE увидимъ, что какъ нормальное усиліе N , такъ и моментъ M будутъ выражаться разнo для φ большаго или меньшаго $\frac{\pi}{2}$, такъ какъ при $\varphi > \frac{\pi}{2}$ въ эти выраженія войдетъ наружное давленіе, отсутствующее при $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Суммируя моменты силъ, дѣйствующихъ на часть кольца DE , соотвѣтствующую центръ углу $\varphi < \frac{\pi}{2}$, относительно точки E , обозначивъ неизвѣстныя намъ нормальное усиліе и моментъ въ сѣченіи D черезъ N_0 и M_0 , получимъ:

$$M_1 + M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) - \int_0^\varphi \gamma r (1 - \cos \psi) \cdot r d\psi \cdot r \sin (\varphi - \psi) = 0,$$

откуда моментъ M_1 для верхней четверти окружности выразится такъ:

$$M_1 = N_0 r (1 - \cos \varphi) + \gamma r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - M_0. \quad (54)$$

Для φ большаго 90° въ уравненіе моментовъ войдутъ моменты силы P и давленія k . Для этихъ φ

$$\begin{aligned} M_2 + M_0 - N_0 r (1 - \cos \varphi) - \gamma r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - Pr \cos \varphi + \\ + \int_{\frac{\pi}{2}}^\varphi k r \sin (\varphi - \psi) r d\psi = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} M_2 = N_0 r (1 - \cos \varphi) + \gamma r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - M_0 + \\ + Pr \cos \varphi - k r^3 (1 - \sin \varphi) \dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

Чтобы выразить аналитически тѣ условія, которымъ подчинены, по вышесказанному, деформации трубы воспользуемся дифференціальнымъ уравненіемъ изогнутой оси:

$$\frac{d^3 \eta}{d\varphi^3} + \eta = \frac{r^2 M}{EI} \dots \dots \dots (B)$$

Какъ указано было при разсмотрѣнии трубы лежащей на землѣ въ это выраженіе не входитъ моментъ нормальнаго усилія; вмѣсто M слѣдовало бы написать $M + \eta N$, но такъ какъ и η и N весьма не велики, то можно пренебречь ихъ произведеніемъ сравнительно съ M .

Подставляя въ это уравненіе найденныя въ (54) и (55) выраженія

моментовъ получимъ дифференціальныя уравненія опредѣляющія де-
формаци:

$$\frac{d^2 \eta_1}{d\varphi^2} + \eta_1 = \frac{r^2}{EI} \left[N_0 (1 - \cos \varphi) + \gamma r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - M_0 \right]$$

для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$ и

$$\frac{d^2 \eta_2}{d\varphi^2} + \eta_2 = \frac{r^2}{EI} \left[N_0 r (1 - \cos \varphi) + \gamma r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - M_0 - \right. \\ \left. - k r^2 (1 - \sin \varphi) + P r \cos \varphi \right]$$

для φ не меньшаго $\frac{\pi}{2}$.

Рѣшенія ихъ, въ чемъ не трудно убѣдиться подстановкой, будутъ:
для 1-го

$$\eta_1 = \frac{r^2}{EI} \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) + \gamma r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{16} \cos \varphi \right) - M_0 \right] - c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi (56)$$

и для второго

$$\eta_2 = \frac{r^2}{EI} \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) + \gamma r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{16} \cos \varphi \right) - M_0 - k r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) + \right. \\ \left. + P r \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right] - c_1' \cos \varphi + c_2' \sin \varphi (57)$$

При этомъ интегрированіи мы ввели четыре неизвѣстныхъ произ-
вольныхъ постоянныхъ c_1 , c_2 , c_1' и c_2' , что съ неизвѣстными M_0 , N_0
 P составитъ 7.

Условій для ихъ опредѣленія пока мы имѣемъ 6. Два условія отно-
сительно производныхъ (56) и (57), три условія относительно равен-
ства нулю деформаций η при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$ и одно условіе относи-
тельно отсутствія при деформации вращенія сѣченія $\varphi = \pi$. Дополни-
мъ ихъ до семи условіемъ, что длина полуокружности DC не измѣ-
нится при деформации.

Первыя два условія дадутъ

$$\left| \frac{\partial \eta_1}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 . . . c_2 = 0 (58)$$

$$\left| \frac{\partial \eta_2}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0 . . . N_0 r \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \gamma r^3 - \frac{\pi}{2} P r - \frac{EI}{r^2} c_2' = 0 . . (59)$$

Три слѣдующихъ условія

$$|\eta_1|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0 \dots N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \gamma r^3 \left(1 - \frac{5\pi}{16}\right) - M_0 = 0 \dots (60)$$

$$|\eta_2|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0 \dots N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \gamma r^3 \left(1 - \frac{5\pi}{16}\right) - M_0 - \frac{1}{2} k r^2 + \\ + \frac{\pi}{4} P r + \frac{EI}{r^2} c_2' = 0 \dots (61)$$

$$|\eta_2|_{\varphi = \pi} = 0 \dots N_0 r - M_0 + \gamma r^3 \left(\frac{17}{16} - \frac{\pi^2}{8}\right) - k r^2 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + \\ + \frac{EI}{r^2} c_1' = 0 \dots (62)$$

Чтобы выразить отсутствіе вращенія при деформациі сѣченія $\varphi = \pi$ надо положить уголъ поворота этого сѣченія равнымъ нулю. По сказанному при расчетѣ трубы, уложенной въ землѣ, это условіе выражается уравненіемъ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\omega = 0 \dots (A'')$$

Въ данномъ случаѣ вмѣсто ω надо ввести φ и распространить интегрированіе отъ 0 до π .

Слѣдовательно

$$\int_0^{\pi} M d\varphi = 0.$$

Вводя въ это уравненіе найденныя раньше выраженія изгибающаго момента M_1 и M_2 (54) и (55) и интегрируя ихъ [въ соотвѣтствующихъ предѣлахъ получимъ

$$\int_0^{\pi} \left[N_0 r (1 - \cos \varphi) + \gamma r^3 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) - M_0 \right] d\varphi + \\ + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [P r \cos \varphi - k r^2 (1 - \sin \varphi)] d\varphi =$$

$$= N_0 r \pi + \gamma r^3 \left(\pi - \frac{\pi^2}{2}\right) - M_0 \pi - k r^2 \left(\pi - 1 - \frac{\pi}{2}\right) - P r = 0$$

и окончательно

$$N_0 r \pi + \frac{\pi}{2} \gamma r^3 - M_0 \pi - k r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - P r = 0 \dots (63)$$

Наконецъ послѣднее условіе, что длина полуокружности кольца при деформациі не измѣняется, можно выразить такимъ образомъ: опредѣляя дифференціалъ дуги изогнутой оси кольца, какъ длину дуги круга, получимъ, что эта длина $ds = (r + \eta) d\varphi$.

Вся длина изогнутого полукольца, равная по условию первоначальной его длинѣ

$$\int_0^{\pi} ds = \int_0^{\pi} r d\varphi + \int_0^{\pi} \eta d\varphi = \pi r$$

слѣдовательно

$$\int_0^{\pi} \eta d\varphi = 0.$$

Вводя сюда выраженія η по форм. (56) и (57) и выполняя интегрирование въ соответствующихъ предѣлахъ, получимъ

$$\begin{aligned} & \frac{r^3}{EI} \left\{ \int_0^{\pi} \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) + \gamma r^3 \left(1 + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi - \frac{5}{8} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{16} \cos \varphi \right) - M_0 \right] d\varphi - \right. \\ & - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} k r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \right) d\varphi + P r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\varphi}{2} \sin \varphi d\varphi \left. \right\} - c_1 + c'_1 + c'_2 = 0 \\ & N_0 r \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) + \gamma r^3 \left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{5}{8} \pi \right) - M_0 \pi - k r^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) + \\ & + P r \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{EI}{r^2} (c_1 - c'_1 - c'_2) = 0 \end{aligned}$$

или окончательно

$$N_0 r \frac{\pi}{2} - M_0 \pi - k r^2 \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + \gamma r^3 \frac{\pi}{8} + P r \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{EI}{r^2} (c_1 - c'_1 - c'_2) = 0. \quad (64)$$

Итакъ, для опредѣленія 6 искомымъ неизвѣстныхъ c_1 , c'_1 , c'_2 , M_0 , N_0 и P (c_2 по ур. (58) равно нулю) мы имѣемъ систему уравненій, которая по упрощенію (61) по (60) и по подстановкѣ $k = \gamma \frac{r^3}{2}$ выразится:

$$N_0 r \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \gamma r^3 - \frac{\pi}{2} P r - \frac{EI}{r^2} c'_2 = 0 \quad (59)$$

$$N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + \gamma r^3 \left(1 - \frac{5\pi}{16} \right) - M_0 = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\pi}{4} P r - \frac{\pi}{4} \gamma r^3 + \frac{EI}{r^2} c'_2 = 0 \quad (61')$$

$$N_0 r - M_0 - \gamma r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{17}{16} - \frac{\pi^2}{8} \right) + \frac{EI}{r^2} c'_1 = 0 \quad (62)$$

$$N_0 r \pi - M_0 \pi - \gamma r^3 \left(\frac{\pi^2}{4} - \pi \right) - P r = 0 \quad (63)$$

$$N_0 r \frac{\pi}{2} - M_0 \pi - \gamma r^3 \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{5\pi}{8} \right) + P r \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{EI}{r^2} (c_1 - c'_1 - c'_2) = 0 \quad (64)$$

Корни этихъ уравненій:

$$N_0 = -\frac{1}{4} \gamma r^2$$

$$M_0 = -\left[\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\right] \gamma r^3$$

$$P = 0$$

$$c_1 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{16}\right) \frac{\gamma r^5}{EI}$$

$$c'_1 = -\left(\frac{1}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) \frac{\gamma r^3}{EI}$$

$$c'_2 = \frac{\pi}{4} \frac{\gamma r^5}{EI}$$

Вводя найденныя N_0 и M_0 въ выраженія изгибающихъ моментовъ (54) и (55) получимъ формулы, по которымъ можно вычислить величину изгибающаго момента для любого значенія центрального угла φ .

Изъ (54) мы получимъ, что для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$M_1 = \left(\frac{\pi}{4} - 0,75 \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) \gamma r^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Изъ (55)

$$M_2 = \left(-\frac{\pi}{4} - 0,75 \cos \varphi + \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi\right) \gamma r^3. \quad . \quad . \quad (65')$$

Если мы выразимъ изгибающій моментъ M_2 въ зависимости отъ угла ψ , дополняющаго φ до 180° , то

$$M_2 = -\left(\frac{\pi}{4} - 0,75 \cos \psi - \frac{\psi}{2} \sin \psi\right) \gamma r^3$$

т. е. M_2 при измѣненіи ψ мѣняется такъ же, какъ M_1 при измѣненіи φ , но при равныхъ углахъ φ и ψ знаки этихъ моментовъ противоположны.

Слѣдовательно, для опредѣленія абсолютной величины наибольшаго изгибающаго момента, достаточно изслѣдовать моментъ въ предѣлахъ отъ 0 до 90° .

Для опредѣленія максимумовъ M_1 имѣемъ условіе

$$0,25 \sin \varphi - \frac{\varphi}{2} \cos \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Это уравненіе удовлетворяется: 1) при $\varphi = 0$ тогда, $M'_1 = 0,0354 \gamma r^3$.
2) Уравненіе (66) можетъ быть представлено въ такомъ видѣ

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\varphi.$$

Интересующій насъ корень этого уравненія $\varphi = 66^{\circ}46' 54,23''$ ¹⁾

При этомъ $tg \varphi = 2,331122$ и $\varphi = 1,165561$. Подсчитывая по формулѣ (65) изгибающій моментъ для этого φ , получимъ $M''_1 = -0,0459 \gamma r^3$.

Слѣдовательно, наибольшій изгибающій моментъ будетъ въ этомъ послѣднемъ сѣченіи.

