ОБЪ ОСНОВНЫХЪ ЗАДАЧАХЪ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРІИ

ПОСТРОЕНІЯ ГЕОГРАФИЧЕСКИХЪ КАРТЪ.

СОЧИНЕНІЕ

Д. А. ГРАВЕ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

(Вас. Остр., 9 лин., № 12).

1896.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета Императорскаго С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается.

Деканъ *А. Совѣтовъ*.

14 Марта 1896.

Одною изъ самыхъ важныхъ задачъ математической теоріи построенія географическихъ картъ является изысканіе изображеній данной страны, выгоднѣйшихъ въ томъ или другомъ отношеніи.

Если изображаемая поверхность развертывается на плоскость, то возможна, очевидно, совершенная карта, сохраняющая полное подобіе конечныхъ фигуръ, причемъ всѣ длины карты пропорціональны соотвѣтствующимъ длинамъ изображаемой поверхности.

При изображеніи земной поверхности, которая не можетъ быть развернута на плоскость, приходится на всякой картѣ считаться съ искаженіемъ длинъ и ни для какой страны конечныхъ размѣровъ нельзя построить карту, масштабъ которой во всѣхъ точкахъ и по всѣмъ направленіямъ былъ одинаковъ.

Является важнымъ выбрать для данной страны изъ всѣхъ проекцій такую, которая, удовлетворяя извѣстнымъ основнымъ требованіямъ, давала бы по возможности малое уклоненіе отъ постоянства масштаба.

Уже съ давнихъ временъ получили преимущественное употребленіе карты съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ, ибо эти проекціи сохраняютъ углы. Требованіе подобія безконечно малыхъ частей оставляетъ много произвола, ибо формулы, дающія проекціи, заключаютъ произвольныя функціи, а потому кромѣ этого основного требованія можно поставить еще другія. Такъ напримѣръ, Л а г р а н ж ъ поставилъ требованіе, чтобы меридіаны и параллели изображались кругами, т. е. такими линіями, которыя просто вычерчиваются. Это добавочное требованіе, ограничивая произвольныя функціи, оставляетъ еще нѣкоторый произволъ въ видѣ постоянныхъ параметровъ карты.

Во второмъ изъ мемуаровъ *) о картахъ Лагранжъ показываетъ, что постоянными произвольными можно распорядиться такъ, чтобы сдѣлать уклоненіе масштаба отъ постоянства для разныхъ точекъ страны по возможности малымъ. Онъ показываетъ, что при всякомъ выборѣ постоянныхъ существуетъ въ его проекціяхъ нѣкоторая точка, около которой масштабъ измѣняется мало. Эта точка соотвѣтствуетъ minimum'у масштаба. Лагранжъ предлагаетъ подбирать постоянныя произвольныя такъ, чтобы эта точка пришлась въ центрѣ изображаемой страны.

Кромѣ картъ, сохраняющихъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ, имѣютъ большое практическое значеніе карты, сохраняющія площади.

Поставивъ себѣ задачу, аналогичную Лагранжевой, найти изъ этихъ картъ всѣ тѣ, у которыхъ меридіаны и параллели изображаются прямыми и кругами, я нашелъ одиннадцать видовъ проекцій и доказалъ, что эти проекціи единственно возможныя. Рѣшенію этой задачи посвящена вторая глава настоящаго сочиненія. Въ концѣ книги прилагаются таблицы чертежей этихъ картъ, выполненныя по формуламъ второй главы.

Эти чертежи взяты изъ моей статьи, напечатанной въ Извѣстіяхъ Русскаго Астрономическаго общества **).

Что касается выбора изъ найденныхъ проекцій выгоднѣйшихъ для данной страны, то, не предрѣшая вопроса о практическомъ значеніи моихъ проекцій, по моему мнѣнію, выгоднѣйшими являются тѣ, у которыхъ меридіаны и параллели на картѣ взаимно ортогональны.

Такимъ образомъ надо искать выгоднѣйшія проекціи этого рода изъ тѣхъ, которыя разсматривались уже Эйлеромъ и относительно которыхъ пр. А. Коркинымъ ***) замѣчено, что они единственныя изъ сохраняющихъ площади при ортогональности меридіановъ и параллелей.

Постановка общаго вопроса, рѣшеннаго мною, принадлежитъ также пр. Коркину.

Обращаясь къ проекціямъ, сохраняющимъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ является важнымъ изъ всѣхъ проекцій этого рода найти ту, которая даетъ для данной страны наименьшее уклоненіе масштаба отъ постоянства. Этотъ вопросъ получаетъ выдающееся зна-

---

*) Lagrange. Sur la construction des cartes géographiques. Oeuvres complètes, page 637.

**) Извѣстія Русскаго Астрономическаго общества. Выпускъ IV. 1895.

***) A. Korkine. Sur les cartes géographiques. Math. Ann. BXXXI. S. 589.

ченіе, какъ теоретическое, такъ и практическое, въ виду замѣчательной теоремы, предложенной безъ доказательства Чебышевымъ еще въ 1853 г., доказательства которой не было найдено до сихъ поръ.

Эта теорема состоитъ въ слѣдующемъ: изъ всѣхъ изображеній данной страны съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ наименьшее уклоненіе отъ постоянства логариѳма масштаба внутри страны даетъ карта, масштабъ которой постоянный вдоль по контуру страны.

Эта теорема представляетъ замѣчательное приложеніе къ уравненіямъ съ частными производными теоріи функцій наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

Эта теорія, получившая извѣстность послѣ работъ Чебышева, прилагалась еще Эйлеромъ *) къ нахожденію выгоднѣйшихъ проекцій. Интересное новое приложеніе представляетъ мемуаръ А. Маркова **) о коническихъ проекціяхъ съ наименьшимъ уклоненіемъ масштаба между двумя параллелями.

Лѣтомъ 1894 года мнѣ удалось найти простое доказательство теоремы Чебышева. Краткое резюме этого доказательства сообщено мною на конгрессѣ французской ассоціаціи (Association française pour l'avancement des sciences), имѣвшемъ мѣсто въ городѣ Канѣ (Caen) въ августѣ 1894 г. и напечатано потомъ въ трудахъ конгресса.

Явилось важнымъ провѣрить численнымъ примѣромъ, насколько проекціи Чебышева лучше другихъ для изображенія данной страны.

Я остановился на изученіи случая контура, представляющаго четыреугольникъ, образованный дугами двухъ меридіановъ и двухъ параллелей. — Кромѣ практическаго значенія этотъ контуръ представляетъ интересъ, какъ дающій мѣсто новому приложенію эллиптическихъ функцій.

Взявъ четыреугольникъ, образованный дугами параллелей 40° и 70° сѣверной широты и двумя меридіанами отстоящими на 40°, получаемъ пространство большее всей Европейской Россіи, причемъ получается уклоненіе отъ нуля логариѳма масштаба почти въ два съ половиной раза меньшее чѣмъ для Ламбертовой проекціи, которая подъ именемъ Гауссовской введена при изображеніи Россійской Имперіи.

---

*) Euler. Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, pro Anno MDCCLXXVII. Pars prior, pag. 129.

**) А. А. Марковъ. Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. Т. II, № 3, стр. 177—187.

Изложенію моихъ изслѣдованій о Чебышевскомъ вопросѣ посвящена четвертая глава настоящаго сочиненія, причемъ я даю сравнительную таблицу логариѳма масштаба черезъ пять градусовъ для взятаго мною четыреугольника въ Чебышевской и Гауссовской проекціяхъ.

При изученіи вопроса Чебышева я понятно имѣлъ дѣло съ вопросомъ о такъ называемомъ конформномъ изображеніи (conforme Abbildung) поверхности на плоскости, причемъ главную роль играла задача, получившая въ послѣднее время извѣстность подъ названіемъ задачи Дирихле.

Эта задача состоитъ въ слѣдующемъ: найти рѣшеніе уравненія

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

которое, будучи конечнымъ вмѣстѣ съ производными первыхъ двухъ порядковъ внутри даннаго контура, въ точкахъ этого контура принимало напередъ заданныя значенія.

Попытки рѣшенія этой задачи составили въ настоящее время теорію, извѣстную въ математической физикѣ подъ именемъ теоріи логариѳмическаго потенціала.

Мнѣ удалось найти новую методу для рѣшенія задачи Дирихле, съ успѣхомъ прилагаемую къ случаю алгебраическихъ контуровъ.

Краткое резюме моей методы было доложено на конгрессѣ, имѣвшемъ мѣсто въ Бордо въ іюлѣ 1895 года и появится въ непродолжительномъ времени въ трудахъ конгресса.

Глава III настоящаго сочиненія посвящена краткому изложенію моей методы, причемъ я поясняю мои теоретическія соображенія на рядѣ примѣровъ.

Посвятивъ указанныя три главы собственнымъ изслѣдованіямъ, я счелъ необходимымъ предпослать имъ въ первой главѣ изложеніе основаній математической теоріи построенія географическихъ картъ.

Въ первой главѣ мнѣ принадлежитъ постановка и рѣшеніе ряда простыхъ задачъ о нахожденіи всѣхъ поверхностей, изображаемыхъ при помощи даннаго геометрическаго построенія съ сохраненіемъ площадей или подобія въ безконечно малыхъ частяхъ.

Д. Граве.

С.-Петербургъ,
3-го Февраля 1896 г.

ГЛАВА I.

Объ изображеніяхъ поверхности на плоскости.

1. Пусть будетъ задана нѣкоторая поверхность S уравненіями

$$x = \Phi(u, v), \quad y = \Psi(u, v), \quad z = \Omega(u, v) \ldots \ldots \ldots (1)$$

гдѣ u и v суть нѣкоторыя криволинейныя координаты.

Точкамъ (u, v) поверхности можно сопоставить точки нѣкоторой плоскости (x, y), гдѣ x и y прямоугольныя координаты.

Если зададимъ двѣ функціи $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$, конечныя и непрерывныя, по крайней мѣрѣ для нѣкоторыхъ значеній u, v, лежащихъ въ извѣстныхъ границахъ, тогда уравненія

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

опредѣляютъ нѣкоторое изображеніе (карту, проекцію) части или всей поверхности на плоскости.

Свойства проекціи опредѣляются, конечно, свойствами функцій φ, ψ, Φ, Ψ, Ω.

2. Каждой кривой Σ на поверхности S соотвѣтствуетъ, вообще говоря, тоже нѣкоторая кривая σ на картѣ. Будемъ называть кривую σ изображеніемъ кривой Σ.

Кривая на поверхности S и ея изображеніе на картѣ опредѣляются нѣкоторымъ уравненіемъ

$$f(u, v) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

между криволинейными координатами.

Возьмемъ нѣкоторую точку M_0 на кривой (3) поверхности; соотвѣтственная точка m_0 карты будетъ лежать на изображеніи кривой (3).

Обозначимъ черезъ s дугу кривой (3) поверхности, отсчитываемую отъ точки M_0 до нѣкоторой перемѣнной точки M, а черезъ σ соотвѣтственную дугу изображенія между точками m_0 и точкою m, соотвѣтствующею точкѣ M.

3. Уголъ, составляемый направленіемъ касательной къ кривой Σ (3) въ точкѣ M съ касательною кривой $v = \text{const}$, проходящей черезъ эту точку M, будемъ называть *азимутомъ* касательной къ кривой (3) въ точкѣ M, и будемъ его обозначать черезъ α; при этомъ на кривой Σ (3) будемъ брать направленіе, соотвѣтствующее возрастанію дуги S.

4. Отношеніе

$$\mu = \frac{d\sigma}{ds}$$

называется *масштабомъ* (искаженіемъ длины) карты въ точкѣ M, соотвѣтствующимъ азимуту α.

5. Извѣстно, что

$$d\sigma^2 = e du^2 + 2 f du\, dv + g dv^2,$$

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2,$$

гдѣ

$$e = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2, \quad f = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad g = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2,$$

$$E = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v} + \frac{\partial\Omega}{\partial u}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Отсюда, обозначая

$$u' = \frac{du}{dv} = -\frac{f'_v(u,v)}{f'_u(u,v)},$$

получимъ

$$\mu^2 = \frac{eu'^2 + 2fu' + g}{Eu'^2 + 2Fu' + G} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

6. Азимуты будемъ отсчитывать въ сторону возрастанія v отъ 0 до 2π, начиная отъ направленія касательной къ кривой $v = \text{const}$, соотвѣтствующаго возрастанію u.

Отсюда ясно, что азимутъ α долженъ опредѣляться по формуламъ

$$\cos\alpha = \frac{Eu' + F}{\sqrt{E}.\sqrt{Eu'^2 + 2Fu' + G}} \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}.\sqrt{Eu'^2 + 2Fu' + G}} \dots\dots\dots\dots (6)$$

Въ этихъ формулахъ корни $\sqrt{E}$, $\sqrt{EG - F^2}$ положительны, корень же

$$\sqrt{Eu'^2 + 2Fu' + G} = \frac{ds}{dv}$$

надо брать со знакомъ $+$ или $-$, судя по тому, каковъ знакъ dv, соотвѣтствующаго увеличенію дугъ на кривой Σ.

7. Изъ формулъ (5) и (6) получаемъ

$$\cot g\,\alpha = \frac{Eu' + F}{\sqrt{EG - F^2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Исключая u' изъ уравненій (4) и (7), получимъ

$$\mu^2 = P\cos^2\alpha + 2Q\cos\alpha\sin\alpha + R\sin^2\alpha \dots\dots\dots (8)$$

гдѣ

$$P = \frac{e}{E}, \quad Q = \frac{Ef - eF}{E\sqrt{EG - F^2}}, \quad R = \frac{eF^2 - 2fEF + gE^2}{E(EG - F^2)};$$

уравненіе (8) показываетъ, какъ зависитъ масштабъ отъ азимута.

8. Обозначимъ черезъ β уголъ на картѣ, соотвѣтствующій азимуту α; мы будемъ называть уголъ β *азимутомъ карты*.

Уголъ β опредѣляется по слѣдующимъ формуламъ

$$\cos\beta = \frac{eu'+f}{\sqrt{e}\sqrt{eu'^2+2fu'+g}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{e}\sqrt{eu'^2+2fu'+\xi}},$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{eu'+f}{\sqrt{eg-f^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Въ этихъ формулахъ корни $\sqrt{e}$, $\sqrt{eg-f^2}$ должны имѣть знакъ $+$, знакъ же корня $\sqrt{eu'^2+2fu'+g}$ долженъ совпадать со знакомъ корня $\sqrt{Eu'^2+2Fu'+G}$.

Азимутъ β на картѣ отсчитывается подобно азимуту α изображаемой поверхности.

Исключая изъ уравненій (7) и (9) величину u', мы получимъ

$$P\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{PR-Q^2}\operatorname{cotg}\beta - Q \ldots\ldots\ldots (10)$$

гдѣ, очевидно,

$$\sqrt{PR-Q^2} = \frac{\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Разность $\beta-\alpha$ есть такъ называемое *искаженіе азимута.*

9. Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію законовъ искаженія длинъ и азимутовъ, надо обратить вниманіе на одинъ изъ наиболѣе важныхъ способовъ изображенія поверхности на плоскости, извѣстный подъ названіемъ изображеній съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ (projections orthomorphes, autogonales, conforme Abbildungen).

Формула (8) показываетъ, что масштабъ зависитъ, вообще говоря, отъ азимута.

Разсмотримъ, когда масштабъ можетъ не зависѣть отъ азимута.

Приравнивая нулю производную по α, получимъ

$$2Q\cos 2\alpha - (P-R)\sin 2\alpha = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ, вообще говоря, α, какъ нѣкоторую функцію отъ u, v; оно обратится въ тождество только тогда, когда

$$Q=0, \quad P=R.$$

Отсюда получаемъ

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \qquad (11)$$

Обозначая общую величину отношеній (11) черезъ ξ^2, мы получимъ, что масштабъ не будетъ зависѣть отъ азимута и будетъ равенъ ξ.

Можно показать, что выборомъ функцій φ и ψ всегда можно удовлетворить системѣ (11), каковы бы ни были функціи E, F, G.

Получаемыя такимъ образомъ проекціи будутъ сохранять подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ.

Въ нихъ масштабъ въ каждой точкѣ не зависитъ отъ азимута, а, будучи функціею отъ u, v, можетъ мѣняться лишь отъ точки къ точкѣ. Формула (10) показываетъ, что азимутъ не претерпѣваетъ искаженія и, слѣдовательно, углы сохраняются, что даетъ подобіе своимъ изображеніямъ малыхъ фигуръ на поверхности.

10. Для полученія указанныхъ проекцій, функціи φ, ψ могутъ быть подобраны на безчисленное множество способовъ.

Уравненія (11) могутъ быть написаны такъ:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'^2_u + \psi'^2_u &= \xi^2 E \\ \varphi'_u \varphi'_v + \psi'_u \psi'_v &= \xi^2 F \\ \varphi'^2_v + \psi'^2_v &= \xi^2 G \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Покажемъ, какъ найти три функціи φ, ψ, ξ, удовлетворяющія системѣ (12).

Вмѣсто искомыхъ функцій φ и ψ введемъ два вспомогательныхъ угла α и β при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_u &= \xi\sqrt{E}\cos\alpha, \quad & \psi'_u &= \xi\sqrt{E}\sin\alpha \\ \varphi'_v &= \xi\sqrt{G}\cos\beta, \quad & \psi'_v &= \xi\sqrt{G}\sin\beta \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Первое и третье изъ уравненій (12) удовлетворяются непосредственно; что касается уравненія второго, то оно даетъ

$$\beta - \alpha = \omega, \quad \omega = arc\cos\frac{F}{\sqrt{EG}} \qquad (14)$$

Уравненія (13) влекутъ, какъ слѣдствія, слѣдующія

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\xi\sqrt{E}\cos\alpha\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\xi\sqrt{G}\cos\beta\right]\ldots\ldots\ldots(15)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\xi\sqrt{E}\sin\alpha\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\xi\sqrt{G}\sin\beta\right]\ldots\ldots\ldots(16)$$

Раскрывая уравненія (15) и (16), получимъ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\xi\sqrt{E}\right]\cos\alpha-\xi\sqrt{E}\sin\alpha\,\alpha'_v=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left[\xi\sqrt{G}\right]\cos\beta-\xi\sqrt{G}\sin\beta\,\beta'_u\ldots\ldots\ldots(15')$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\xi\sqrt{E}\right]\sin\alpha+\xi\sqrt{E}\cos\alpha\,\alpha'_v=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left[\xi\sqrt{G}\right]\sin\beta+\xi\sqrt{G}\cos\beta\,\beta'_u\ldots\ldots\ldots(16')$$

Умножая уравненіе (15′) на $\cos\beta$, уравненіе (16′) на $\sin\beta$ и складывая, получимъ

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\xi\sqrt{E}\right]\cos\omega+\xi\sqrt{E}\sin\omega\,\alpha'_v=\frac{\partial}{\partial u}\left[\xi\sqrt{G}\right],$$

отсюда

$$\alpha'_v=-\operatorname{cotg}\omega\,\frac{\frac{\partial}{\partial v}[\xi\sqrt{E}]}{\xi\sqrt{E}}+\operatorname{cosec}\omega\,\frac{\frac{\partial}{\partial u}[\xi\sqrt{G}]}{\xi\sqrt{E}}\ldots\ldots(17)$$

Умножая уравненіе (15′) на $\cos\alpha$, а уравненіе (16′) на $\sin\alpha$, и складывая, получимъ

$$\beta'_u=\operatorname{cotg}\omega\,\frac{\frac{\partial}{\partial u}[\xi\sqrt{G}]}{\xi\sqrt{G}}-\operatorname{cosec}\omega\,\frac{\frac{\partial}{\partial v}[\xi\sqrt{E}]}{\xi\sqrt{G}}.$$

Но на основаніи уравненія (14) получимъ

$$\alpha'_u=\operatorname{cotg}\omega\,\frac{\frac{\partial}{\partial u}[\xi\sqrt{G}]}{\xi\sqrt{G}}-\operatorname{cosec}\omega\,\frac{\frac{\partial}{\partial v}[\xi\sqrt{E}]}{\xi\sqrt{G}}-\omega'_u\ldots\ldots(18)$$

Обозначая $\lg\xi=\eta$, можемъ уравненія (17) и (18) переписать такъ:

$$\alpha'_v=\frac{\eta'_u G-\eta'_v F}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{EG'_u-FE'_v}{2E\sqrt{EG-F^2}}\ldots\ldots\ldots(17')$$

$$\alpha'_u=\frac{\eta'_u F-\eta'_v E}{\sqrt{EG-F^2}}+\frac{FG'_u-GE'_v}{2G\sqrt{EG-F^2}}-\omega'_u\ldots\ldots\ldots(18')$$

Замѣчая, что должно быть $\frac{\partial[\alpha'_u]}{\partial v} = \frac{\partial[\alpha'_v]}{\partial u}$, получаемъ окончательно уравненіе для опредѣленія η въ такомъ видѣ:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\eta'_u G - \eta'_v F}{\sqrt{EG - F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\eta'_v E - \eta'_u F}{\sqrt{EG - F^2}}\right] + \Omega = 0 \ldots\ldots (19)$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{EG'_u - FE'_v}{2E\sqrt{EG - F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{GE'_v - FG'_u}{2G\sqrt{EG - F^2}}\right] + \omega''_{uv} \ldots (20)$$

Итакъ, для опредѣленія η мы получаемъ уравненіе (19) съ частными производными второго порядка.