Найдемъ выраженіе для нормальныхъ усилій N . Проектируя (черт. 16) внѣшнія силы, дѣйствующія на участокъ кольца DE , соотвѣтствующій центр. углу φ , на направленіе N получимъ для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$N - N_0 \cos \varphi + \int_0^{\varphi} \gamma r (1 - \cos \psi) d\psi \cdot r \sin (\varphi - \psi) = 0$$

откуда

$$N = N_0 \cos \varphi - \gamma r^2 \left(1 - \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right).$$

Введя въ это N найденное раньше N_0 получимъ

$$N = \left(\frac{\varphi}{2} \sin \varphi + 0,75 \cos \varphi - 1 \right) \gamma r^2. \dots \dots (67)$$

Для опредѣленія деформаций, введя въ формулы (56) и (57) найденныя выше, M_0 и N_0 получимъ, для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$\eta_1 = \left[\frac{\pi}{4} (1 - \cos \varphi) - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi \right] \frac{\gamma r^5}{EI} \dots \dots (68)$$

и для φ не меньшаго $\frac{\pi}{2}$

$$\eta_2 = \left[-\frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \varphi + \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \frac{\pi}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \frac{\varphi^2}{8} \cos \varphi \right] \frac{\gamma r^5}{EI} \dots \dots (69)$$

Очевидно, что (69) находится въ такомъ же соотношеніи съ (68), какъ формулы изгибающихъ моментовъ (65) съ (65'), т. е., что деформации верхней и нижней половины трубы одинаковы по величинѣ и отличаются по знакамъ.

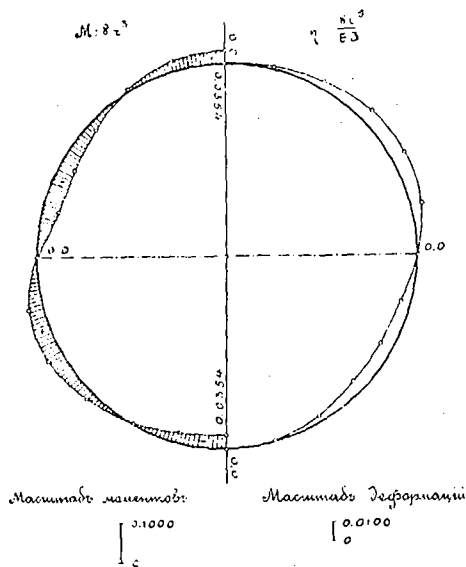
Итакъ, въ разобраннымъ случаѣ слѣдуетъ рассчитывать трубу по формуламъ

$$\left. \begin{aligned} M &= -0,0459 \gamma r^3 \\ N &= -0,1687 \gamma r^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

гдѣ N подсчитано по формулѣ (67) при $\varphi \approx 66^{\circ}47'$.

¹⁾ Не приводимъ рѣшенія этого уравненія, такъ какъ оно довольно длинно. Его можно найти въ подробныхъ курсахъ алгебры.

Отрицательный знакъ у изгибающаго момента, по обозначеніямъ, принятымъ на черт. 16, обуславливаетъ растяженіе у наружной поверхности трубы и сжатіе у внутренней. Отрицательный знакъ N указываетъ на растяженіе.



Черт. 17.

Изгибающіе моменты и деформации трубы, подчитанныя по фор. (65) и (69) даны въ табл. VII и изображены на черт. 17. Изъ діаграммы наглядно видно, что не слѣдуетъ дѣлать трубу болѣе слабаго сѣченія въ части, соприкасающейся съ фундаментомъ. Это заключеніе касается, конечно, того случая, когда не принимается специаль-

ныхъ мѣръ, обеспечивающихъ надежную связь трубы съ фундаментомъ.

Т А Б Л И Ц А VII).

Изгибающіе моменты и деформации трубы задѣланной въ кладку.

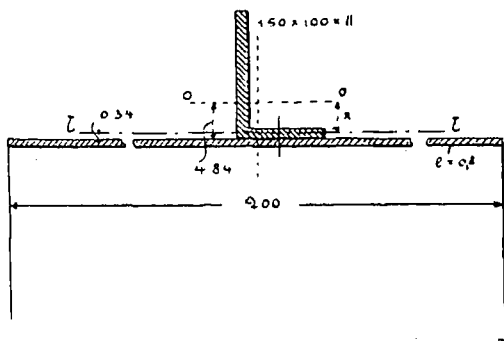
φ°	$M : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EI}$	φ°	$M : \gamma r^3 \mu$	$\eta : \frac{\gamma r^5 \mu}{EI}$
0°	+ 0.0354	0.0	105°	+ 0.0409	— 0.0053
15°	+ 0.0271	+ 0.0012	120°	+ 0.0431	— 0.0077
30°	+ 0.0050	+ 0.0040	135°	+ 0.0226	— 0.0068
45°	— 0.0226	+ 0.0068	150°	— 0.0050	— 0.0040
60°	— 0.0431	+ 0.0077	165°	— 0.0271	— 0.0012
75°	— 0.0409	+ 0.0053	180°	— 0.0354	0.0
90°	0.0	0.0			

Примѣръ 21. Произведемъ повѣрочный расчетъ трубы по слѣдующимъ даннымъ: стальная труба діаметромъ 14 фут. толщиной стѣнки $\frac{5}{16}$ " усилена кольцами изъ уголковъ $6 \times 4 \times \frac{3}{8}$ " черезъ каждыя $6'8\frac{1}{2}"$. Уголки короткой полкой приклепаны къ трубѣ.

1) Значеніе μ см. стр. 103.

Внутреннее равномерное давление отсутствует.

Труба таких размѣровъ соединяла два резервуара гидроэлектрической станціи Ballevill (около Fremont) въ штатѣ Ohio. Длина трубы около 900 метр. При заполненіи ея водой она была сплюснута на длинѣ 180 метровъ недалеко отъ нижняго резервуара. (Engineering News 1913 May). Труба эта не была покрыта землею и задѣлана въ фундаментъ, а была зарыта въ грунтъ, очень плотный, до половины высоты. Повидимому, проектировавшимъ было придано излишнее



Черт. 18.

значение плотности грунта, который, конечно, никогда не можетъ играть роли обдѣлки.

Расчитаемъ участокъ трубы длиной равный разстоянію между кольцами, предположивъ, что она задѣлана въ кладку до $\frac{1}{2}$ высоты. Опредѣлимъ моментъ инерціи сѣченія усиленной стѣнки на этомъ протяженіи.

Площадь сѣченія стѣнки $\omega = 200 \times 0,8 = 160 \text{ см}^2$.

Уголокъ $150 \times 100 \times 11 \text{ мм.}$, его сѣченіе: $\omega_2 = 26,5 \text{ см}^2$. Разстояніе центра тяжести уголка отъ края короткой полки 4,84 см. Моментъ инерціи $I_{00} = 601 \text{ см}^4$.

Для опредѣленія положенія нейтральной оси сѣченія вычислимъ статическій моментъ площади его относительно оси 00 (черт. 18), проходящей черезъ центръ тяжести уголка

$$160 (4,84 + 0,40) = (160 + 26,5) x$$

откуда

$$x = \frac{160 \cdot 5,24}{186,5} = 4,5 \text{ см.}$$

Моментъ инерціи сѣченія относительно нейтральной оси

$$I_u = 601 + 26,5 \cdot 4,5^2 + \frac{200 \cdot 0,8^3}{12} + 160 (0,40 + 0,34)^2 \approx 1236 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивленія

$$W_1 = \frac{1236}{14,66} \approx 84 \text{ см}^3$$

$$W_2 = \frac{1236}{1,14} \approx 1080 \text{ см}^3.$$

Наибольшій изгибающій моментъ по формулѣ (70)

$$M = - 0,0459 \gamma r^3 = - 0,0459 \cdot 0,2 \cdot 9,66 \cdot 10^6 \approx - 88700 \text{ кгр .см.}$$

здѣсь γ вѣсъ въ килогр. столба воды сѣченіемъ 1 см^2 и высотой равной разстоянію между кольцами—200 см.

Нормальное усиліе по форм. 70

$$N = - 0,169 \cdot 0,2 \cdot 4,54 \cdot 10^4 \approx - 1530 \text{ кгр.}$$

Наибольшія растягивающія напряженія на наружномъ концѣ полки уголка

$$\sigma_p = \frac{1530}{186,5} + \frac{88700}{84} \approx 82 + 1050 \approx 1130 \text{ кгр/см}^2.$$

На внутренней поверхности стѣнки напряженіе

$$\sigma_c = \frac{1530}{186,5} - \frac{88700}{1080} = + 82 - 82 = 0 \text{ кгр/см}^2.$$

Труба, повидимому, достаточно прочна. Но если только грунтъ не настолько твердъ, что уничтожаетъ возможность деформаций трубы на уровнѣ горизонтальнаго діаметра, то тамъ появится, какъ найдено было раньше (примѣръ 4), гораздо болышій изгибающій моментъ $M = - 0,149 \gamma r^3$ и напряженія достигнутъ совершенно недопустимой величины (3670 к/см^2).

Подсчитаемъ еще деформацію, соотвѣтствующую углу $\varphi = 60^\circ$ чтобы имѣть понятіе о тѣхъ перемѣщеніяхъ, которыя претерпѣваютъ стѣнки. По табл. VII при $\varphi = 60^\circ$

$$\eta = 0,0077 \frac{\gamma r^5}{EI}$$

откуда

$$\eta = 0,0077 \frac{0,2 \cdot 9,66 \cdot 4,54 \cdot 10^{10}}{2,15 \cdot 10^6 \cdot 1236} \approx 0,254 \text{ см.}$$

2. Вліяніе собственного вѣса трубы.

Въ этомъ случаѣ напряженія, вызываемыя собственнымъ вѣсомъ трубы, находятся въ такомъ же соотношеніи съ напряженіями отъ вѣса воды, какъ въ разсмотрѣнныхъ выше случаяхъ трубы лежащей на землѣ и на фундаментѣ.

При предположеніяхъ, которыя мы сдѣлали при разсмотрѣніи невѣсомой трубы заполненной водой и обдѣланной до уровня горизонтальнаго діаметра въ кладку, въ данномъ случаѣ мы найдемъ, что напряженія k давленія фундамента на трубу $k = \pi \delta$, гдѣ δ , какъ и въ предыдущихъ случаяхъ означаетъ вѣсъ участка трубы единичной длины вдоль ея оси на единицу длины окружности.

Сохраняя обозначенія черт. 16, найдемъ выраженіе изгибающихъ моментовъ изъ условій равновѣсія части кольца PE .