Всякое частное рѣшеніе уравненія (19) даетъ свое изображеніе поверхности на плоскости.

Уравненія (17′) и (18′) даютъ выраженіе α въ квадратурахъ; когда найденъ уголъ α, найдется уголъ β по уравненію (14) и, наконецъ, зная α, β и ξ, получаемъ φ и ψ въ квадратурахъ.

11. Прежде всего разсмотримъ случай $\Omega = 0$. Раскрывая выраженіе (20) для Ω, получимъ уравненіе

$$\left.\begin{aligned} & E[E'_v G'_v - 2F'_u G'_v + G'^2_u] + \\ & + F[E'_u G'_v - E'_v G'_u - 2F'_u G'_u - 2F'_v E'_v + 4F'_u F'_v] + \\ & + G[E'_u G'_u - 2F'_v E'_u + E'^2_v] - \\ & - 2(EG - F^2)(E''_{vv} - 2F''_{uv} + G''_{uu}) = 0 \end{aligned}\right\} . (21)$$

На основаніи извѣстной теоремы Гаусса *) мы замѣчаемъ, что уравненіе (21) выражаетъ свойство поверхностей развертывающихся на плоскости, состоящее въ равенствѣ нулю кривизны.

Въ разсматриваемомъ случаѣ среди рѣшеній уравненія (19) существуетъ $\eta = \text{const}$, что даетъ $\xi = \text{const}$ и, слѣдовательно, возможно получить изображеніе поверхности на плоскости, масштабъ котораго постояненъ на всей картѣ. Въ этомъ случаѣ изображеніе сохраняетъ полное подобіе конечныхъ частей.

12. Если поверхность не развертывается на плоскости, то Ω не $= 0$ и, слѣдовательно, η не можетъ быть постояннымъ.

---

*) Gauss. Disquisitiones generales circa superficies curvas. Opera, tom. IV, p. 236.

Упростимъ предварительно задачу выборомъ особенной системы криволинейныхъ координатъ на поверхности.

Выраженіе для квадрата дифференціала дуги можетъ быть написано такъ:

$$ds^2=\frac{1}{E}\left[Edu+dv\left(F+i\sqrt{EG-F^2}\right)\right]\left[Edu+dv\left(F-i\sqrt{EG-F^2}\right)\right].$$

Обозначимъ черезъ $M+iN$ множителя, который обращаетъ выраженіе

$$Edu+dv\left(F+i\sqrt{EG-F^2}\right)$$

въ полный дифференціалъ. Здѣсь M и N дѣйствительныя функціи отъ u и v.

Итакъ,

$$(M+iN)\left[Edu+dv\left(F+i\sqrt{EG-F^2}\right)\right]=d\xi,$$

гдѣ ξ нѣкоторая комплексная функція отъ u, v.

Называя черезъ η величину мнимую, сопряженную съ ξ, получимъ

$$(M-iN)\left[Edu+dv\left(F-i\sqrt{EG-F^2}\right)\right]=d\eta.$$

Отсюда

$$ds^2=\frac{d\xi\, d\eta}{E[M^2+N^2]}.$$

Координаты ξ и η называются *симметрическими*, онѣ для дѣйствительныхъ поверхностей суть мнимыя функціи первоначальныхъ координатъ u, v.

Отдѣляя дѣйствительную часть отъ мнимой, получимъ

$$\xi=a+bi,\quad \eta=a-bi,$$

гдѣ a и b суть дѣйствительныя функціи отъ u и v.

Легко замѣтить, что съ одной стороны

$$d\xi\, d\eta=da^2+db^2,$$

съ другой — выраженіе

$$\frac{1}{E[M^2+N^2]}$$

можетъ быть выражено въ видѣ положительной функціи отъ a и b, которую обозначимъ черезъ λ^2, такъ что

$$ds^2 = \lambda^2 [da^2 + db^2].$$

Послѣднія координаты a, b наиболѣе употребительны при изображеніи поверхностей на плоскости, поэтому онѣ носятъ названіе координатъ *картографическихъ* (coord. isothermiques).

13. Замѣняя обозначеніе a, b, на u, v, получимъ выраженіе линейнаго элемента въ такомъ видѣ, что

$$E = G = \lambda^2, \quad F = 0.$$

Итакъ, возвращаясь къ обозначеніямъ § 10, примемъ картографическія координаты; тогда уравненіе (19) принимаетъ видъ

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} + \Omega = 0,$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{\partial^2 \lg \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lg \lambda}{\partial v^2}.$$

Обозначая $\eta + \lg \lambda = q$, получимъ для опредѣленія q уравненіе

$$\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial v^2} = 0.$$

Самое общее выраженіе для q получаемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$q = \frac{1}{2} \lg \Pi'_1 (u + iv) + \frac{1}{2} \lg \Pi'_2 (u - iv),$$

гдѣ Π_1 и Π_2 произвольныя функціи.

Масштабъ карты ξ получается изъ уравненія

$$\lg \xi + \lg \lambda = \frac{1}{2} \lg \Pi'_1 (u + iv) + \frac{1}{2} \lg \Pi'_2 (u - iv).$$

Откуда

$$\xi = \frac{\sqrt{\Pi'_1 (u + iv) \Pi'_2 (u - iv)}}{\lambda}.$$

Пусть функціи Π_1, Π_2 заданы, тогда по уравненіямъ (17′) и (18′) получимъ

$$\alpha'_v = \eta'_u + \frac{\lambda'_u}{\lambda} = q'_u = \frac{1}{2}\,\frac{\Pi_1''(u+iv)}{\Pi_1'(u+iv)} + \frac{1}{2}\,\frac{\Pi_2''(u-iv)}{\Pi_2'(u-iv)}$$

$$\alpha'_u = -\eta'_v - \frac{\lambda'_v}{\lambda} = -q'_v = -\frac{i}{2}\,\frac{\Pi_1''(u+iv)}{\Pi_1'(u+iv)} + \frac{i}{2}\,\frac{\Pi_2''(u-iv)}{\Pi_2'(u-iv)},$$

отсюда

$$\alpha = \int(\alpha'_u\,du + \alpha'_v\,dv) = i\lg c\sqrt{\frac{\Pi'_2(u-iv)}{\Pi'_1(u+iv)}} = iM,$$

гдѣ

$$M = \lg c\sqrt{\frac{\Pi'_2(u-iv)}{\Pi'_1(u+iv)}},$$

а c постоянная величина

$$\omega = \frac{\pi}{2},\quad \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Уравненія (13) обращаются въ слѣдующія:

$$\varphi'_u = e^q\cos\alpha,\quad \psi'_u = e^q\sin\alpha$$

$$\varphi'_v = -e^q\sin\alpha,\quad \psi'_v = e^q\cos\alpha,$$

такъ что

$$\varphi = \int e^q(\cos\alpha du - \sin\alpha dv)$$

$$\psi = \int e^q(\sin\alpha du + \cos\alpha dv),$$

но

$$\cos\alpha = \frac{e^M + e^{-M}}{2},\quad \sin\alpha = \frac{e^{-M} - e^M}{2i}$$

$$e^{q+M} = c\Pi'_2(u-iv),\quad e^{q-M} = \frac{1}{c}\Pi'_1(u+iv).$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\Pi_1(u+iv) + c\Pi_2(u-iv)\right]$$

$$\psi = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{c}\Pi_1(u+iv) - c\Pi_2(u-iv)\right].$$

Замѣняя

$$\frac{1}{c}\Pi_1(u+iv) = F(u+iv),\quad c\Pi_2(u-iv) = f(u-iv),$$

получимъ окончательно

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left[\mathrm{F}(u+iv)+f(u-iv)\right] \\ y &= \frac{1}{2i}\left[\mathrm{F}(u+iv)-f(u-iv)\right] \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

причемъ масштабъ вычисляется по формулѣ

$$\xi = \frac{\sqrt{\mathrm{F}'(u+iv)\, f'(u-iv)}}{\lambda}.$$

Мы видимъ, что вопросъ приводится къ нахожденію системы картографическихъ координатъ на поверхности; тогда изображеніе на плоскости, сохраняющее подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ, опредѣляется уравненіями (22). Отъ вида поверхности зависитъ множитель λ, входящій въ выраженіе масштаба.

14. Разсмотримъ для примѣра поверхности вращенія.

Возьмемъ за ось Z-овъ прямоугольной системы ось вращенія. Обозначимъ черезъ r разстояніе точки M поверхности до оси вращенія, а черезъ v *долготу* точки, т. е. уголъ между плоскостью меридіана точки M и плоскостью перваго меридіана, принятаго за плоскость XZ.

Получаемъ слѣдующія уравненія поверхности

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad z = \varphi(r)$$

гдѣ функція φ опредѣляетъ заданную плоскую кривую, отъ вращенія которой происходитъ поверхность вращенія

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1+\varphi'^2)\,dr^2 + r^2\,dv^2.$$

Картографическую систему получимъ, полагая

$$u = \int \sqrt{1+[\varphi'(r)]^2}\,\frac{dr}{r} = \omega(r).$$

Въ самомъ дѣлѣ, тогда выходитъ

$$ds^2 = r^2(du^2 + dv^2)$$

Обозначая черезъ ω_{-1} функцію обратную относительно ω, получимъ

$$ds^2 = [\omega_{-1}(u)]^2(du^2 + dv^2).$$

Широтою точки M поверхности вращенія обыкновенно называется нѣкоторая функція отъ координаты u. Такъ, напр., для шара подъ широтою разумѣется взятый съ тѣмъ или другимъ знакомъ уголъ, образованный радіусомъ точки M съ плоскостью экватора.

Въ самомъ дѣлѣ, для шара $\varphi = \sqrt{a^2 - r^2}$, гдѣ a радіусъ шара; отсюда получимъ

$$u = \int \sqrt{1 + \varphi'^2}\,\frac{dr}{r} = a \int \frac{dr}{r\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Обозначая дополненіе широты черезъ ξ, получимъ

$$r = a \sin \xi,$$

отсюда

$$u = \int \frac{d\xi}{\sin \xi} = \lg k \operatorname{tg} \frac{\xi}{2},$$

гдѣ k постоянная величина; отсюда

$$\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{1}{k}\, e^u,$$

далѣе

$$r = a \frac{2}{\frac{1}{k} e^u + k e^{-u}} = \frac{2ak}{e^u + k^2 e^{-u}},$$

такъ что

$$\lambda^2 = r^2 = \left[\frac{2ake^u}{e^{2u} + k^2}\right]^2;$$

при $a = k = 1$, получимъ

$$\lambda = \frac{2}{e^u + e^{-u}} \qquad (23)$$

Возьмемъ теперь эллипсоидъ, происходящій отъ вращенія эллипса

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1; \quad b < a$$

вокругъ малой оси z.