Для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$M_1 = N_0 r (1 - \cos \varphi) - \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - M_0 \dots (71)$$

Для угловъ φ не меньшихъ $\frac{\pi}{2}$

$$M_2 = N_0 r (1 - \cos \varphi) - \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - M_0 - k r^2 (1 - \sin \varphi) + P r \cos \varphi$$

Введя въ послѣднее вмѣсто $k \dots \pi \delta$

$$M_2 = N_0 r (1 - \cos \varphi) - \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1 + \pi - \pi \sin \varphi) - M_0 + P r \cos \varphi. (72)$$

Для опредѣленія статически неопредѣлимыхъ M_0 , N_0 и P по прежнему воспользуемся дифференціальнымъ уравненіемъ

$$\frac{d^2 \eta}{d\varphi^2} + \eta = \frac{r^2 M}{EI} \dots \dots \dots (B)$$

Для угловъ φ не большихъ $\frac{\pi}{2}$ введя въ (B) изгибающій моментъ M_1 получимъ

$$\frac{d^2 \eta_1}{d\varphi^2} + \eta_1 = \frac{r^2}{EI} \left\{ N_0 r (1 - \cos \varphi) - \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - M_0 \right\}$$

для угловъ φ не меньшихъ $\frac{\pi}{2}$; при M по форм. 72

$$\frac{d^2 \eta_2}{d\varphi^2} + \eta_2 = \frac{r^2}{EI} \left\{ N_0 r (1 - \cos \varphi) - \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1 + \pi - \pi \sin \varphi) - M_0 + P r \cos \varphi \right\}$$

Рѣшенія этихъ уравненій дадутъ намъ:

для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$\eta_1 = \frac{r^2}{EI} \left\{ N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - \delta r^2 \left(-1 + \frac{1}{8} \cos \varphi + \frac{3\varphi}{4} \sin \varphi - \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi \right) - M_0 - c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi \right\}$$

для φ не меньшаго $\frac{\pi}{2}$

$$\eta_2 = \frac{r^2}{EI} \left\{ N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - \delta r^2 \left(-1 + \frac{1}{8} \cos \varphi + \frac{3\varphi}{4} \sin \varphi - \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi + \pi - \frac{\pi}{2} \sin \varphi + \frac{\pi \varphi}{2} \cos \varphi \right) + \frac{1}{2} P r \varphi \sin \varphi - M_0 - c'_1 \cos \varphi + c'_2 \sin \varphi \right\}$$

Для опредѣленія N_0 , M_0 , P , c_1 , c_2 , c'_1 и c'_2 , какъ въ предыдущемъ будемъ имѣть условія:

$$I. \left(\frac{d\eta_1}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} = 0 \dots c_2 = 0$$

$$II. \left(\frac{d\eta_2}{d\varphi} \right)_{\varphi=\pi} = 0 \dots N_0 r \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \delta r^2 - \frac{\pi}{2} Pr - c'_2 = 0$$

$$III. (\eta_1)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \dots N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \delta r^2 \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right) - M_0 = 0$$

$$IV. (\eta_2)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \dots N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \delta r^2 \left(\frac{7\pi}{8} - 1 \right) + \frac{\pi}{4} Pr - M_0 - c'_2 = 0$$

$$V. (\eta_2)_{\varphi=\pi} = 0 \dots N_0 r - \delta r^2 \left(\pi - \frac{\pi^2}{4} - \frac{9}{8} \right) - M_0 + c'_1 = 0.$$

Условіе отсутствія вращенія сѣченія $\varphi = \pi \dots \int_0^\pi M d\varphi = 0$ дастъ въ данномъ случаѣ слѣдующее уравненіе:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi M d\varphi &= \int_0^\pi \{ N_0 r (1 - \cos \varphi) - \delta r^2 (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) - M_0 \} d\varphi + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [- \delta r^2 (\pi - \pi \sin \varphi) + Pr \cos \varphi] d\varphi = \end{aligned}$$

$$VI. \dots = N_0 r \pi - M_0 \pi - \delta r^2 \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi \right) - Pr = 0$$

Наконецъ изъ условія, что длина срединной линіи полукольца остается неизмѣнной, принявъ во вниманіе, что по I. $c_2 = 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \eta d\varphi &= \int_0^\pi \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - \delta r^2 \left(-1 + \frac{1}{8} \cos \varphi + \frac{3\varphi}{4} \sin \varphi - \right. \right. \\ &- \left. \frac{\varphi^2}{4} \cos \varphi \right) - M_0 \Big] d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left[- \delta r^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \sin \varphi + \frac{\pi\varphi}{2} \cos \varphi \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} Pr \varphi \sin \varphi - c'_1 \cos \varphi + c'_2 \sin \varphi \right] d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} c_1 \cos \varphi d\varphi = 0 \end{aligned}$$

а отсюда

$$VII. N_0 r \frac{\pi}{2} - \delta r^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) - M_0 \pi + Pr \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) - c_1 + c'_1 + c'_2 = 0$$

Итакъ, мы имѣемъ систему уравненій:

Корни ихъ:

$$\begin{aligned}
 & N_0 r \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \delta r^2 - \frac{\pi}{2} Pr - c'_2 = 0 \quad \text{II.} \\
 & N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \delta r^2 \left(\frac{3\pi}{8} - 1\right) - M_0 = 0 \quad \text{III.} \\
 & N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \delta r^2 \left(\frac{7\pi}{8} - 1\right) + \frac{\pi}{4} Pr - M_0 + c'_2 = 0 \quad \text{IV.} \\
 & N_0 r - \delta r^2 \left(\pi - \frac{\pi^2}{4} - \frac{9}{8}\right) - M_0 + c'_1 = 0 \quad \text{V.} \\
 & N_0 r \pi - M_0 \pi - \delta r^2 \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right) - Pr = 0 \quad \text{VI.} \\
 & N_0 r \frac{\pi}{2} - \delta r^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) - M_0 \pi + Pr \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) - c_1 + c'_1 + c'_2 = 0 \quad \text{VII.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \frac{1}{2} \delta r \\
 M_0 &= -\delta r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\right) \\
 P &= 0 \\
 c_1 &= \delta r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\right) \\
 c'_1 &= \delta r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{8}\right) \\
 c'_2 &= \frac{\pi}{2} \delta r^2
 \end{aligned}$$

Подставивъ найденныя N_0 и M_0 въ выраженія изгибающихъ моментовъ (71) и (72) получимъ

$$M_1 = \delta r^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi \right)$$

и

$$M_2 = \delta r^2 \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + \pi \sin \varphi \right)$$

Если мы сравнимъ найденныя выраженія изгибающихъ моментовъ съ формулами (65) и (65'), опредѣляющими изгибающіе моменты отъ вѣса воды, то увидимъ, что стоящіе въ скобкахъ многочлены отличаются лишь множителемъ 2 и слѣдовательно суммарный изгибающій моментъ отъ вѣса воды и трубы будетъ

$$M = \gamma r^3 \mu \left(\frac{\pi}{4} - 0,75 \cos \varphi - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) \quad \text{(73)}$$

гдѣ

$$\mu = 1 + 2 \frac{\delta}{\gamma r} = 1 + 2 \frac{\gamma_1 e}{\gamma r}$$

гдѣ γ_1 вѣсъ матеріала стѣнокъ трубы, e ихъ толщина. Какъ и раньше для трубы лежащей на землѣ въ этой формулѣ r означаетъ радіусъ срединной линіи стѣнки трубы.

Для опредѣленія нормальныхъ усилій отъ собственнаго вѣса въ сѣ-

ченіяхъ верхней четверти трубы, т. е. для φ не большаго $\frac{\pi}{2}$ спроектируемъ силы, дѣйствующія на дугу DE на направленье N (черт. 16)

$$N - N_0 \cos \varphi - r\varphi \delta \sin \varphi = 0$$

Откуда, по подстановкѣ найденнаго выше N_0 получимъ

$$N = \delta r \left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \varphi \sin \varphi \right) \dots \dots \dots (74)$$

Нормальное усиліе въ сѣченіи $\varphi = 66^\circ 47'$, гдѣ имѣетъ мѣсто *max M*

$$N = 1,2683 \delta r = 1,2683 e_{11} r \dots \dots \dots (74')$$

Все сказанное при изслѣдованіи изгибающихъ моментовъ и деформаций отъ вѣса воды приложимо къ данному случаю и, очевидно, чертежъ 17 изображаетъ деформациіи $\eta: \frac{\delta r^4}{EI}$ и изгибающіе моменты $M: \delta r^3$.

Примѣръ 22. Опредѣлить наибольшее напряженіе при заполненіи водой желѣзной трубы діаметромъ 3,3 м., задѣланной до $\frac{1}{2}$ высоты въ бетонный фундаментъ. Толщина стѣнки 1,5 см. (труба водовода гидроэлектрической станціи въ Champ близъ Гренобля. Genie civil. 1902—1903 р. 49).

Наибольшій изгибающій моментъ получимъ умноженіемъ момента по форм. (70) на

$$\mu = 1 + 2 \frac{7,85 \cdot 1,5}{165} = 1,143$$

$$\mathfrak{M} = -0,0459 \cdot 10^{-3} \cdot 4,49 \cdot 10^6 \cdot 1,143 = -235 \text{ кгр. см.}$$

Въ этомъ сѣченіи нормальное усиліе отъ вѣса воды по (70)

$$N = -0,1687 \cdot 10^{-3} \cdot 2,72 \cdot 10^4 = -4,6 \text{ кгр.}$$

Отъ собственнаго вѣса трубы по (74')

$$N = 1,2683 \cdot 1,5 \cdot 0,00785 \cdot 165 = 2,8 \text{ кгр.}$$

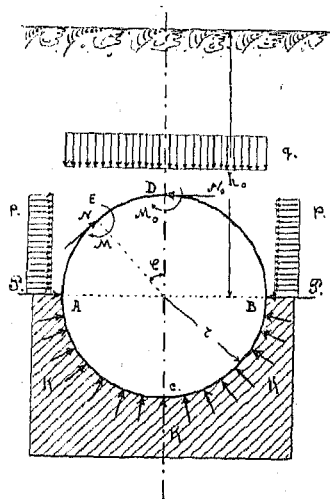
Такъ что суммарное нормальное усиліе будетъ растягивающимъ и оно равно $2,8 - 4,6 = -1,8$ кгр., величина исчезающая при опредѣленіи напряженій сравнительно съ изгибающимъ моментомъ. Наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{6\mathfrak{M}}{e^3} = \frac{6 \cdot 235}{2,25} = 627 \text{ кгр/см}^2.$$

3. Давленіе земли.

Положимъ теперь, что труба, задѣланная до половины высоты въ кладку, зарыта въ землю такъ, что ось ея ниже поверхности земли на h_0 (черт. 19). Замѣнимъ въ этомъ случаѣ земляную насыпь дав-

леніемъ, которое предположимъ равномерно распределеннымъ по вертикальной и горизонтальной проекціямъ трубы, т. е. положимъ, что относительныя давленія q и p на вертикальную и горизонтальную проекцію элемента поверхности данной трубы зависятъ лишь отъ h_0 и не мѣняются при измѣненіи угла φ . Это предположеніе значительно облегчитъ наши разсужденія для даннаго сложнаго случая; для того же, чтобы оно не слишкомъ исказило окончательные выводы, можно опредѣлять значеніе q , исходя изъ глубины погруженія точекъ трубы близкихъ къ вершинѣ (φ около 0), а для p — точекъ близкихъ къ горизонтальному діаметру (φ около 90°), такъ какъ давленіе въ этихъ участкахъ поверхности трубы имѣетъ большее вліяніе на напряженіе.



Черт. 19.

Разсмотримъ трубу, не заполненную водой. Такъ какъ деформаціи трубы весьма не велики, какъ видно это изъ предыдущихъ примѣровъ, то при совокупномъ дѣйствіи вѣса воды и давленія земли, можно опредѣлять напряженіе простымъ сложеніемъ напряженій, вызываемыхъ каждой изъ этихъ нагрузокъ въ отдѣльности. Ходъ разсужденія для опредѣленія статически неопредѣлимыхъ M_0 и N_0 , въ данномъ случаѣ, совершенно аналогиченъ выше примѣненному къ случаю дѣйствія вѣса воды и трубы. Здѣсь мы сдѣлаемъ тѣ же гипотезы относительно деформаціи трубы и нагрузки на ея нижнюю половину.

Относительное давленіе фундамента k , изъ условія равновѣсія всей трубы найдемъ: $k = q$.