Обозначая $a^2 - b^2 = a^2 \varepsilon^2$, получимъ

$$z = \varphi(r) = \frac{b^2}{a^2} \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Отсюда

$$u = \int \sqrt{1 + \varphi'^2}\,\frac{dr}{r} = \int \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 r^2}{a^2 - r^2}}\,\frac{dr}{r}.$$

Подъ широтою точки M на эллипсоидѣ вращенія можно разумѣть уголъ, составляемый нормалью въ этой точкѣ съ плоскостью экватора.

Обозначая дополненіе широты черезъ ξ, получимъ

$$\frac{r\,dr}{a^2} + \frac{z\,dz}{b^2} = 0$$

$$-\frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}\,\frac{a^2}{b^2} = \operatorname{cotg}\xi, \quad z = (1-\varepsilon^2)\,r\operatorname{cotg}\xi$$

$$r = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2\operatorname{cotg}^2\xi}}$$

$$\sqrt{\frac{a^2-\varepsilon^2 r^2}{a^2-r^2}} = \frac{1}{\cos\xi}; \quad \frac{dr}{r} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\operatorname{cotg}\xi\,d\xi}{a^2\sin^2\xi + b^2\cos^2\xi}.$$

Отсюда

$$u = \int\frac{(1-\varepsilon^2)\,d\xi}{\sin\xi\,(1-\varepsilon^2\cos^2\xi)} = \int\frac{d\xi}{\sin\xi} - \varepsilon^2\int\frac{\sin\xi\,d\xi}{1-\varepsilon^2\cos^2\xi} =$$

$$= \lg\left[k\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\xi}{1-\varepsilon\cos\xi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]^{*)}.$$

Множитель λ выражается по формулѣ

$$\lambda = r = \frac{a\sin\xi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\xi}} \dots\dots\dots\dots\dots (24)$$

Формулы, относящіяся къ трехъосному эллипсоиду, можно найти въ Vorlesungen über Dynamik. Jacobi.

15. Мы видѣли уже, что въ проекціяхъ, сохраняющихъ подобіе безконечно малыхъ частей, масштабъ не зависитъ отъ азимута, и тогда, въ каждой точкѣ M карты, отложивъ на различныхъ прямыхъ, проходящихъ черезъ эту точку, длину равную масштабу, мы получимъ кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ M, а радіусъ равный масштабу, соотвѣтствующему точкѣ M.

Итакъ, при сохраненіи подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ сказанное построеніе даетъ въ различныхъ точкахъ карты круги, радіусы которыхъ измѣняются отъ точки къ точкѣ.

---

*) Lagrange. Sur la construction des cartes géographiques. Oeuvres complètes, tome IV, pag. 660.

Очевидно, что круги различныхъ точекъ карты могутъ имѣть постоянный радіусъ лишь въ томъ случаѣ, если изображаемая поверхность развертывается на плоскости.

Высказанное свойство изображеній съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ можетъ быть формулировано еще такъ: всякій безконечно малый кругъ поверхности изображается кругомъ на картѣ.

16. Если карта не сохраняетъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ, тогда откладывая на каждой прямой MN, проходящей черезъ точку M, длину MN равную масштабу, который соотвѣтствуетъ азимуту α изображаемой поверхности, или, что одно и тоже, азимуту $\beta = AMN$ (см. черт. 1) карты, получимъ нѣкоторую замкнутую кривую $N\,N_1\,N_2 \ldots$

Не трудно убѣдиться, что кривая эта будетъ, вообще говоря, эллипсъ, независимо отъ вида изображаемой поверхности, а также отъ способа проектированія *).

Напишемъ уравненіе этой кривой, принимая точку M карты за начало прямоугольныхъ координатъ, касательную къ линіи $v = \text{const}$ на картѣ за ось X-овъ, тогда получимъ

$$x = \mu \cos\beta, \quad y = \mu \sin\beta$$

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{Eu'^2 + 2Fu' + G}{\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Кромѣ того у насъ было

$$\frac{d\sigma}{dv} = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{e}\sin\beta}, \quad \operatorname{cotg}\beta = \frac{eu' + f}{\sqrt{eg - f^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Исключая изъ уравненія (25) $\frac{d\sigma}{dv}$ и u' при помощи уравненія (26), получимъ

$$\frac{1}{\mu^2} = P\cos^2\beta + 2Q\cos\beta\sin\beta + R\sin^2\beta,$$

гдѣ

$$P = \frac{E}{e}, \quad Q = \frac{Fe - fE}{e\sqrt{eg - f^2}}$$

$$R = \frac{Ef^2 - 2Ffe + Ge^2}{e(eg - f^2)},$$

*) Tissot. Mémoire sur la représentation des surfaces. Paris, 1881.

отсюда уравненіе искомой кривой имѣетъ видъ

$$1 = Px^2 + 2Qxy + Ry^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

Если изображаемая поверхность дѣйствительная, а также формулы проектированія дѣйствительныя, то кривая (27) будетъ эллипсъ, ибо

$$PR - Q^2 = \frac{EG - F^2}{eg - f^2} > 0\ *).$$

17. Итакъ, въ каждой точкѣ карты масштабъ мѣняется съ измѣненіемъ азимута, причемъ всегда заключается между двумя величинами μ_0 и $\mu_1 > \mu_0$, соотвѣтствующими главнымъ діаметрамъ или осямъ эллипса.

Для нахожденія μ_0 и μ_1 замѣтимъ, что по заданному масштабу μ мы найдемъ соотвѣтствующій ему азимутъ изъ квадратнаго уравненія

$$\mu^2 = \frac{eu'^2 + 2fu' + g}{Eu'^2 + 2Fu' + G},$$

или

$$(E\mu^2 - e)u'^2 + 2(F\mu^2 - f)u' + G\mu^2 - g = 0.$$

Отсюда

$$u' = \frac{f - F\mu^2 \pm \sqrt{(f - F\mu^2)^2 - (g - G\mu^2)(e - E\mu^2)}}{E\mu^2 - e}.$$

Подкоренное выраженіе должно быть положительное, т. е. должно быть

$$f^2 - eg + \mu^2(eG - 2fF + gE) + \mu^4(F^2 - EG) > 0,$$

то есть

$$(EG - F^2)(\mu_0^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu_1^2) > 0,$$

гдѣ μ_0^2 и μ_1^2 корни уравненія

$$\xi^2(EG - F^2) - \xi(eG - 2fF + gE) + eg - f^2 = 0.$$

---

*) $EG - F^2 = (Y'_u Z'_v - Z'_u Y'_v)^2 + (Z'_u X'_v - Z'_v X'_u)^2 + (X'_u Y'_v - X'_v Y'_u)^2$

$$eg - f^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Послѣднее квадратное уравненіе имѣетъ всегда два дѣйствительныхъ и положительныхъ корня, ибо на основаніи выраженій, опредѣляющихъ коэффиціенты e, f, g, E, F, G получаемъ

$$EG - F^2 > 0, \quad eG - 2fF + gE > 0, \quad eg - f^2 > 0,$$

кромѣ того существуетъ неравенство

$$(eG - 2fF + gE)^2 - 4(eg - f^2)(EG - F^2) > 0,$$

справедливое при всякихъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ него.

Итакъ, мы видимъ, что $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$.

Что касается азимутовъ δ_0, δ_1 соотвѣтствующихъ наибольшему и наименьшему масштабу, то на основаніи элементарныхъ соображеній мы получаемъ ихъ по формулѣ

$$\operatorname{tg} 2\delta = 2\frac{(eF - fE)\sqrt{eg - f^2}}{e(Eg - Ge) + 2f(eF - fE)}.$$

18. Будемъ называть эллипсъ (27) *эллипсомъ искаженія* точки M.

Получается весьма важное замѣчаніе, состоящее въ томъ, что при всякомъ изображеніи поверхности на плоскости, не сохраняющемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ, всякій безконечно малый кругъ поверхности изображается на картѣ эллипсомъ подобнымъ и подобнорасположеннымъ эллипсу искаженія точки, соотвѣтствующей центру круга.

Площадь эллипса искаженій выражается такъ:

$$\pi\mu_0\mu_1 = \pi\frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = \pi k,$$

число k имѣетъ весьма важное значеніе въ теоріи картъ.

Возьмемъ на изображаемой поверхности нѣкоторый замкнутый контуръ Σ и разсмотримъ отношеніе площади соотвѣтственной фигуры Σ' карты къ площади фигуры Σ.

Будемъ замкнутый контуръ Σ предполагать проведеннымъ такъ по поверхности, что нѣкоторая точка M этой поверхности лежитъ всегда внутри его, тогда, обозначая отношеніе площадей черезъ ζ, получимъ

$$\zeta = \frac{\iint^{\Sigma'} \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv}{\iint^{\Sigma} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}.$$

гдѣ оба интеграла распространены на всѣ значенія u и v, соотвѣтствующія точкамъ внутри контура Σ.

Будемъ теперь измѣнять контуръ Σ такимъ образомъ, чтобы точка M всегда находилась внутри его, а площадь контура уменьшалось, тогда контуръ, уменьшаясь, будетъ стремиться обратиться въ точку M.

Перемѣнная ζ при такомъ измѣненіи контура будетъ стремиться къ нѣкоторому предѣлу, вообще говоря, отличному отъ нуля и безконечности.

Легко видѣть, что

$$\text{Пред}(\zeta) = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{\sqrt{EG - F^2}} = k.$$

Этотъ предѣлъ будемъ называть масштабомъ искаженія площади, или просто масштабомъ площади въ точкѣ M.

Мы видимъ, что масштабъ площади въ точкѣ равенъ произведенію полуосей эллипса искаженія этой точки. Въ случаѣ сохраненія подобія безконечно малыхъ частей, масштабъ площади равенъ квадрату масштаба.

Если намъ заданъ масштабъ площади k какъ функція отъ u и v, то искаженіе площади всякой конечной фигуры Σ получимъ по формулѣ

$$\zeta = \frac{\iint^{\Sigma} k\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}{\iint^{\Sigma} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}.$$

Особенно важный случай представляютъ проекціи, для которыхъ k число постоянное; тогда, вынося k изъ-подъ знака интеграла, получимъ $\zeta = k$; въ этомъ случаѣ получаются проекціи, въ которыхъ площади различныхъ фигуръ пропорціональны площадямъ изображеній.

Эти проекціи носятъ названіе картъ съ сохраненіемъ площадей (projections équivalentes, authaliques).

19. Сохраненіе площадей выражается уравненіемъ

$$\sqrt{eg - f^2} = k\sqrt{EG - F^2},$$

гдѣ k есть тотъ постоянный множитель, на который надо умножить площадь криволинейной фигуры на поверхности, чтобы получить соотвѣтственную площадь карты.

Не трудно замѣтить, что

$$\sqrt{eg-f^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

Отсюда мы видимъ, что разсматриваемыя проекціи опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=k\sqrt{EG-F^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Если изображаемая поверхность задана, то извѣстно выраженіе корня $\sqrt{EG-F^2}$ въ криволинейныхъ координатахъ u, v.

20. Можно, приличнымъ выборомъ криволинейныхъ координатъ, сдѣлать опредѣленіе функцій φ, ψ не зависимымъ отъ вида разсматриваемой поверхности, т. е. представить уравненіе (28) въ видѣ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Въ самомъ дѣлѣ, преобразуемъ координаты u, v на новыя u_1, v_1, которыя пусть будутъ нѣкоторыми функціями отъ прежнихъ. Пусть E_1, F_1, G_1 будутъ коеффиціенты линейнаго элемента при новыхъ координатахъ, тогда очевидно получимъ

$$E=E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+2F_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u}+G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$F=E_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial r}+\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)+G_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$G=E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2F_1\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v}+G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2.$$

Изъ этихъ формулъ получаемъ

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}-\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)\sqrt{E_1G_1-F_1^2}=\sqrt{EG-F^2}.$$

Для того чтобы было

$$k\sqrt{E_1G_1-F_1^2}=1,$$

необходимо найти какое нибудь рѣшеніе уравненія

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}-\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}=k\sqrt{EG-F^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(30)$$

Одна изъ функцій u_1, v_1, напримѣръ v_1, произвольна.

Выбравъ её, поступаемъ такъ: уравненіе $v_1(u, v) = c$, гдѣ c постоянная произвольная величина, рѣшаемъ относительно v, получимъ $v = \Omega(u, c)$; полученное выраженіе для v подставимъ въ функцію

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\frac{\partial v_1}{\partial v}},$$

которая тогда обратится въ функцію $\Psi(u, c)$ отъ одного u, въ которую будетъ входить въ видѣ постояннаго параметра c. Интегрируя по u, получимъ

$$\int \Psi(u, c)\,du = M(u, c).$$

Самое общее выраженіе искомой функціи u_1 будетъ

$$u_1 = \Pi(c) + kM(u, c),$$

гдѣ Π произвольная функція, а вмѣсто c надо подставить функцію $v_1(u, v)$.

Такъ, напримѣръ, новыя координаты можно ввести равенствами

$$v_1 = v,$$

$$u_1 = k \int \sqrt{EG - F^2}\,du.$$

21. Итакъ, взявъ уравненіе (29)

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \dots\dots\dots\dots (29')$$

найдемъ самыя общія формулы, выражающія проекціи съ сохраненіемъ площадей.

Уравненіе (29) можно преобразовать, взявъ за новыя перемѣнныя независимыя x и v, въ которыхъ выразятся y и u.

Возьмемъ уравненія (2)

$$x = \varphi(u, v) \dots\dots\dots\dots (31)$$

$$y = \psi(u, v) \dots\dots\dots\dots (32)$$

Рѣшая уравненіе (31) относительно u, получимъ

$$u = \varphi_{-1}(x, v)$$

подставляя въ другое (32), получимъ

$$y = \psi[\varphi_{-1}(x, v), v] = \omega(x, v) \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

кромѣ того, подставляя въ уравненіе (31) вмѣсто u функцію $\varphi_{-1}(x, v)$, получимъ тождество

$$x = \varphi[\varphi_{-1}(x, v), v] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Дифференцируя тождество (34) по x, получимъ

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

отсюда

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Подобнымъ же образомъ, дифференцируя (34) по v, получимъ

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v},$$

отсюда

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Дифференцируя (33) по x, получимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

отсюда

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Дифференцируя (33) по v, получимъ

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v},$$

отсюда

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Подставляя выраженія (35), (36), (37), (38) въ уравненіе (29), получимъ

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}\left[\frac{\partial \omega}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right]+\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial y}{\partial x}=1\,,$$

отсюда

$$\frac{\partial \omega}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

Здѣсь величина y обозначена черезъ ω, чтобы не смѣшивать производной $\frac{\partial \omega}{\partial v}$, взятой въ предположеніи x постояннаго, съ производной $\frac{\partial y}{\partial v}$, взятой при u постоянномъ.

Самое общее рѣшеніе уравненія (39) дается формулами

$$\left.\begin{aligned} y&=f'_x(x,v)\\ u&=f'_v(x,v)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

гдѣ f произвольная функція.

Возможность представленія общихъ уравненій задачи въ видѣ (40) составляетъ весьма важное предложеніе, слѣдствія котораго мы увидимъ во второй главѣ этого сочиненія *).

22. Обращаясь къ случаю изображенія поверхности вращенія съ сохраненіемъ площадей, мы замѣчаемъ, что, употребляя картографическія координаты

$$ds^2=[\omega_{-1}(u)]^2(du^2+dv^2),$$

приведемъ задачу къ уравненію

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u}=k^2[\omega_{-1}(u)]^2=\Omega(u).$$

Выбирая вмѣсто u новую перемѣнную независимую

$$U=\int \Omega(u)\,du,$$

придемъ къ уравненію

$$\frac{\partial x}{\partial U}\,\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial U}=1,$$

*) Считаю своимъ долгомъ здѣсь упомянуть, что пр. А. Н. Коркину была извѣстна возможность интегрированія при произвольной системѣ меридіановъ раньше, чѣмъ я сталъ заниматься вопросами, составляющими предметъ второй главы.

такъ что, если мы будемъ разсматривать задачу при помощи послѣдняго уравненія, или, что одно и то же (29), то въ полученныхъ проекціяхъ придется замѣнить перемѣнную u на $\int \Omega(u)\,du$, чтобы вернуться къ первоначальнымъ картографическимъ координатамъ.

Въ случаѣ шара, если за координаты выберемъ широту u и долготу v (радіусъ шара равенъ единицѣ), получаемъ

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\, dv^2,$$

откуда

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2 u.$$

Уравненіе сохраненія площадей при $k = 1$ имѣетъ видъ

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{EG - F^2} = \cos u = \Omega(u);$$

тогда при переходѣ отъ координатъ уравненія (29) къ широтѣ и долготѣ придется въ формулахъ, выражающихъ проекціи, замѣнить u на $\sin u$.

23. Итакъ мы видимъ, что проекціи съ сохраненіемъ площадей принадлежатъ къ числу опредѣляемыхъ однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ перваго порядка съ частными производными съ двумя функціями.

Это обстоятельство существенно отличаетъ ихъ отъ картъ съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ. Послѣднія при картографической системѣ координатъ опредѣляются двумя уравненіями

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 0$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2.$$

Первое изъ этихъ уравненій выражаетъ условіе перпендикулярности линій $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$; отсюда мы заключаемъ, что задача объ ортогональныхъ траекторіяхъ можетъ быть разматриваема какъ частный случай задачи о проекціяхъ географическихъ картъ. Это, именно, тотъ случай, когда мы желаемъ такъ изобразить поверхность, чтобы линіи $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ изображались на картѣ ортогональными траекторіями.

Подобнымъ же образомъ уравненіемъ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

опредѣляются проекціи, въ которыхъ масштабъ каждой точки, соотвѣтствующій двумъ направленіямъ $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$ картографическихъ координатъ, одинаковъ.

Соединеніе двухъ послѣднихъ требованій даетъ карты съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ.

24. Подобнымъ же образомъ можно соединить требованіе сохраненія площадей, напримѣръ, съ требованіемъ перпендикулярности изображеній координатныхъ линій $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$.

Въ томъ случаѣ, если заданная поверхность есть поверхность вращенія, меридіаны же и параллели на картѣ взаимно ортогональны, то проекціи опредѣляются системою двухъ уравненій которыя можно привести къ виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}&=1\\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}&=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

Мы будемъ эти проекціи называть картами Эйлера, ибо въ мемуарѣ: De representatione superficiei sphaericae super plano *), Эйлеръ поставилъ задачу, хотя и не интегрировалъ окончательно относящагося сюда уравненія второго порядка съ частными производными.

Эйлеръ приводитъ задачу къ нахожденію функцій k и Φ, обращающихъ два выраженія

$$dx=k\cos\Phi\,dv+\frac{\sin\Phi}{k}\,dt$$

$$dy=k\sin\Phi\,dv-\frac{\cos\Phi}{k}\,dt$$

въ полные дифференціалы.

Далѣе Эйлеръ прибавляетъ: quoniam nullo adhuc modo patet quomodo resolutionem generalem harum formularum institui conveniat, quaeramus solutiones particulares, и находитъ важнѣйшіе случаи, о которыхъ будетъ сказано во второй главѣ.

---

*) Euler. Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, pro Anno MDCCLXXVII. Pars Prior, pag. 129.

Проекціями Эйлера занимались Оссіанъ Бонне *) и А. Коркинъ. **) Послѣдній показалъ приведеніе задачи къ уравненію $s=z$.

25. Разсмотримъ эту задачу, прилагая къ ней методу Монжа и Ампера.

Взявъ за новыя независимыя перемѣнныя x и y, а за ихъ новыя функціи u, v, мы приведемъ систему (41) къ слѣдующему виду:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=1\\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(42)$$

Обозначая

$$\frac{\partial v}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=q,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=r,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=s,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=t,$$

получимъ черезъ рѣшеніе системы (42)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{q}{p^2+q^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-p}{p^2+q^2},$$

откуда для опредѣленія v получаемъ окончательно слѣдующее уравненіе второго порядка

$$\frac{\partial\frac{q}{p^2+q^2}}{\partial y}+\frac{\partial\frac{p}{p^2+q^2}}{\partial x}=0,$$

или, раскрывая,

$$(q^2-p^2)r-4pqs+(p^2-q^2)t=0\ldots\ldots\ldots(43)$$

26. Здѣсь надо различать два случая: 1) когда между величинами p и q есть зависимость, 2) когда p и q независимы между собой, такъ что ихъ можно принять за новыя независимыя перемѣнныя и употребить подстановку Лежандра.

Обращаясь къ первому случаю, предположимъ, что

$$q=f(p)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

Дифференцируя (44) по x и затѣмъ по y, получимъ

$$s=f'(p)r=\frac{dq}{dp}r,\quad t=f'(p)s=\frac{dq}{dp}s$$

---

*) Ossian Bonnet. Sur la théorie mathématique des cartes géographiques. Journal de Liouville t. XVII. 1852.