Суммируя моменты силъ, дѣйствующихъ на часть трубы DE , относительно точки E при φ не большемъ $\frac{\pi}{2}$ получимъ,

$$M_1 = N_0 r (1 - \cos \varphi) - \frac{qr^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{pr^2}{2} (1 - \cos \varphi)^2 - M_0. \quad (75)$$

и при φ не меньшемъ $\frac{\pi}{2}$

$$M_2 = N_0 r (1 - \cos \varphi) - qr^2 \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \right) - pr^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right) + \\ + Pr \cos \varphi - qr^2 (1 - \sin \varphi) - M_0$$

или

$$M_2 = N_0 r (1 - \cos \varphi) - \frac{qr^2}{2} - pr^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right) + Pr \cos \varphi - M_0. \quad (76)$$

Дифференціальныя уравненія изогнутой оси будутъ для тѣхъ же предѣловъ:

$$\frac{d^2\eta_1}{d\varphi^2} + \eta_1 = \frac{M_1 r^2}{EJ} = \frac{r^2}{EJ} \left[N_0 r (1 - \cos \varphi) - \frac{qr^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{pr^2}{2} (1 - \cos \varphi)^2 - M_0 \right]$$

и

$$\frac{d^2\eta_2}{d\varphi^2} + \eta_2 = \frac{r^2}{EJ} \left[N_0 r (1 - \cos \varphi) - \frac{qr^2}{2} - pr^2 \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right) + Pr \cos \varphi - M_0 \right]$$

Ихъ рѣшенія:

$$\eta_1 = \frac{r^2}{EJ} \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - \frac{qr^2}{6} (1 + \cos^3 \varphi) - \frac{pr^2}{2} \left(1 - \varphi \sin \varphi + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin^2 \varphi \right) - M_0 \right] - C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi \dots (77)$$

и

$$\eta_2 = \frac{r^2}{EJ} \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - \frac{qr^2}{2} - \frac{pr^2}{2} (1 - \varphi \sin \varphi) - M_0 + \frac{\varphi}{2} \sin \varphi Pr \right] - C_1' \cos \varphi + C_2' \sin \varphi \dots (78)$$

Устанавливая для опредѣленія M_0 , N_0 , P , C_1 , C_2 , C_1' , C_2' тѣ-же условія, что и въ предыдущихъ случаяхъ, получимъ:

$$\left. \frac{d\eta_1}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \dots C_2 = 0 \dots (79)$$

$$\left. \frac{d\eta_2}{d\varphi} \right|_{\varphi=\pi} = 0 \dots N_0 r \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} pr^2 - \frac{\pi}{2} Pr - \frac{EJ}{r^2} C_2' = 0 \dots (80)$$

$$|\eta_1|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \dots N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{qr^2}{6} - \frac{pr^2}{2} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right) - M_0 = 0 \dots (81)$$

$$|\eta_2|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \dots N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{qr^2}{2} - \frac{pr^2}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - M_0 + \frac{\pi}{4} Pr + \frac{EJ}{r^2} C_2' = 0 \dots (82)$$

$$|\eta_2|_{\varphi=\pi} = 0 \dots N_0 r - \frac{qr^2}{2} - \frac{pr^2}{2} - M_0 + \frac{EJ}{r^2} C_1' = 0 \dots (83)$$

Условіе, что сѣченіе $\varphi = \pi$ не поворачивается при деформациі

$$\int_0^\pi M d\varphi = 0,$$

а отсюда по подстановкѣ выражений M_1 и M_2

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} N_0 r (1 - \cos \varphi) d\varphi - pr^2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos \varphi \right) d\varphi - \int_0^{\pi} M_0 d\varphi - \\ & - \frac{qr^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{pr^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{qr^2}{2} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Pr \cos \varphi d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Выполняя интегрированія, получимъ:

$$r\pi N_0 - pr^2 \frac{\pi}{2} - M_0 \pi - \frac{\pi}{8} qr^2 - \frac{\pi}{8} pr^2 - \frac{\pi}{4} qr^2 - Pr = 0$$

откуда по приведеніи

$$\pi r N_0 - \frac{5\pi}{8} pr^2 - \frac{3\pi}{8} qr^2 - M_0 \pi - Pr = 0 \quad (84)$$

Наконецъ изъ условія, что длина полукольца не измѣняется

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \eta d\varphi = 0 = \frac{r^2}{EJ} \left\{ \int_0^{\pi} \left[N_0 r \left(1 - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \right) - M_0 - \frac{pr^2}{2} (1 - \varphi \sin \varphi) \right] d\varphi - \right. \\ & \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{qr^2}{6} (1 + \cos^2 \varphi) + \frac{pr^2}{6} (1 + \sin^2 \varphi) \right] d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{qr^2}{2} - \frac{\varphi}{2} \sin \varphi Pr \right] d\varphi \right\} - C_1 + C_1' + C_2'. \end{aligned}$$

По выполненіи интегрированія:

$$N_0 r \frac{\pi}{2} - M_0 \pi - \frac{qr^2}{6} \frac{3\pi}{4} - \frac{pr^2}{6} \frac{3\pi}{4} - \frac{qr^2}{2} \frac{\pi}{2} + Pr \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) - \frac{EJ}{r^2} (C_1 - C_1' - C_2') = 0.$$

По приведеніи:

$$N_0 r \frac{\pi}{2} - M_0 \pi - \frac{3\pi}{8} qr^2 - \frac{\pi}{8} pr^2 + \frac{\pi-1}{2} Pr - \frac{EJ}{r^2} (C_1 - C_1' - C_2') = 0 \quad (85)$$

Слѣдовательно для опредѣленія неизвѣстныхъ имѣемъ систему уравненій:

$$N_0 r \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} p r^2 - \frac{\pi}{2} P r - \frac{EJ}{r^2} C_2' = 0 \quad (80)$$

$$N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{q r^2}{6} - \frac{p r^2}{2} \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}\right) - M_0 = 0 \quad (81)$$

$$N_0 r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{q r^2}{2} - \frac{p r^2}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) - M_0 + \frac{\pi}{4} P r + \frac{EJ}{r^2} C_2' = 0 \quad (82)$$

$$N_0 r - \frac{q r^2}{2} - \frac{p r^2}{2} - M_0 + \frac{EJ}{r^2} C_1' = 0 \quad (83)$$

$$N_0 r \pi - \frac{5\pi}{8} p r^2 - \frac{3\pi}{8} q r^2 - M_0 \pi - P r = 0 \quad (84)$$

$$N_0 r \frac{\pi}{2} - M_0 \pi - \frac{3\pi}{8} q r^2 - \frac{\pi}{8} p r^2 + \frac{\pi-1}{2} P r - \frac{EJ}{r^2} (C_1 - C_1' - C_2') = 0 \quad (85)$$

Рѣшеніемъ этихъ уравненій получимъ

$$N_0 = \frac{\frac{5\pi}{24} - \frac{4}{3\pi}}{A} q r + p r \left(1 - \frac{\frac{5\pi}{24} - \frac{4}{3\pi}}{A}\right); \quad M_0 = \frac{-\frac{4}{3\pi} + \frac{5\pi}{24} - \frac{3\pi^2}{32} + \frac{2}{3}}{A} (q-p) r^2;$$

$$P = \frac{\frac{\pi}{12}}{A} (q-p) r; \quad C_1 = \frac{\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{3}}{A} (q-p) \frac{r^4}{EJ};$$

$$C_1' = \frac{\frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{3}}{A} (q-p) \frac{r^4}{EJ}; \quad C_2' = \frac{\frac{\pi^2}{16} - \frac{2}{3}}{A} (q-p) \frac{r^4}{EJ},$$

$$\text{гдѣ } A = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Произведя вычисленія найдемъ:

$$N_0 = 0,4923 q r + 0,5077 p r \quad (86)$$

и

$$M_0 = -0,0610 (q-p) r^2 \quad (87)$$

Подставляя найденные M_0 , N_0 и P въ (75) и (76), найдемъ формулы, по которымъ можно вычислить изгибающій моментъ въ любомъ сѣченіи трубы. Для угла φ не большаго $\frac{\pi}{2}$

$$M_1 = [0,5533 - 0,4923 \cos \varphi - 0,5 \sin^2 \varphi] (q-p) r^2 \quad (88)$$

для φ не меньшаго $\frac{\pi}{2}$

$$M_2 (0,0533 + 0,0678 \cos \varphi) (q-p) r^2 \quad (89)$$

Равнымъ образомъ изъ (77) и (78) получимъ формулы для вычисления деформаций въ тѣхъ же предѣлахъ:

$$\eta_1 = [0,3867 - 0,2268 \cos \varphi - 0,1667 \cos^2 \varphi - 0,2462 \varphi \sin \varphi] (q-p) \frac{r^4}{EJ} \quad (90)$$

и

$$\eta_2 = [0,0533 (1 + \cos \varphi) - 0,1066 \sin \varphi + 0,0339 \varphi \sin \varphi] (q-p) \frac{r^4}{EJ} \quad (91)$$

Изгибающіе моменты и деформации, подсчитанные по форм. (88), (89), (90) и (91) даны въ табл. VIII (стр. 114) и изображены на черт. 20.

Найдемъ теперь наибольшій изгибающій моментъ. Для опредѣленія его изъ (88) имѣемъ уравненіе:

$$0,4923 \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

Оно удовлетворяется при $\varphi=0$.
При этомъ $M_1 = -M_0$.

Другое, интересное для насъ рѣшеніе, $\cos \varphi = 0,4923$, что отвѣчаетъ $\varphi = 60^\circ 30'$. При этомъ изгибающій моментъ будетъ больше, чѣмъ при $\varphi=0$ и онъ равенъ:

$$M_1 = -0,0679 (q-p) r^3. \quad (92)$$

Наибольшее значеніе M_2 меньше найденнаго выше значенія M_1 .

Для опредѣленія нормальнаго усилія N въ любомъ сѣченіи верхней четверти окружности, проектируя силы, дѣйствующія на дугу DE (черт. 19) на направленіе N , получимъ

$$N_1 = N_0 \cos \varphi + qr \sin^2 \varphi - pr (\cos \varphi - \cos^3 \varphi),$$

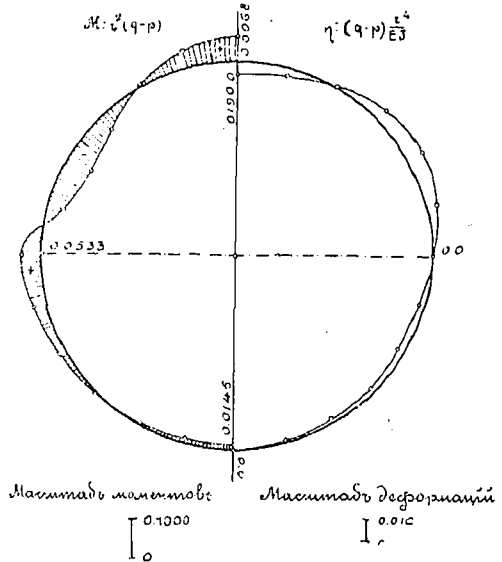
а по введеніи N_0

$$N_1 = qr + (0,4923 \cos \varphi - \cos^3 \varphi) (q-p) r \quad \dots \quad (93)$$

Значеніе N_1 соотвѣтствующее $\max M_1$

$$N_1 = qr.$$

Найденный въ формулѣ (92) наибольшій изгибающій моментъ не интересенъ самъ по себѣ, такъ какъ при расчетѣ трубы, зарытой въ



Черт. 20.

землю, необходимо разсматривать наиболѣе неблагоприятный случай, а это будетъ тогда, когда труба заполнена водой. Наибольшій изгибающій моментъ, вызываемый вѣсомъ воды заполняющей трубу и собственнымъ ея вѣсомъ, какъ найдено было раньше, имѣетъ тотъ же знакъ, что M по форм. (92) и соотвѣтствуетъ $\varphi = 66^{\circ}47'$. Слѣдовательно максимумъ изгибающаго момента при совмѣстномъ дѣйствіи давленіи земли и этихъ двухъ нагрузокъ будетъ соотвѣтствовать значенію φ между $60^{\circ}30'$ и $\varphi = 66^{\circ}47'$. При томъ, въ зависимости отъ того, вліяніе какой изъ этихъ нагрузокъ будетъ больше, φ соотвѣтствующее максимуму суммарнаго M будетъ ближе къ одной или къ другой границѣ. Найти общую формулу, опредѣляющую это φ затруднительно, такъ какъ уравненіе для нахождения φ не разрѣшимо въ общемъ видѣ.

Для трубъ небольшого размѣра, глубоко зарытыхъ въ землю, вліяніе вѣса воды и трубы незначительно сравнительно съ вліяніемъ давленія земли и потому, безъ большой погрѣшности, можно было бы рассчитывать трубу по напряженіямъ въ сѣченіи $\varphi = 60^{\circ}30'$. Трубы большого размѣра обыкновенно не зарываютъ глубоко, такъ какъ иначе ихъ пришлось бы дѣлать очень толстыми: въ этомъ случаѣ вліяніе той и другой нагрузки сравниваются и наибольшій моментъ будетъ при φ среднемъ между 60 и 67 градусами. Конечно, построивъ діаграммы изгибающихъ моментовъ на этомъ промежуткѣ, можно въ каждомъ частномъ случаѣ найти точное рѣшеніе, но, какъ видно изъ приводимыхъ примѣровъ, можно ограничиться расчетомъ по суммѣ наибольшихъ изгибающихъ моментовъ, дающимъ запасъ въ пользу прочности.