**) A. Korkine. Sur les cartes géographiques. Mathematische Annalen, B. XXXI. S. 589.

отсюда, подставляя въ уравненіе (43) вмѣсто r и t ихъ выраженія $\frac{dp}{dq}\,s$ и $\frac{dq}{dp}\,s$ и затѣмъ сокращая s, получимъ уравненіе

$$(q^2-p^2)\,dp^2-4pq\,dp\,dq+(p^2-q^2)\,dq^2=0,$$

отсюда

$$\frac{dq}{dp}=\frac{2pq\mp(p^2+q^2)}{q^2-p^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

Интегрируя, получимъ

$$\sqrt{p^2+q^2}\,e^{\pm\operatorname{arctg}\frac{q}{p}}=c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

гдѣ c постоянная произвольная величина.

Интегрируя уравненіе (46), какъ дифференціальное уравненіе перваго порядка съ частными производными, получимъ

$$\left.\begin{aligned} z&=px+qy+R(p,q)\\ 0&=x+\frac{dq}{dp}\,y+\frac{\partial R}{\partial p}+\frac{\partial R}{\partial q}\frac{dq}{dp}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(47)$$

Въ послѣднихъ формулахъ функція R (p, q) произвольна, значенія же $\frac{dq}{dp}$ надо взять изъ уравненія (45); при этихъ условіяхъ уравненіями (46) и (47) опредѣляются всѣ рѣшенія предложеннаго уравненія (43), дающія зависимость между частными производными p и q.

27. Обращаемся теперь къ случаю, когда p и q независимы между собою.

Въ этомъ случаѣ ихъ можно принять за новыя независимыя перемѣнныя и употребить подстановку Лежандра

$$Z=px+qy-z,$$

$$x=\frac{\partial Z}{\partial p},\quad y=\frac{\partial Z}{\partial q},$$

$$\frac{t}{rt-s^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2},\quad \frac{-s}{rt-s^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial p\,\partial q},\quad \frac{r}{rt-s^2}=\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}.$$

Уравненіе (43) принимаетъ видъ

$$(q^2-p^2)\frac{\partial^2 Z}{\partial q^2}+4pq\frac{\partial^2 Z}{\partial p\,\partial q}+(p^2-q^2)\frac{\partial^2 Z}{\partial p^2}=0.$$

Это уравненіе, черезъ замѣну буквъ p, q на x, y, принимаетъ видъ

$$(x^2-y^2)r+4xys+(y^2-x^2)t=0 \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

Оно имѣетъ видъ

$$Hr+2Ks+Lt=0,$$

гдѣ

$$H=x^2-y^2, \quad K=2xy, \quad L=y^2-x^2.$$

Для приложенія способа Монжа и Ампера придется разсмотрѣть уравненіе

$$H\,dy-\left(K\mp\sqrt{K^2-LH}\right)dx=0 \quad \ldots\ldots\ldots (49)$$

Подставляя въ уравненіе (49) значенія H, K, L изъ заданнаго, мы получимъ при различныхъ знакахъ корня квадратнаго два уравненія

$$(x-y)\,dy-(x+y)\,dx=0$$

$$(x+y)\,dy+(x-y)\,dx=0.$$

Интегрируя, получимъ

$$\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\pm\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}=c.$$

Извѣстно, что если мы выберемъ за новыя независимыя перемѣнныя ξ и η при помощи равенствъ

$$\xi=\sqrt{x^2+y^2}\,e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

$$\eta=\sqrt{x^2+y^2}\,e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}},$$

то изъ уравненія (48) пропадутъ производныя r и t и останется одна s.

Дѣлая это преобразованіе на самомъ дѣлѣ, получимъ уравненіе

$$2\xi\eta\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\partial\eta}-\xi\frac{\partial Z}{\partial\xi}-\eta\frac{\partial Z}{\partial\eta}=0.$$

Взявъ за независимыя перемѣнныя

$$\lg\xi=2\xi_0, \quad \lg\eta=2\eta_0$$

получимъ, окончательно, линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \xi_0 \partial \eta_0} - \frac{\partial Z}{\partial \xi_0} - \frac{\partial Z}{\partial \eta_0} = 0.$$

Подстановка

$$Z = e^{\xi_0 + \eta_0} Z_0$$

приводитъ его къ виду

$$\frac{\partial^2 Z_0}{\partial \xi_0 \partial \eta_0} = Z_0.$$

Это же уравненіе интегрируется въ опредѣленныхъ интегралахъ.

28. Возвращаемся къ разсмотрѣнію эллипса искаженія (27) (см. § 16).

Полуоси вычисляются по формуламъ

$$\mu_1^2 = \frac{eG - 2fF + gE + \sqrt{\Delta_0}}{2(EG - F^2)},$$

$$\mu_0^2 = \frac{eG - 2fF + gE - \sqrt{\Delta_0}}{2(EG - F^2)},$$

гдѣ

$$\Delta_0 = (eG - 2fF + gE)^2 - 4(eg - f^2)(EG - F^2).$$

Если вычислены предварительно P, Q, R, то полуоси найдутся по формуламъ

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{P + R + \sqrt{\Delta}}}{\sqrt{2}\sqrt{RP - Q^2}}; \quad \mu_0 = \frac{\sqrt{P + R - \sqrt{\Delta}}}{\sqrt{2}\sqrt{PR - Q^2}} \ldots\ldots\ldots (50)$$

гдѣ

$$\Delta = (P - R)^2 + 4Q^2 = (P + R)^2 - 4(PR - Q^2),$$

такъ что произведеніе полуосей

$$k = \mu_0 \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{PR - Q^2}}.$$

Для удобства будемъ полуоси эллипса искаженія μ_0 и μ_1 обозначать черезъ a и b.

Изъ формулъ (50) получимъ

$$\frac{1}{a^2} = \frac{P + R - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{P + R + \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Отношеніе полуосей опредѣлится по формулѣ

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{P + R + \sqrt{\Delta}}{P + R - \sqrt{\Delta}}} = \frac{P + R + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{RP - Q^2}}.$$

Обозначая линейный эксцентриситетъ черезъ c, получимъ

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{PR - Q^2}$$

$$\sqrt[4]{\Delta} = \frac{c}{ab} = \frac{\varepsilon}{b}, \qquad \varepsilon = b\sqrt[4]{\Delta},$$

гдѣ ε астрономическій эксцентриситетъ

$$\frac{1}{a^2} = \frac{eG - 2fF + gE - \sqrt{\Delta_0}}{2(eg - f^2)}, \qquad \frac{1}{b^2} = \frac{eG - 2fF + gE + \sqrt{\Delta_0}}{2(eg - f^2)},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{eG - 2fF + gE + \sqrt{\Delta_0}}{2\sqrt{(eg - f^2)(EG - F^2)}},$$

$$c^2 = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{EG - F^2}, \qquad \varepsilon = b\,\frac{\sqrt[4]{\Delta_0}}{\sqrt{eg - f^2}}.$$

29. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію искаженія азимутовъ.

Обозначая черезъ α и β азимуты на поверхности и на картѣ, получимъ согласно принятымъ въ § 17 обозначеніямъ

$$P \operatorname{cotg}\beta = \sqrt{PR - Q^2}\operatorname{cotg}\alpha - Q \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Это уравненіе имѣетъ весьма простое геометрическое толкованіе. Упростимъ его предварительно черезъ введеніе двухъ вспомогательныхъ угловъ δ, ε.

Возьмемъ уравненіе

$$P \operatorname{cotg}(\beta + \delta) = \Omega = \sqrt{PR - Q^2}\operatorname{cotg}(\alpha + \varepsilon) - Q.$$

$$P\,\frac{\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\delta - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\delta} = \Omega,$$

отсюда

$$\operatorname{cotg}\beta\,[P \operatorname{cotg}\delta - \Omega] = P + \Omega \operatorname{cotg}\delta$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{P + \Omega \operatorname{cotg}\delta}{P \operatorname{cotg}\delta - \Omega} = \frac{A \operatorname{cotg}\alpha + B}{C \operatorname{cotg}\alpha + D},$$

гдѣ

$$A = P - Q\operatorname{cotg}\delta + \sqrt{PR - Q^2}\operatorname{cotg}\delta \operatorname{cotg}\varepsilon$$

$$B = (P - Q\operatorname{cotg}\delta)\operatorname{cotg}\varepsilon - \sqrt{PR - Q^2}\operatorname{cotg}\delta$$

$$C = P\operatorname{cotg}\delta + Q - \sqrt{PR - Q^2}\operatorname{cotg}\varepsilon$$

$$D = (P\operatorname{cotg}\delta + Q)\operatorname{cotg}\varepsilon + \sqrt{PR - Q^2}.$$

Два угла δ и ε подберемъ такъ, чтобы было

$$B = 0, \quad C = 0.$$

Уравненіе $C = 0$ даетъ

$$P \operatorname{cotg} \delta = \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{cotg} \varepsilon - Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

Сравнивая уравненіе (52) съ (51) замѣтимъ, что уголъ δ есть не что иное, какъ азимутъ карты, соотвѣтствующій азимуту ε изображаемой поверхности.

Уравненіе $B = 0$ даетъ

$$(P - Q \operatorname{cotg} \delta) \operatorname{cotg} \varepsilon - \sqrt{PR - Q^2} \operatorname{cotg} \delta = 0$$

и въ связи съ уравненіемъ $C = 0$ даетъ

$$(P - Q \operatorname{cotg} \delta)(P \operatorname{cotg} \delta + Q) - (PR - Q^2) \operatorname{cotg} \delta = 0.$$

Отсюда

$$PQ\{1 - \operatorname{cotg}^2 \delta\} + P[P - R] \operatorname{cotg} \delta = 0.$$

Изъ этого уравненія получимъ

$$\operatorname{cotg} 2\delta = \frac{\operatorname{cotg}^2 \delta - 1}{2 \operatorname{cotg} \delta} = \frac{P - R}{2Q},$$

или

$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{2Q}{P - R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

Уравненіе (27) эллипса искаженія показываетъ, что уголъ δ, опредѣляемый формулой (53), есть азимутъ одной изъ осей эллипса искаженія (на картѣ).

Если будемъ подъ δ разумѣть азимутъ большой оси, то получимъ

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R - P - \sqrt{\Delta}}{2Q}, \quad \operatorname{cotg} \delta = \frac{P - R - \sqrt{\Delta}}{2Q} \ldots\ldots (54)$$

Въ этихъ формулахъ $\sqrt{\Delta}$ обозначаетъ ариѳметическій корень.

Малой оси будетъ соотвѣтствовать азимутъ, опредѣляемый по формулѣ

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{R - P + \sqrt{\Delta}}{2Q}.$$

Итакъ, выбравъ ε и δ удовлетворяющими уравненіямъ $B=0$, $C=0$, получимъ

$$\operatorname{cotg}\beta=\frac{A}{D}\operatorname{cotg}\alpha.$$

Покажемъ, что дробь $\frac{A}{D}$ есть не что иное, какъ отношеніе полуосей эллипса $\frac{a}{b}$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$A=P-Q\operatorname{cotg}\delta+\sqrt{PR-Q^2}\operatorname{cotg}\delta\operatorname{cotg}\varepsilon=$$

$$=P+\operatorname{cotg}\delta\left[\sqrt{PR-Q^2}\operatorname{cotg}\varepsilon-Q\right]=P(1+\operatorname{cotg}^2\delta),$$

$$D=(P\operatorname{cotg}\delta+Q)\operatorname{cotg}\varepsilon+\sqrt{PR-Q^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{PR-Q^2}\,(1+\operatorname{cotg}^2\delta)\,P}{P-Q\operatorname{cotg}\delta}.$$

Отсюда

$$\frac{A}{D}=\frac{P-Q\operatorname{cotg}\delta}{\sqrt{PR-Q^2}}.$$

Подставляя сюда выраженіе (54) для $\operatorname{cotg}\delta$, мы получимъ

$$\frac{A}{D}=\frac{2P-2Q\operatorname{cotg}\delta}{2\sqrt{PR-Q^2}}=\frac{P+R+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{PR-Q^2}}=\frac{a}{b}.$$

Итакъ, получается окончательно формула

$$\operatorname{cotg}\beta=\frac{a}{b}\operatorname{cotg}\alpha\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

30. Приведенныя разсужденія приводятъ къ слѣдующему геометрическому построенію.

Проведемъ въ точкѣ M (см. черт. 2) касательную MA къ линіи MS, опредѣляемой уравненіемъ $v=\text{const}$, и будемъ отъ нея откладывать азимуты карты.

Отложимъ въ противоположную сторону уголъ $\varepsilon-\delta$, который можно вычислить по формуламъ (52), (53). Построимъ эллипсъ искаженія CND для точки M. На большой оси, какъ на діаметрѣ, построимъ кругъ CPD. Отложимъ уголъ BMP равный азимуту изображаемой поверхности; изъ точки P круга опустимъ перпендикуляръ PQ на большую ось эллипса; этотъ перпендикуляръ встрѣтитъ эллипсъ въ точкѣ N. Уголъ NMA будетъ азимутъ карты, соотвѣтствующій азимуту PMB изображаемой поверхности.

Будемъ называть азимуты

$$\alpha = PMC, \quad \beta = NMC,$$

отсчитываемые отъ направленія большой полуоси эллипса, *приведенными.*

На основаніи соотношенія (55) между приведенными азимутами выводятся многочисленныя зависимости между масштабами и азимутами *).

31. Двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ на изображаемой поверхности соотвѣтствуютъ направленія сопряженныхъ діаметровъ эллипса искаженія; отсюда, обозначая черезъ μ_1, μ_2 масштабы, соотвѣтствующіе двумъ взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ на изображаемой поверхности, на основаніи теоремъ Аполлонія получимъ

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = a^2 + b^2 = \frac{P+R}{PR-Q^2} = \frac{Eg - 2fF + eG}{EG - F^2} \; \ldots\ldots (56)$$

$$\mu_1 \mu_2 \sin\theta = ab = \frac{1}{\sqrt{PR-Q^2}} = \sqrt{\frac{eg-f^2}{EG-F^2}} = k \; \ldots\ldots (57)$$

Итакъ мы видимъ, что всякій прямой уголъ поверхности обращается на картѣ въ уголъ θ, опредѣляемый уравненіемъ (57).

Для того, чтобы прямой уголъ не претерпѣвалъ искаженія, необходимо положить $\theta = \frac{\pi}{2}$; тогда $\mu_1 \mu_2 = ab$. Это уравненіе въ связи съ (56) даетъ $\mu_1 = a$, $\mu_2 = b$; получаемъ, что только одинъ прямой уголъ, который соотвѣтствуетъ направленіямъ осей, не претерпѣваетъ искаженія.

Наибольшее искаженіе прямого угла соотвѣтствуетъ направленіямъ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ.

32. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію искаженія угловъ отличныхъ отъ 90°, и начнемъ съ разсмотрѣнія искаженія приведенныхъ азимутовъ.

*) Tissot. Mémoire sur la représentation des surfaces.

Изъ формулы (55) найдемъ

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{a-b}{a+b}\sin(\alpha+\beta)\ldots\ldots\ldots\ldots(58)$$

Maximum разности $\alpha-\beta$ соотвѣтствуетъ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. Пусть будутъ соотвѣтственныя значенія α_0, β_0, тогда $\operatorname{tg}\alpha_0=\operatorname{cotg}\beta_0$

$$\operatorname{tg}\beta_0=\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \operatorname{tg}\alpha_0=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Обозначая разность $\alpha_0-\beta_0$ черезъ ω, получимъ

$$\sin\omega=\frac{a-b}{a+b},\quad \cos\omega=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$\operatorname{tg}\omega=\frac{a-b}{2\sqrt{ab}},\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{a}{b}},\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Отсюда мы видимъ, что

$$\alpha_0=\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2},\quad \beta_0=\frac{\pi}{4}-\frac{\omega}{2}.$$

Углы α_0, β_0 могутъ быть весьма просто построены геометрически. Построимъ на большой оси AB эллипса искаженія (см. черт. 3), какъ на діаметрѣ, окружность, которая пусть встрѣчаетъ малую ось CD въ точкахъ E, G. На CE, какъ на діаметрѣ, строимъ полуокружность, которая пусть встрѣчаетъ полуось MA въ точкѣ F. Соединяя точку F съ точками D и E, получимъ $\alpha_0=MFE$, $\beta_0=DFE$. Направленія на изображаемой поверхности и на картѣ, соотвѣтствующія наибольшему искаженію приведеннаго азимута, построятся черезъ проведеніе $MK \parallel DF$ и $ML \parallel EF$.

33. Если задано направленіе (α_1, β_1), то можно указать другое ему соотвѣтственное (α_2, β_2), чтобы искаженіе приведенныхъ азимутовъ этихъ двухъ направленій было одинаково. Полагая $\alpha_1-\beta_1=\alpha_2-\beta_2$, получимъ по уравненію (58), что $\sin(\alpha_1+\beta_1)=\sin(\alpha_2+\beta_2)$, что даетъ или $\alpha_1+\beta_1=2k\pi+\alpha_2+\beta_2$, или $\alpha_1+\beta_1=(2k+1)\pi-(\alpha_2+\beta_2)$. Первое предположеніе даетъ $\alpha_2=\alpha_1+k\pi$, $\beta_2=\beta_1+k\pi$, а второе $\alpha_2=\frac{2k+1}{2}\pi-\beta_1$, $\beta_2=\frac{2k+1}{2}\pi-\alpha_1$.

Это замѣчаніе геометрически можетъ быть формулировано такъ.

Взявъ двѣ точки N и M (см. черт. 4) на кругѣ и эллипсѣ, соотвѣтствующія азимутамъ α_1, β_1, продолжаемъ сторону OM азимута β_1 до встрѣчи съ кругомъ въ точкѣ n.

Опустимъ изъ точки n перпендикуляръ на малую ось эллипса. Перпендикуляръ этотъ pn встрѣчаетъ прямую ON въ точкѣ m, лежащей на эллипсѣ равномъ эллипсу AM, но расположенномъ такъ, что большая ось новаго эллипса расположена вдоль по малой оси первоначальнаго, и обратно.

34. Искаженіе приведеннаго азимута вычисляется, зная величину азимута на поверхности, по формулѣ

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{a+b\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{(a-b)\sin 2\alpha}{a+b+(a-b)\cos 2\alpha}.$$

Зная искаженіе приведеннаго азимута, получимъ настоящее искаженіе азимута, прибавляя уголъ $\varepsilon-\delta$ (см. § 29).

35. Обратимся теперь къ изученію искаженія разности азимутовъ, другими словами, къ разсмотрѣнію искаженія нѣкотораго угла.

При разсмотрѣніи разности азимутовъ прибавочный уголъ не играетъ никакой роли и азимуты можно считать безразлично простыми или приведенными.

Мы видѣли, что для всякаго направленія (α_1 β_1) можно подобрать другое (α_2, β_2) такимъ образомъ, чтобы было

$$\alpha_2-\alpha_1=\eta,\quad \beta_2-\beta_1=\eta.$$

Эти формулы показываютъ, что азимуты α_2 и α_1 даютъ въ разности уголъ не искажаемый.

Легко видѣть, что, каковъ бы ни былъ уголъ η, его можно такъ расположить на картѣ, что онъ не будетъ имѣть искаженія. Для этой цѣли придется удовлетворить двумъ уравненіямъ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\eta)=\frac{a}{b}\operatorname{tg}(\beta+\eta).$$

Исключая уголъ α, для нахожденія угла β получимъ квадратное уравненіе

$$a \operatorname{tg}^2\beta + (a + b) \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\eta - b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (59)$$

Послѣднее уравненіе даетъ для β два значенія

$$0 < \beta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta_2 < 0.$$

Уравненіе (59) показываетъ, что, если $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{b}{a}}$, то $\eta = 0$.

Если стороны остраго угла лежатъ въ одномъ изъ вертикальныхъ угловъ, составляемыхъ осями эллипса искаженія, то искаженіе этого угла по абсолютной величинѣ равно разности искаженій азимутовъ сторонъ. Если же стороны остраго угла лежатъ въ разныхъ вертикальныхъ углахъ, то искаженія азимутовъ сторонъ суммируются.

Уголъ, претерпѣвающій наибольшее искаженіе, образованъ, очевидно, изъ направленій

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = +\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

36. Разсмотримъ теперь масштабы, соотвѣтствующіе неискажаемымъ угламъ.

Геометрическое построеніе приведенныхъ азимутовъ изображаемой поверхности и карты приводитъ къ уравненіямъ

$$\mu \cos\beta = a \cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

$$\mu \sin\beta = b \sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

отсюда

$$\mu^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Умножая уравненіе (60) на $2 \sin\alpha$, а уравненіе (61) на $-2 \cos\alpha$ и складывая, получимъ

$$2\mu \sin(\alpha - \beta) = (a - b) \sin 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Произведеніе масштабовъ, соотвѣтствующихъ сторонамъ неискажаемаго угла, есть величина постоянная и равная, слѣдовательно, произведенію полуосей.