Подсчитывая изгибающіе моменты и нормальныя усилія отъ давленій земли и вѣса воды и трубы по формуламъ (65), (67), (74), (88) и (93), получимъ:

$\varphi = 60^{\circ}30'$	$ $	$\varphi = 66^{\circ}47'$
отъ давленія земли		
$M_3 = -0,0679 (q - p) r^2$		$M_3 = -0,0631 (q - p) r^2$
$N_3 = qr$		$N_3 = 1,0378 qr - 0,0378 pr$

отъ вѣса воды и трубы

$M_e = -0,0432 \gamma r^3 \mu$		$M_e = -0,0459 \gamma r^3 \mu$
$N_e = -0,1714 \gamma r^2 + 1,1649 \gamma_1 er$		$N_e = -0,1687 \gamma r^2 + 1,2683 \gamma_1 er$

Примѣръ 23. Желѣзная труба діаметромъ 3,3 м. задѣлана въ бетонъ на 20 см. выше уровня горизонтальнаго діаметра. Толщина земляной обсыпки 40 см. надъ вершиной трубы. Толщина стѣнки трубы $e = 1,5$ см. (Труба водовода гидроэлектрической станціи въ Champ. близъ Гренобля). Принявъ во вниманіе, сдѣланныя выше замѣ-

чанія, опредѣлимъ давленія q и p слѣдующимъ образомъ: q вычислимъ по глубинѣ погруженія подъ поверхностью земли точки, соотвѣтствующей центральному углу 45° , а p по h_0 , равному въ данномъ случаѣ $165 + 40 = 205$ см. Принимая вѣсъ грунта $g = 0,0016$ кгр./см.³, найдемъ

$$q = 0,0016 (40 + 165 - 165 \cdot 0,707) = 0,142 \text{ кгр./см}^2.$$

По формулѣ (21), положивъ тамъ $q_1 = p_1 = 0$, найдемъ, что $\frac{p_0}{q_0} = tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$. Примемъ это соотношеніе въ нашемъ расчетѣ. Положимъ уголъ естественнаго откоса грунта $\varphi = 25^\circ$. Тогда

$$p = gh_0 tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 0,406 \cdot 0,0016 \cdot 205 = 0,133 \text{ кгр./см}^2$$

и

$$g - p = 0,009 \text{ к/см}^2.$$

По найденнымъ выше формуламъ изгибающихъ моментовъ и нормальныхъ усилій при $r = 1,143$ (см. примѣръ 22) въ сѣченіи $\varphi = 60^\circ 30'$ получимъ:

отъ вѣса воды и трубы

$$M_a = -0,0432 \cdot 10^{-3} \cdot 4,49 \cdot 10^6 \cdot 1,143 = -222 \text{ кгр. см.}$$

отъ давленія земли

$$M_3 = -0,0679 \cdot 0,009 \cdot 2,72 \cdot 10^4 = -17 \text{ кгр. см.}$$

$$\Sigma M = -239 \text{ кгр. см.}$$

Нормальные усилія въ этомъ сѣченіи:

отъ вѣса воды и трубы

$$N_a = -0,1714 \cdot 2,72 \cdot 10 + 1,1649 \cdot 0,00785 \cdot 1,5 \cdot 165 = -2,4 \text{ кгр.}$$

отъ давленія земли,

$$N_3 = 0,142 \cdot 165 = 23,4 \text{ кгр.}$$

$$N = 21 \text{ кгр.}$$

Въ сѣченіи $\varphi = 66^\circ 47'$:

$$\text{отъ вѣса воды и трубы } M_a = -235 \text{ кгр. см.}$$

$$\text{отъ давленія земли } M_3 = -15 \text{ кгр. см.}$$

$$\Sigma M = -250 \text{ кгр. см.}$$

Нормальные усилія:

$$\text{отъ вѣса воды и трубы } N_a = -2,3 \text{ кгр.}$$

$$\text{отъ давленія земли } N_3 \approx 24 \text{ кгр.}$$

$$N \approx 22 \text{ кгр.}$$

Какъ видно сумма наибольшихъ изгибающихъ моментовъ отъ вѣса воды и трубы и давленія земли, равная 252 кгр. см. почти не отличается отъ изгибающаго момента въ сѣченіи $\varphi = 66^\circ 47'$, что можно было предполагать въ виду малой величины $q-p$ и большихъ размѣровъ трубы. Въ этомъ сѣченіи наибольшія напряженія:

$$\sigma = \frac{22}{1,5} \pm \frac{6 \cdot 250}{2,25} = 15 \pm 667 = \begin{matrix} + 682 \text{ к/см}^2 \text{ сжимающія} \\ - 652 \text{ к/см}^2 \text{ растягивающія} \end{matrix}$$

Посмотримъ, какъ велики будутъ деформациі. Воспользуемся для этого данными табл. VII и VIII.

При $\varphi = 60^\circ$ по этимъ таблицамъ отъ давленія земли (табл. VIII)

$$\eta_1 = 0,0083 (q - p) \frac{r^4}{EI}$$

отъ вѣса воды и трубы (табл. VII)

$$\eta_2 = 0,0077 \frac{\gamma r^5 \mu}{EI}$$

Полное перемѣщеніе по направленію радіуса въ этомъ сѣченіи

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_1 + \eta_2 = 0,0083 \frac{0,009 \cdot 4,49 \cdot 10^6 \cdot 165}{2,15 \cdot 10^6 \cdot 0,281} + \\ &+ 0,0077 \frac{4,49 \cdot 2,72 \cdot 10^{10} \cdot 1,143}{10^3 \cdot 2,15 \cdot 10^6 \cdot 0,281} = 0,092 + 1,775 \end{aligned}$$

и $\eta = 1,867$ см. величина весьма небольшая сравнительно съ $r = 165$ см.

Примѣръ 24. Чугунная водопроводная раструбная труба русскаго метрическаго нормальнаго сортамента внутри діам. $d = 1200$ мм. задѣлана въ кладку до половины высоты сѣченія и покрыта насыпью $h_0 = 4$ метр. Толщина стѣнки $e = 3$ см., слѣдовательно $r = 61,5$ см. Определить наибольшія напряженія въ стѣнкахъ этой трубы, если она служить для проведенія воды безъ напора?

Опредѣлимъ q и p , какъ въ предыдущемъ примѣрѣ:

$$q = 0,0016 \cdot (400 - 63 \cdot \cos 45^\circ) \approx 0,0016 \cdot 356 = 0,57 \text{ к/см}^2$$

и

$$p = gh_0 \lg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 0,0016 \cdot 400 \cdot 0,406 = 0,26 \text{ к/см}^2$$

Слѣдовательно $q - p = 0,31 \text{ к/см}^2$.

Для этой трубы, принимая для чугуна $\gamma_1 = 0,00725$

$$\mu = 1 + \frac{7,25 \cdot 3}{61,5} \approx 1,707.$$

Въ сѣченіи $\varphi = 60^\circ 30'$:

отъ вѣса воды и трубы

$$M_a = -0,0432 \cdot 10^{-3} \cdot 2,33 \cdot 10^5 \cdot 1,707 = -17,2 \text{ кг. см.}$$

отъ давленія земли

$$M_3 = -0,0679 \cdot 0,31 \cdot 3,78 \cdot 10^3 = -79,6 \text{ кг. см.}$$

$$M \infty - 97 \text{ кг. см.}$$

Нормальное усиліе отъ давленія земли

$$N_3 = 0,57 \cdot 61,5 = 35 \text{ кг.}$$

Отъ вѣса воды и трубы N_a совершенно ничтожно.

Для сѣченія $\varphi = 66^\circ 47'$:

отъ вѣса воды и трубы

$$M_a = -0,0459 \cdot 10^3 \cdot 2,33 \cdot 10^5 \cdot 1,707 = -18,3 \text{ кг. см.}$$

отъ давленія земли

$$M_3 = -0,0631 \cdot 0,31 \cdot 3,78 \cdot 10^3 = -73,9 \text{ кг. см.}$$

$$M \infty - 92 \text{ кг. см.}$$

Нормальное усиліе отъ давленія земли въ этомъ сѣченіи

$$N_3 = 36,4 - 0,6 \infty 36 \text{ кг.}$$

Для этой трубы сумма наибольшихъ изгибающихъ моментовъ — 97,9 кг. см. очень мало отличается отъ M въ сѣченіи $\varphi = 60^\circ 30'$, гдѣ имѣетъ наибольшее значеніе изгибающій моментъ отъ давленія земли.

Въ этомъ сѣченіи наибольшія напряженія

$$\sigma = \frac{35}{3} \pm \frac{6 \cdot 97}{9} = +77 \text{ к/см}^2 \text{ сжимающее}$$

$$= -53 \text{ к/см}^2 \text{ растягивающее}$$

Даже для чугуна эти напряженія слишкомъ низки. Это понятно, т. к. 1) водопроводныя трубы сортамента предназначены для напорныхъ, а не для самотечныхъ водоводовъ, 2) ихъ обыкновенно не задѣлываютъ въ кладку, 3) въ расчетѣ не принята во вниманіе временная нагрузка. Впрочемъ, послѣднее не имѣетъ значенія въ данномъ случаѣ, такъ какъ труба находится на глубинѣ 4 м. подъ поверхностью земли.

Въ томъ случаѣ, когда труба задѣлана въ фундаментъ и заполнена водой подъ давленіемъ h атмосферъ (какъ раньше давленіе h равномерно распредѣлено по срединной линіи и меньше внутренняго давленія въ отношеніи $\frac{r_a}{r}$) слѣдовало-бы по предыдущему принять при расчетѣ

во вниманіе вызываемый этимъ давленіемъ моментъ $N\eta = kr\eta$, понижающій напряженія отъ изгиба. Но, если мы сравнимъ данныя въ таблицахъ VII и VIII величины изгибающихъ моментовъ M и деформаций η (вѣрнѣе ихъ отношенія къ не зависящимъ отъ центральнаго угла φ множителямъ въ ихъ выраженіяхъ) съ таковыми же для трубъ, лежащихъ на землѣ и въ землѣ въ табл. I и II, то увидимъ, что наибольшіе моменты для трубъ, задѣланныхъ въ кладку, меньше, приблизительно раза въ три, а деформации меньше разъ въ 6. Понятно, что вліяніе внутренняго давленія на напряженія отъ изгиба здѣсь будетъ много меньше.

Кромѣ того, напряженія отъ сплющиванья, благодаря малымъ M , будутъ не велики, а предположенія, при которыхъ выведены расчетныя формулы до извѣстной степени произвольны. Ввиду всего этого осторожнѣе будетъ остановиться на расчетѣ, заведомо увеличивающемъ прочность проектируемой трубы, и просто суммировать растягивающія напряженія отъ равномернаго внутренняго давленія съ напряженіями отъ изгибающихъ моментовъ, не обращая вниманія на то, что эти моменты въ дѣйствительности нѣсколько уменьшаются отъ внутренняго давленія.

Т А Б Л И Ц А VIII.

изгибающихъ моментовъ и деформаций для трубы, задѣланной въ кладку.
(давленіе земли).

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$M : r^2 (q-p)$	+0.0610	+0.0443	+0.0020	—0.0448	—0.0679	—0.0406	+0.0533
$\eta : (q-p) \frac{r^4}{EJ}$	—0.0068	—0.0046	+0.0008	+0.0063	+0.0083	+0.0055	0.0
φ	105°	120°	135°	150°	165°	180°	
$M : r^2 (q-p)$	+0.0358	+0.0194	+0.0054	—0.0054	—0.0122	—0.0145	
$\eta : (q-p) \frac{r^4}{EJ}$	—0.0034	—0.0041	—0.0033	—0.0017	—0.0005	0.0	

VI. Важнѣйшія формулы и общія замѣчанія по поводу расчета тонкостѣнныхъ трубъ.

Соберемъ формулы, которыми придется пользоваться при расчетѣ безнапорныхъ и напорныхъ трубъ.

Наибольшее напряженіе

$$\sigma = \frac{N}{e} \pm \frac{6M}{e^2}.$$

I. Безнапорная труба.

а) Труба лежит на землѣ опираясь нижней полуокружностью и заполнена водой, но безъ напора.

Наибольшій изгибающій моментъ

$$M_{\frac{\pi}{2}} = -0,1488 \gamma r^3 \mu = -0,1488 \gamma r^3 \left(1 + \frac{2\delta}{\gamma r} \right).$$

Для неусиленной кольцами трубы $\delta = \gamma_1 e$. [форм. (3), (8), (10) и табл. I].

Нормальные усилія не играютъ роли при расчетѣ.

б) Труба, заполненная водой, зарыта въ землю такъ, что ось ея лежитъ ниже поверхности земли на h_0 .

Наибольшій изгибающій моментъ получается суммированіемъ момента указаннаго въ пунктѣ а) съ

$$M_{\frac{\pi}{2}} = -gh_0 r^2 \left[\frac{1 - tg^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)}{4} - \frac{r}{h_0} \left(0,226 - 0,085 tg^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right]. \quad (28)$$

Нормальное усиліе отъ вѣса воды и трубы ничтожно; отъ давленія земли

$$N_{\frac{\pi}{2}} = -grh_0 \left(1 - \frac{\pi}{4} \frac{r}{h_0} \right) \dots \dots \dots (27)$$

[Значенія M для разныхъ φ въ табл. III].

с) Труба опирается на фундаментъ частью нижней полуокружности, соотвѣтствующей центральному углу 2α .

Наибольшій изгибающій моментъ отъ вѣса воды, заполняющей трубу и ея собственнаго вѣса на нижнемъ концѣ вертикальнаго діаметра для разныхъ угловъ α указанъ въ табл. V; для тѣхъ угловъ α , для которыхъ не имѣется данныхъ въ табл. V этотъ моментъ можетъ быть полученъ по форм. (40) при $\varphi = 0$ умноженіемъ на

$$\mu = 1 + \frac{2\delta}{\gamma r} = 1 + 2 \frac{\gamma_1 e}{\gamma r}$$

(Кривыя M на черт. 14).

д) Труба задѣлана до половины высоты поперечнаго сѣченія въ кладку, заполнена водой безъ напора и не прикрыта насыпью.

Наибольшій изгибающій моментъ получается по формулѣ (70) умноженіемъ на μ .

$$M_{66^\circ 47'} = -0,0459 \gamma r^3 \mu.$$

Нормальные усилія не стоитъ принимать во вниманіе при расчетѣ

е) Труба въ условіяхъ пункта d) зарыта въ землю на глубину h_0 отъ поверхности земли до оси трубы.

Наибольшій изгибающій моментъ въ этомъ случаѣ нѣсколько меньше суммы момента по пункту d) и момента

$$M_{60^\circ 30'} = -0,0679 (q - p)r^2 \dots \dots \dots (92)$$

Объ опредѣленіи наибольшаго изгибающаго момента, стр. 110 и дальше.

Нормальное усиліе отъ давленія земли, соотвѣтствующее M при $60^\circ 30'$

$$N = qr.$$

II. Напорная труба.

Наибольшее напряженіе для трубы подъ нагрузкой указанной въ п. п. а, b и c растягиваемой равномернымъ внутреннимъ давленіемъ k клгр./см.² опредѣляется по формулѣ

$$\sigma = \frac{N}{e} \pm \frac{6M}{e^3} = \frac{kr}{e} \pm \frac{6M'}{e^3}$$

гдѣ $M' = \xi M$, а M наибольшій изгибающій моментъ для безнапорной трубы.

ξ для нагрузки пунктовъ:

$$\text{a) и b) } \xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3},$$

$$\text{c) 1) } \xi = \frac{EJ}{EJ + \frac{kr^3}{1 - \frac{\pi^2}{4\alpha^2}}} \quad \text{для } \alpha < 45^\circ \text{ и}$$

$$\xi = \frac{3EJ}{3EJ + kr^3} \quad \text{для угловъ } \alpha = 45^\circ \text{ и близкихъ къ этому.}$$

Опредѣленное такимъ путемъ напряженіе слѣдуетъ сравнить съ напряженіемъ въ сѣченіи $\varphi = \alpha$ [табл. V и форм. (40) для M], гдѣ $\xi = 1$.

Наибольшее напряженіе для трубы подъ нагрузкой, указанной въ п. п. d) и e), растягиваемой равномернымъ давленіемъ k , опредѣляется

1) При желаніи имѣть для этого случая сплюсывающей нагрузки результаты расчета съ точностью большей 3—5%, наибольшія напряженія слѣдуетъ опредѣлить по формулѣ:

$$\sigma = \frac{kr}{e} \pm \frac{M + \xi \eta_0 kr}{e^2},$$

гдѣ M и η_0 изгибающій моментъ и деформация безнапорной трубы опредѣляются по табл. V или по форм. (40) и (46), (47) при $\varphi = 0$.

суммированиемъ напряженій въ безнапорной трубѣ съ растягивающимъ напряженіемъ

$$\sigma = \frac{N}{e} = \frac{kr}{e}.$$

III. Напорная или безнапорная труба подъ водой.
Сжимающія напряжения опредѣляются по формулѣ

$$\sigma = \frac{kr_n}{e}.$$

При толщинѣ стѣнки $e < \frac{1}{17} r$ слѣдуетъ провѣрить трубу на сплющиваніе по формулѣ

$$k \leq \frac{1}{n} \frac{3,3 EJ}{r^3},$$

гдѣ n —запасъ прочности.

Расчетъ трубъ по приведеннымъ выше формуламъ не представляетъ особыхъ затрудненій.

Относительно опредѣленія толщины стѣнки e надо указать на слѣдующее: въ выраженіе для изгибающихъ моментовъ входитъ множитель μ и радіусъ срединной линіи трубы, а при расчетѣ задается обыкновенно лишь внутренній радіусъ r_0 ; такъ какъ и μ и r могутъ быть выражены въ зависимости отъ r_0 только при извѣстномъ e , то расчетъ придется вести постепеннымъ приближеніемъ, задаваясь при первой попыткѣ толщиной e по соображенію съ существующими трубами. Для стальныхъ и желѣзныхъ трубъ, обыкновенно толщина ихъ стѣнокъ очень не велика и получаютъ вполнѣ удовлетворительные результаты, если въ формулы изгибающихъ моментовъ подставлять заданные r_0 вмѣсто r ; коэффициентъ μ при этомъ можно взять по соображенію съ приведенными у насъ примѣрами, въ предѣлахъ отъ 1,1 до 1,25; полученную при такихъ условіяхъ толщину стѣнки слѣдуетъ провѣрить точнымъ расчетомъ.

Весьма важнымъ при расчетѣ является вопросъ о допускаемыхъ напряженияхъ. Какъ извѣстно, величина ихъ зависитъ отъ точности расчетъ, способа дѣйствія внѣшнихъ силъ и важности конструкцій.

Примѣняемые обычно запасы прочности при расчетѣ трубъ относятся къ расчету по одному лишь внутреннему давленію. Къ опредѣленной такимъ образомъ толщинѣ стѣнки прибавляется нѣкоторая толщина за сплющиванье трубы и 1—2 мм. на износъ и ржавленье. Добавокъ на сплющиванье произволенъ и оцѣнивается по соображенію: расчетъ не точенъ, а потому запасъ прочности долженъ быть великъ.

Даже при такомъ расчетѣ американскіе инженеры рѣшались допустить для желѣза напряженія до 1150 кгр./см.², а въ нѣкоторыхъ

случаяхъ даже и до 1750 клгр./см. у проф. Сидорова «Трубы и ихъ соединенія», стр. 206).

Вообще же при такомъ расчетѣ принимаютъ запасъ прочности для желѣза и стали отъ 2 до 5. Меньшая изъ этихъ цифръ безусловно рискованна для желѣза, т. к. она уже слишкомъ приближаетъ напряженіе къ предѣлу упругости и, слѣдовательно, случайное увеличеніе нагрузки можетъ вызвать въ трубѣ остающіяся деформации, матеріалъ будетъ надорванъ и дальнѣйшее благополучное существованіе трубы лишь счастливая случайность.

Принятые нами при расчетѣ предположенія относительно дѣйствія внѣшнихъ силъ соотвѣтствуютъ наиболѣе неблагоприятнымъ случаямъ, расчетъ достаточно точенъ и съ этой точки зрѣнія можно удовольствоваться небольшимъ запасомъ прочности.

Относительно способа приложенія внѣшнихъ силъ для водопроводовъ питьевыхъ не будетъ большой ошибкой сказать, что нагрузка прилагается статически—безъ всякихъ ударовъ.

Сомнительнымъ въ этомъ отношеніи является дѣйствіе временной нагрузки и внутренняго давленія. Временная нагрузка очевидно возможна лишь для трубъ, зарытыхъ въ землю (п. п. б) и е) въ перечнѣ формулъ).

Мы пока не обращали на нее вниманіе потому, что для такихъ трубъ эта нагрузка можетъ быть замѣнена добавкомъ къ высотѣ насыпи h_0 , т. е. для расчета трубы засыпанной землей и нагруженной временной нагрузкой мы замѣнимъ эту послѣднюю насыпью толщиной h_1 , зависящей отъ величины этой нагрузки, и введемъ въ расчетъ насыпь высотой не h_0 , а $h_0 + h_1$.

Эту временную нагрузку придется вводить въ расчетъ лишь въ томъ случаѣ, если труба укладывается на городскихъ улицахъ, такъ какъ подъ загородныя линіи водоводовъ обыкновенно отчуждается полоса земли и переходъ этой линіи легко установить лишь въ опредѣленныхъ пунктахъ, принявъ тамъ спеціальныя мѣры, предохраняющія трубы отъ всякихъ толчковъ и ударовъ. На городскихъ улицахъ это конечно, не всегда возможно, но и здѣсь въ томъ случаѣ если мостовая устроена на бетонномъ основаніи, а труба уложена на глубинѣ свыше 2 метровъ, вліяніе не только ударовъ, но и вообще временной нагрузки можно вовсе не принимать во вниманіе. При булыжной мостовой это было бы неосторожно, временная нагрузка должна быть введена въ расчетъ въ видѣ добавки h_1 къ высотѣ насыпи h_0 , но ударнымъ дѣйствіемъ этой нагрузки, тоже, намъ кажется, можно пренебречь, потому что и безъ того въ расчетѣ принято большее дѣйствительнаго давленіе земли.

Тонкостѣнные трубы большихъ размѣровъ, во всякомъ случаѣ, слѣдуетъ въ предѣлахъ населенныхъ пунктовъ укладывать въ туннеляхъ или галлереяхъ, имѣя ввиду, что и съ финансовой точки зрѣнія

будетъ выгодно затратить при устройствѣ водовода лишній капиталъ, чѣмъ нести миллионныя убытки отъ разрыва такой трубы, не учитывая даже неоцнѣиваемаго деньгами спокойствія и безопасности населенія.

Что касается растягивающаго трубу внутренняго давленія, то его величина можетъ рѣзко колебаться, благодаря такъ называемымъ гидравлическимъ ударамъ.

Относительно возможности такихъ рѣзкихъ измѣненій въ величинѣ h слѣдуетъ отдѣлить питьевые водоводы отъ силовыхъ, ведущихъ воду къ турбиннымъ станціямъ.

Для питьевыхъ водопроводовъ источникомъ гидравлическихъ ударовъ могутъ быть три причины: 1) неравномѣрная подача воды насосами съ напорной станціи, 2) закрываніе задвижки на самомъ водоводѣ, 3) гидравлическіе удары, переходящіе въ разсматриваемую трубу изъ отвлѣченныхъ.

Первая причина при современномъ устройствѣ присоединенія насосовъ къ трубопроводу черезъ большіе колпаки, поглощающіе всякіе толчки въ подачѣ воды, не играетъ роли; вторая, при огромной тяжести задвижекъ на большихъ трубахъ и отсутствіи особыхъ приспособленій для быстрого ихъ запиранья тоже не можетъ вызвать повышенія давленія h , которое стоило бы учитывать при расчетѣ. Время безопаснаго запиранья задвижки можно опредѣлить по соответствующимъ формуламъ (см. Allievi, *Revue de mécanique*, 1904 и нашу статью въ Инж. Журн. за 1913 г.) оно всегда оказывается меньше практически осуществимаго при устройствѣ винтовыхъ задвижекъ. (По свидѣтельству инж. Игнатова на закрытіе задвижки на 36" чугунной трубѣ требуется около $\frac{1}{2}$ часа). Если по какимъ-либо соображеніямъ примѣняются быстродѣйствующія задвижки, то и въ этомъ случаѣ устройствомъ воздушныхъ колпаковъ, а лучше водонапорныхъ колоннъ можно значительно понизить величину гидравлическаго удара, а главное отнять у него характеръ толчка въ повышеніи давленія и, слѣдовательно, въ расчетѣ опять-таки придется вводить лишь нѣсколько большее заданнаго давленіе h . (Интересующихся вопросомъ отсылаемъ къ упомянутымъ статьямъ, гдѣ найдутся указанія и на соответствующую литературу).

Наконецъ третья причина, гидравлическіе удары, переходящіе изъ малыхъ трубъ распредѣлительной сѣти въ магистрали, очевидно, можетъ имѣть мѣсто лишь въ трубахъ городской сѣти, а не для подводящихъ водоводовъ.

Судя по даннымъ инж. Игнатова, которыя получены имъ съ диаграммъ, снятыхъ самопишущими манометрами на московской водопроводной сѣти, отраженные гидравлическіе удары не вызываютъ значительнаго повышенія давленія въ большихъ трубахъ. Въ то время, какъ для 5" трубы наибольшее давленіе при ударѣ превышаетъ сред-

нее на 70—80%, для 9" трубы это превышение не больше 33%, а для 12" уже только 15%. Судя по этим данным, можно предполагать, что гидравлическіе удары въ разводящей сѣти не повышаютъ существенно давленія въ магистральныхъ.

Итакъ, въ питьевыхъ водопроводахъ нормально можно рассчитывать на статическое приложеніе нагрузки и слѣдовательно и съ этой точки зрѣнія можно ограничиться умѣреннымъ запасомъ прочности.

Что касается важности, отвѣтственности сооруженія, то здѣсь для питьевыхъ водопроводовъ возможно большое разнообразіе. Если примѣръ вода подводится лишь одной трубой, проходящей черезъ населенные пункты, то конечно запасъ прочности должно принять большій, чѣмъ въ томъ случаѣ, когда подводящихъ трубъ нѣсколько и поврежденіе ихъ не можетъ вызвать большихъ убытковъ и угрожать жизни населенія наводненіемъ.

Кромѣ того, какъ мы видѣли это на примѣрахъ, внутреннее давленіе въ нѣкоторыхъ случаяхъ понижаетъ напряженія, вызываемыя вѣсомъ воды, трубы и давленіемъ земли. Такъ какъ для напорной трубы нормальнымъ условіемъ работы будетъ присутствіе внутренняго давленія, то провѣряя толщину стѣнки трубы въ отсутствіе давленія, т. е. въ исключительно неблагоприятномъ случаѣ можно нѣсколько повысить допускаемое напряжение.

На основаніи всего изложеннаго, при расчетѣ трубъ питьевыхъ водопроводовъ можно принять какъ норму запасъ прочности 3,5, что соотвѣтствуетъ, при употребляемыхъ для желѣзныхъ и стальныхъ трубъ матеріалахъ, допускаемому напряженію для желѣза 1000 к/см² и для мягкой Сименсъ-Мартеновской стали 1250 к/см².

При расчетѣ чугунныхъ трубъ можно руководствоваться слѣдующимъ: допускаемое напряжение на разрывъ по Баху 300 к/см² при спокойной нагрузкѣ и 200 при колебаніи напряженій въ одномъ направленіи отъ 0 до *max*. При изгибѣ, по его-же опытамъ, можно допустить напряжение въ 1,7 раза большее. Осторожнѣе принять вторую изъ указанныхъ цифръ и въ соотвѣтствіи съ этимъ при расчетѣ трубы на сплющиванье допускать 350 кгр/см², что соотвѣтствуетъ примѣрно 4-хъ-кратному запасу прочности. При значительномъ внутреннемъ давленіи, когда вызываемое имъ напряжение играетъ главную роль, а напряжение отъ изгиба второстепенную, слѣдуетъ понижать допускаемое напряжение до $\frac{4}{5}$ вышеуказаннаго, т. е. до 280—300 к/см².

При расчетѣ трубъ силовыхъ водоводовъ, гдѣ внутреннее давленіе обыкновенно велико и гидравлическіе удары составляютъ нормальное явленіе такіе запасы прочности малы. Несмотря на спеціальное устройство задвижекъ и водонапорныя колонны гидравлическіе удары все-же проникаютъ въ трубы, повышая нормальное давленіе на 30—50% и болѣе. Общія указанія въ этомъ случаѣ затруднительны.

Въ зависимости отъ точности, съ которой будетъ опредѣлено повышение давления (что можно сдѣлать, пользуясь специальной литературой: наиболѣе пригоднымъ въ этомъ случаѣ является трудъ Braun'a. Druckschwankungen in Rohrleitungen и Dubs'a Allgemeine Theorie über veränderliche Bewegung des Wassers in Stollen und Wasserschloss) долженъ быть повышенъ запасъ прочности до 4 или даже 4,5 кратнаго.

Существеннымъ является, вопросъ слѣдуетъ-ли принимать во вниманіе при клепанныхъ трубахъ ослабленіе трубы продольными рядами заклепокъ. Какъ общее правило можно указать, что этого дѣлать не слѣдуетъ; какъ видно изъ діаграммъ изгибающихъ моментовъ при разныхъ случаяхъ нагрузки всегда существуютъ такіа сѣченія, въ которыхъ изгибающіе моменты равны нулю; таковы сѣченія подъ угломъ 45° къ вертикальному діаметру для трубъ, лежащихъ въ землѣ, на землѣ и на фундаментѣ (въ послѣднемъ случаѣ $M \propto 0$ для $\varphi = 33^\circ - 40^\circ$ и $\varphi = 130^\circ$ см. ч.ч. 5 и 14 и табл. II) и подъ угломъ 30° для трубы задѣланной въ кладку (см. ч.ч. 17 и 20).

Если мы расположимъ продольные швы въ этихъ именно сѣченіяхъ, то очевидно для безнапорнаго водовода ослабленіе не играетъ никакой роли, для напорнаго это зависитъ отъ величины давления, т. к. площадь ослабленнаго сѣченія должна быть достаточна для воспринятія нормального растягивающаго усилія $N = kr$; если изгибъ играетъ важную роль въ расчетѣ данной трубы, то вѣроятно ожидать, что и толщина стѣнки, несмотря на ослабленіе заклепками, будетъ достаточна, если же въ суммарномъ напряженіи $\sigma = \frac{kr}{e} \pm \frac{6M'}{e^2}$ второе слагаемое мало, то при опредѣленіи напряженій въ ослабленномъ сѣченіи, гдѣ $M' = 0$ по формулѣ $\sigma = \frac{N}{\omega_{netto}}$ легко можетъ оказаться, что они превосходятъ допускаемые и требуется увеличеніе толщины стѣнки.

Все до сихъ поръ изложенное касалось расчета трубы при дѣйствіи силъ, деформирующихъ ея поперечное сѣченіе, но какъ уже говорилось въ самомъ началѣ при опредѣленіи предѣловъ примѣнмости расчета, кромѣ этихъ силъ есть еще силы, дѣйствующія вдоль оси трубы отъ равномернаго внутренняго давления или отъ измѣненій температуры.

Что касается равномернаго внутренняго давления, то оно вызываетъ напряженія $\sigma = \frac{\pi r_o^2 k}{2\pi r e} \propto \frac{rk}{2e}$ растягивающее трубу вдоль оси. Они въ два ряда меньше напряженій $kr : e$, растягивающихъ поперечныя сѣченія и слѣдовательно толщина стѣнки, опредѣленная по этимъ послѣднимъ, будетъ достаточна, необходимо лишь озаботиться, чтобы ослабленіе поперечными швами при соединеніи отдѣльныхъ барабановъ въ трубу было не слишкомъ велико. Эти соединенія выполняются или непосредственнымъ склепываніемъ отдѣльныхъ барабановъ, или на приклепанныхъ фланцахъ или же раструбами. При заклепочномъ сое-

диненіи поперечному шву придается прочность, равная сопротивленію ослабленнаго имъ сѣченія трубы разрыву лишь вблизи мѣстъ возникновенія растягивающихъ усилій, т. е. около задвижекъ. колѣнъ трубы и т. п., потому что растягивающія трубу вдоль оси напряженія локализируются на небольшомъ протяженіи отъ мѣста ихъ возникновенія благодаря тренію земли на поверхности трубы; остальные швы дѣлаются слабѣе и должны надежно обеспечивать герметичность.

Напряженія паралельныя оси трубы, появляющіяся благодаря измѣненіямъ температуры не играютъ большой роли, т. к. температура стѣнокъ трубы колеблется благодаря соприкасанію съ землей и водой въ довольно узкихъ границахъ 0° — 25° Ц. (см. Сидоровъ, стр. 210, 216). Если даже предположить, что температура укладки трубы совпадаетъ съ одной изъ границъ, то и въ этомъ случаѣ напряженіе окажется значительно ниже допускаемаго. Для чугунныхъ трубъ, благодаря нѣкоторой подвижности залитыхъ свинцомъ раструбныхъ соединеній температурныя напряженія тоже не играютъ роли.

Въ тѣхъ исключительныхъ случаяхъ, когда оказывается необходимымъ придать трубопроводу нѣкоторую свободу въ измѣненіи длины въ линію вводятся расширители и напряженія отъ измѣненій температуры совершенно отсутствуютъ. Такія устройства примѣняются лишь для силовыхъ трубопроводовъ ¹⁾.

Мы не касались еще одного вопроса, встрѣчающагося иногда при расчетѣ трубъ, расчета трубы, какъ балки. Но обыкновенно водопроводныя трубы не работаютъ какъ балки и слѣдуетъ принимать всѣ возможныя мѣры для устраненія вліянія силъ изгибающихъ трубу, потому что сами по себѣ тонкостѣнные трубы не достаточно жестки, чтобы сопротивляться такимъ усиліямъ; въ тѣхъ случаяхъ, когда изгибъ трубы неизбеженъ, усиливаютъ тонкостѣнные трубы изъ желѣза и стали кольцами и прогонами изъ уголковъ или придаютъ имъ надлежащую прочность утолщеніемъ стѣнокъ, а въ желѣзо-бетонныхъ трубахъ усиливаютъ продольную арматуру. Въ этомъ случаѣ расчетъ трубы какъ балки долженъ быть произведенъ на основаніи общей теоріи изгиба прямыхъ брусевъ.

¹⁾ Подробности и указанія литературы можно найти въ прекрасной книгѣ Сидорова «Трубы и ихъ соединенія».

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВЪ.

Интеграль.	Ф о р м у л а.	Предѣлы интегрированія.		
		отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$	отъ $\frac{\pi}{2}$ до π	отъ 0 до π .
$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi$	$-\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + C$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\varphi}{2} + C$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\int \sin^3 \varphi \, d\varphi$	$\frac{\cos^3 \varphi}{3} - \cos \varphi + C$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\int \cos^3 \varphi \, d\varphi$	$\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + C$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
$\int \cos^4 \varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin \varphi \cos^3 \varphi}{4} + \frac{3}{16} \sin 2\varphi + \frac{3\varphi}{8} + C$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$
$\int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2} \sin^2 \varphi + C$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\int \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{\varphi}{8} - \frac{1}{32} \sin 4\varphi$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$
$\int \varphi \sin \varphi \, d\varphi$	$-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi + C$	1	$\pi - 1$	π
$\int \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\varphi \sin \varphi + \cos \varphi + C$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$-\frac{\pi}{2} - 1$	-2
$\int \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{\varphi^2}{4} - \frac{\varphi}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{8} \cos 2\varphi + C$	$\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$	$\frac{3\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$	$\frac{\pi^2}{4}$
$\int \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$	$\frac{\varphi^2}{4} + \frac{\varphi}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 2\varphi + C$	$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$	$\frac{3}{16} \pi^2 + \frac{1}{4}$	$\frac{\pi^2}{4}$
$\int \varphi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$	$\frac{\varphi}{2} \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \sin 2\varphi - \frac{\varphi}{4} + C$	$\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$
$\int \varphi^2 \sin \varphi \, d\varphi$	$2\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi - \varphi^2 \cos \varphi + C$	$\pi - 2$	$\pi^2 - \pi - 2$	$\pi^2 - 4$
$\int \varphi^2 \cos \varphi \, d\varphi$	$2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi + \varphi^2 \sin \varphi + C$	$\frac{\pi^2}{4} - 2$	$2 - 2\pi - \frac{\pi^2}{4}$	-2 π

ТАБЛИЦА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

φ°	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
φ	0	0.2618	0.5236	0.7854	1.0472	1.3090	1.5708
φ^2	0	0.0685	0.2742	0.6169	1.0966	1.7135	2.4674
$\sin \varphi$	0	0.2588	0.5000	0.7071	0.8660	0.9659	1
$\cos \varphi$	1	0.9659	0.8660	0.7071	0.5000	0.2588	0
$\varphi \sin \varphi$	0	0.0678	0.2618	0.5554	0.9069	1.2644	1.5708
$\varphi \cos \varphi$	0	0.2529	0.4534	0.5554	0.5236	0.3388	0
$\varphi^2 \cos \varphi$	0	0.0662	0.2375	0.4362	0.5483	0.4435	0
$\varphi^2 \sin \varphi$	0	0.0177	0.1371	0.4362	0.9497	1.6551	2.4674
$\sin^2 \varphi$	0	0.0670	0.2500	0.5000	0.7500	0.9330	1
$\cos^2 \varphi$	1	0.9012	0.6495	0.3536	0.1250	0.0173	0

$$\pi = 3.1416$$

$$\pi^2 = 9.8696$$

$$\pi^3 = 31,0063$$

$$\pi^4 = 97.4094$$

$$\pi^5 = 306.0214$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 2.4674$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1.2337$$

Пособіями при этой работѣ служили:

- Собрание сочинений Ф. С. Ясинскаго. Т. II. «Устойчивость деформации и статика сооружений. 1902 г.». По вопросам о сплющивании трубъ наружнымъ равномернымъ давлениемъ и о примѣненіи выраженія потенциальной энергии къ расчету кривого бруса.
- Курсъ сопротивленія матерьяловъ. С. П. Тимошенко. 1911 г.
По вопросам о распредѣленіи напряженій при изгибѣ кривого бруса, о формулѣ Ламе, о деформации кривого бруса, объ изгибѣ тонкихъ пластинокъ, о приближенномъ способѣ изслѣдованія изгиба стержней.
- Vorlesungen über Technische Mechanik. A. Förrpl. B. V. III и V.
По вопросам о теоріяхъ прочности, о распредѣленіи напряженій при изгибѣ кривого бруса, о формулѣ Ламе.
- Elastizität und Festigkeit. C. Bach. 1911 г.
По вопросу о распредѣленіи напряженій при изгибѣ кривого бруса и о расчетѣ пустотѣлыхъ цилиндровъ.
- Theorie des Erddrucks. I. Weyrauch. 1881.
Neue Theorie des Erddruckes. E. Winkler. 1872.
По вопросу о давленіи земли въ неограниченной насыпи.
- Statische Berechnung von Tunnelmauerwerk. O. Kommerel. 1912.
По вопросу о давленіи земли на большихъ глубинахъ.
-

Краткій обзоръ литературы.

- Точныя рѣшенія вопроса о распредѣленіи напряженія при изгибѣ кривого бруса, основанныя на разсмотрѣніи условій равновѣсія элементарнаго упругаго параллелоипеда.
- Х. Головинъ, Одна изъ задачъ статики упругаго тѣла. Изв. СПб. Технол. практ. Инст. 1881.
- С. Белзецкій. Плоская задача теоріи упругости въ цилиндрическихъ координатахъ. Изв. Собр. Инж. П. С. 1906 г.
- Н. Митинскій. Изгибъ кривыхъ брусьевъ. Сборн. Инст. Инж. П. С. Выпускъ LIII.
Кромѣ точнаго рѣшенія вопроса для кривого бруса, очерченнаго по дугѣ круга для одного частнаго случая, статья содержитъ рядъ сравнительныхъ подсчетовъ, выясняющихъ взаимное уклоненіе результатовъ расчета при гипотезахъ: плоскихъ сѣченій, линейнаго и параболическаго распредѣленія напряженій для кривого бруса круглаго, прямоугольнаго и двутавроваго сѣченія.

С. Тимошенко. О распредѣленіи напряженій въ круговомъ кольцѣ сжатомъ двумя взаимно противоположными силами. Изв. Кіевск. Полит. Инст. 1909 г.

Статья, кромѣ точнаго рѣшенія для кольца толщиною равной двойному среднему радіусу, содержитъ приближенныя рѣшенія при гипотезахъ плоскихъ сѣченій и линейнаго закона.

Aue. Zur Berechnung der Spannungen in gekrümmten Stäben unter Anwendung der optischen Methode. 1910.

Опытное оптическое изслѣдованіе распредѣленія напряженій въ кривыхъ брускахъ изгибаемыхъ парами силъ, дѣйствующими на ихъ концахъ, а такъ-же и при сплющиваніи круговаго кольца взаимнопротивоположными силами.

Полное рѣшеніе задачи изгиба криваго бруса по гипотезѣ плоскихъ сѣченій, принимающее во вниманіе нажатіе волоконъ другъ на друга, имѣется въ статьѣ:

Pfleiderer. Die Beanspruchung Stabförmiger Träger mit gekrümmter Mittellinie. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1907.

Обзоръ литературы по вопросу о расчетѣ тонкостѣнныхъ трубъ.

Л. Николаи. Объ опредѣленіи напряженій въ цилиндрической круглой трубѣ подверженной сплющиванью.

Расчетъ трубы, лежащей въ землѣ и задѣланной до $\frac{1}{2}$ высоты сѣченія въ кладку при гипотезѣ линейнаго закона на основаніи изслѣдованія деформаций кольца въ прямоугольныхъ координатахъ. Труба не вѣсомая. Давленіе равномерно распредѣлено по горизонтальной и вертикальной ея проекціямъ. При расчетѣ задѣланной трубы она разсматривается, какъ арка съ задѣланными пятами; при вертикальномъ давленіи пяты на уровнѣ горизонтальнаго діаметра, при расчетѣ на горизонтальное давлєніе задѣланными принимаются сѣченіе по концамъ вертикальнаго діаметра.

К. Игнатовъ. Докладъ въ Московск. Городск. Управу. 1903 г.

Оцѣнка разнаго рода усилій, дѣйствующихъ на водопроводныя трубы. Имѣются данныя наблюденій гидравлическихъ ударовъ на Московской водопроводной сѣти.

D. Lorey. Handbuch für Eisenbetonbau. 2 Aufl. B. IV.

Расчетъ трубы на наружное давленіе, распредѣленное равномерно по горизонтальной проекціи. Внутреннее давленіе воды предполагается равномерно распредѣленнымъ и нормальнымъ къ поверхности. Деформации трубы во вниманіе не приняты.

A. Frühling. Handbuch für Ingenieurwissenschaften. III. Theil. B. IV.

То же, что у Lorey.

P. h. Forchheimer. Zur Festigkeit weiter Rohre. Zeitschr. des öster. Arch. und Ing.-Ver. 1904 г.

Расчетъ круглой трубы, опирающейся по нижней производящей, частью нижней полуокружности или всею полуокружностью на землю, не принимая во вниманіе вѣса трубы. Расчетъ произведенъ для давленія вѣса воды, а для трубы, опирающейся всею нижней полуокружностью, принято во вниманіе равномерное внутреннее давленіе и вызываемыя имъ деформации въ сплющенной трубѣ. Изслѣдованіе произведено исходя изъ дифференціальнаго уравненія изогнутой оси (B). При расчетѣ трубы подъ

давлѣніемъ земли оно замѣнено равномерно-распределенной по горизонтальной и вертикальной проекціямъ нагрузкой. Эта работа представляетъ наиболѣе полное изслѣдованіе вопроса, извѣстное автору.

- F. Steiner. Beitrag zur Theorie der Rohrentunnels kreisförmigen Querschnittes. 1906 г.

Расчетъ кругового кольца нагруженного разнаго рода нагрузками нормальными и равномерно распределенными по наружной и внутренней поверхностямъ трубы, а также подъ дѣйствіемъ вертикальнаго непрерывно распределеннаго по поверхности трубы давленія. Расчетъ произведенъ пользуясь принципомъ минимума работы деформациі, принимая въ этомъ послѣднемъ лишь одно слагаемое, зависящее отъ изгибающаго момента.

- Färber. Die Bedeutung des Eisenbetons für den Schachtausbau. Glückauf. 1909 г.
Расчетъ трубы подъ давлѣніемъ земли нормальнымъ къ ея поверхности, мѣняющимся по величинѣ въ зависимости отъ глубины точекъ наружной поверхности трубы подъ поверхностью земли.

- Ramisch. Ermittlung der Wandstärke von Durchlassröhren. Zeitsch. des. Öster. Arch. und Ing.-Ver. 1904 г.

Задача такого-же рода какъ въ трудѣ А. Frühling'a. Изслѣдованіе произведено съ помощью упрощеннаго выраженія потенціальной энергіи и извѣстнаго о деформацияхъ трубы.

- C. Biraull. Calcul des parois et armatures des tuyaux. Le Génie Civil. T. XLIII.
Расчетъ трубы заполненной водой безъ напора, опирающейся по одной лишь нижней производящей. При расчетѣ принять во вниманіе вѣсъ воды.

- B. Haukelid. Stress Analysis of circular Tubes. Engineering Record. 1913 г.
Графическо-аналитическій расчетъ кольца кругового сѣченія, нагруженнаго вертикальными сосредоточенными силами, равномерно распределенной по его горизонтальной проекціи нагрузкой и неравномерной, но непрерывной нагрузкой по его вертикальной проекціи. Расчетъ основанъ на использованіи выраженій угловыхъ и радіальныхъ деформацийъ кольца для опредѣленія статически неопредѣлимыхъ и линій вліянія для опредѣленія изгибающихъ моментовъ въ разныхъ сѣченіяхъ кольца.

- Ph. Forchheimer. Zur Einbeutung bei Innénpression und Biegung bei Zug oder Druck. Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1906 г.

Сложное сопротивленіе кругового кольца при изгибѣ и растяженіи (или сжатіи), вызываемомъ равномернымъ и нормальнымъ къ внутренней (наружной) поверхности кольца давлѣніемъ.

- M. Levy. Sur un nouveau cas intégrable de problème de l'élastique et l'une des ses application. Comptes Rendus... 1883. pp. 694 и 979.

Критическое давленіе для сжимаемаго наружнымъ нормальнымъ давлѣніемъ кольца.

- I. Boussinesq. Resistance d'un anneau à la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale... Comptes Rendus. 1883. pp. 843 и 1131.
Кромѣ вопроса о критическомъ давленіи въ этой же замѣткѣ впервые дано дифференціальное уравненіе (В) изогнутой оси бруска, средняя линія котораго до деформациі—дуга круга.

- А. И. Сидоровъ. Трубы и ихъ соединенія. 1912 г.

Кромѣ общаго описанія конструкціи и деталей соединеній трубъ имѣется много примѣровъ трубопроводовъ осуществленныхъ при разнообразныхъ условіяхъ.