Пусть неискажаемый уголъ η опредѣляется на поверхности приведенными азимутами α_2, α_1, которымъ на картѣ соотвѣтствуютъ азимуты β_2, β_1. Должно быть $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$, откуда, какъ мы уже видѣли, получимъ

$$\alpha_2 = \frac{2k+1}{2}\pi - \beta_1, \quad \beta_2 = \frac{2k+1}{2}\pi - \alpha_1,$$

отсюда

$$\cos\alpha_2 = (-1)^k \sin\beta_1, \quad \cos\beta_2 = (-1)^k \sin\alpha_1 \ldots\ldots (64)$$

Итакъ, обозначая масштабы, соотвѣтствующіе сторонамъ угла (α_1, α_2), черезъ μ_1, μ_2, получимъ

$$\mu_2 \cos\beta_2 = a \cos\alpha_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$\mu_1 \sin\beta_1 = b \sin\alpha_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

На основаніи уравненій (64) уравненіе (65) обратится въ слѣдующее:

$$\mu_2 \sin\alpha_1 = a \sin\beta_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Изъ уравненій (67) и (66) получаемъ

$$\mu_1 \mu_2 = ab,$$

что и требовалось доказать.

Масштабъ, соотвѣтствующій углу наибольшаго искаженія, равенъ $\sqrt{ab}$.

37. По аналогіи съ теоріей кривизны поверхностей, въ теоріи картъ могутъ быть разсматриваемы нѣкоторыя линіи, подобныя линіямъ кривизны.

Эти линіи, которыя мы будемъ называть *линіями главныхъ искаженій*, суть огибающія на картѣ направленій наибольшаго и наименьшаго масштабовъ.

Для полученія дифференціальнаго уравненія этихъ линій будемъ разсуждать такъ. Касательная въ нѣкоторой точкѣ искомой линіи опредѣляется значеніемъ производной $\frac{du}{dv} = u'$; необходимо, чтобы при этомъ значеніи производной u' масштабъ былъ наибольшій или наименьшій.

Для этой цѣли приравняемъ нулю производную, взятую по u' отъ дроби

$$\frac{eu'^2 + 2fu' + g}{Eu'^2 + 2Fu' + G};$$

тогда получимъ уравненіе

$$u'^2(eF-fE)+u'(eG-gE)+fG-gF=0.$$

Послѣднее уравненіе можетъ быть написано такъ:

$$du^2(eF-fE)+du\,dv(eG-gE)+dv^2(fG-gF)=0\,.\,.(68)$$

Если карта сохраняетъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ, то послѣднее уравненіе обращается въ тождество, ибо обращаются въ нуль коэффиціенты при дифференціалахъ, и линій главныхъ искаженій не существуетъ.

38. Линіи главныхъ искаженій на картѣ и соотвѣтствующія имъ кривыя на поверхности суть ортогональныя траекторіи и, на основаніи приведенныхъ выше соображеній, очевидно, что ортогональныя траекторіи поверхности тогда, и только тогда, изображаются ортогональными же траекторіями, когда онѣ изображаются линіями главныхъ искаженій.

Это можно показать легко аналитически. Возьмемъ два азимута α_0 и α_1, соотвѣтствующія имъ значенія производной $\frac{du}{dv}$ обозначимъ черезъ u'_0 и u'_1, тогда по формулѣ, приведенной въ § 7, получимъ

$$\operatorname{cotg}\alpha_0=\frac{Eu'_0+F}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \operatorname{cotg}\alpha_1=\frac{Eu'_1+F}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Условіе перпендикулярности

$$\operatorname{cotg}\alpha_0\operatorname{cotg}\alpha_1+1=0$$

обращается въ слѣдующее:

$$Eu'_0u'_1+F(u'_0+u'_1)+G=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(69)$$

Пусть дифференціальное уравненіе ортогональныхъ траекторій на изображаемой поверхности будетъ

$$Adu^2+Bdu\,dv+Cdv^2=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(70)$$

слѣдовательно, u_0' и u_1' будутъ корни квадратнаго уравненія

$$Au'^2+Bu'+C=0.$$

Отсюда

$$u'_0 u'_1 = \frac{C}{A}, \quad u'_0 + u'_1 = -\frac{B}{A}.$$

Подставляя въ уравненіе (69), получимъ

$$EC - FB + GA = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

Подобнымъ же образомъ, если изображенія линій (70) ортогональны также на картѣ, то должно существовать равенство

$$eC - fB + gA = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (72)$$

Если карты сохраняютъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ, то уравненіе (71) влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, уравненіе (72) и, слѣдовательно, каждая система ортогональныхъ траекторій заданной поверхности обращается въ систему ортогональныхъ же траекторій на картѣ.

Въ общемъ случаѣ изъ уравненій (71) и (72) образуется пропорція

$$\frac{A}{eF - fE} = \frac{B}{eG - gE} = \frac{C}{fG - gF},$$

которая показываетъ, что уравненіе (70) обращается въ дифференціальное уравненіе линій главныхъ искаженій.

39. Особаго вниманія заслуживаютъ проекціи, въ которыхъ линіи главныхъ искаженій прямыя.

Взявъ систему картографическихъ координатъ

$$E = G, \quad F = 0,$$

напишемъ дифференціальное уравненіе линій главныхъ искаженій

$$u'^2 - \frac{e-g}{f} u' - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

Возьмемъ на картѣ оси прямоугольныхъ координатъ параллельно линіямъ главныхъ искаженій, тогда для направленія параллельнаго оси x-овъ мы получимъ

$$y'_u u' + y'_v = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

подставляя въ уравненіе (73) выраженіе u' изъ (74), получимъ окончательно уравненіе, опредѣляющее проекціи, въ такомъ видѣ:

$$x'_u y'_u + x'_v y'_v = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

Одна изъ функцій x, y произвольна, а потому для ограниченія её можно кромѣ уравненія (75) задать еще какую нибудь зависимость.

Такъ напримѣръ, можно требовать сохраненія площадей, тогда задача приводится къ интегрированію уравненія второго порядка съ частными производными. Я не буду болѣе останавливаться на изученіи проекцій съ прямолинейными линіями главныхъ искаженій, имѣя въ виду разсмотрѣніе такихъ проекцій сдѣлать предметомъ отдѣльной статьи.

40. Будемъ называть *линіями наибольшаго искаженія угловъ* такія линіи карты, для которыхъ касательная въ каждой точкѣ имѣетъ приведенный азимутъ β, опредѣляемый по формулѣ

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Если изображается поверхность вращенія, то очевидно, что этимъ линіямъ на поверхности не могутъ соотвѣтствовать меридіаны и параллели; ибо меридіанамъ и параллелямъ, какъ ортогональнымъ траекторіямъ, должны соотвѣтствовать направленія сопряженныхъ діаметровъ на картѣ, стороны же угла наибольшаго искаженія, какъ мы видѣли, не совпадаютъ съ сопряженными діаметрами эллипса.

Принимая обозначенія § 29, мы получимъ для линій наибольшаго искаженія угловъ дифференціальное уравненіе

$$(eu'+f)^2 - \sqrt{eg-f^2}\,(eu'+f)\,[\operatorname{cotg}(\delta+\beta) + \operatorname{cotg}(\delta-\beta)] +$$
$$+ (eg-f)^2 \operatorname{cotg}(\delta+\beta)\operatorname{cotg}(\delta+\beta) = 0.$$

Если карты сохраняютъ площади, то по этимъ направленіямъ сохраняются длины.

41. Показавъ, какъ искать линіи наибольшаго искаженія длинъ и угловъ, разсмотримъ теперь линіи сохраняющія длины и углы.

Легко видѣть, что, если карта не сохраняетъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ, то существуютъ двѣ системы линій, по которымъ масштабъ величина постоянная. Эти линіи опредѣляются, очевидно, уравненіемъ

$$(Ek^2 - e)u'^2 + 2(Fk^2 - f)u' + Gk^2 - g = 0 \ldots\ldots (76)$$

Какова бы ни была изображаемая поверхность, т. е. каковы бы ни были функціи E, F, G, всегда можно подобрать функціи φ и ψ такъ, чтобы линіи, опредѣляемыя уравненіями (76), были на картѣ прямыя, параллельныя между собою. Въ случаѣ, если прямыя одной системы перпендикулярны линіямъ другой, получаются проекціи, разсматривавшіяся въ первый разъ Чебышевымъ. Знаменитый математикъ разсматривалъ задачу о покрытіи поверхностей нитяными тканями *). Вопросъ приводится къ уравненію второго порядка съ частными производными и имѣетъ связь съ вопросомъ о наложеніи поверхностей.

Обращаясь къ разсмотрѣнію линій сохраненія угловъ, мы замѣчаемъ, что ихъ дифференціальное уравненіе будетъ имѣть видъ:

$$(eu' + f)^2 - \sqrt{eg - f^2}\,(eu' + f)\,[\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}(\beta + \eta)] +$$
$$+ (eg - f^2)\operatorname{cotg}\beta\,\operatorname{cotg}(\beta + \eta) = 0 \ldots\ldots\ldots (77)$$

гдѣ η совершенно произвольный уголъ, а β азимутъ, для котораго приведенный вычисляется изъ уравненія (59) (см. § 35). Линіи главныхъ искаженій суть частный случай при $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Въ послѣднемъ уравненіи (77) η можно считать нѣкоторою функціею отъ u и v, причемъ вмѣсто β придется подставить корень квадратнаго уравненія (59). Задача имѣетъ два рѣшенія.

42. Послѣдній видъ линій на картѣ, о которомъ мы здѣсь упомянемъ, представляютъ двѣ системы линій, причемъ каждой точкѣ системы соотвѣтствуютъ направленія сопряженныхъ діаметровъ эллипса искаженія. Задача нахожденія такихъ линій равносильна съ задачей объ ортогональныхъ траекторіяхъ изображаемой поверхности.

43. Изложивъ основанія общей теоріи искаженія длинъ и

*) Tchébychef. Sur la coupe des vêtements. Association française pour l'avancement des Sciences. Congrés de Paris, p. 154, an. 1878.

угловъ въ картахъ, представляющихъ изображеніе поверхности на плоскости, обратимся къ обзору существующихъ видовъ проекцій.

Разными геометрами уже съ давнихъ временъ предложено очень много способовъ проекцій, подробное перечисленіе которыхъ можно найти въ сочиненіяхъ: A. Germain. Traité des projections des cartes géographiques. Tissot. Mémoires sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques.

Трудно дать вполнѣ удовлетворительную классификацію существующихъ видовъ проекцій, ибо многія изъ нихъ принадлежатъ къ числу *условныхъ*, т. е. такихъ, способъ построенія которыхъ выбранъ настолько произвольно, что ихъ трудно подвести подъ какую-либо достаточно общую категорію.

Очень многія изъ помѣщенныхъ въ сборникѣ Тиссо проекцій принадлежатъ къ числу проекцій или съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ, или съ сохраненіемъ площадей.

44. На практикѣ установились для нѣкоторыхъ видовъ проекцій названія характера геометрическаго, хотя часто построеніе подобныхъ проекцій не связано ни съ какимъ опредѣленнымъ геометрическимъ правиломъ и указывается аналитическою зависимостью между прямоугольными координатами точекъ карты и криволинейными координатами изображаемой поверхности.

Къ числу такихъ терминовъ принадлежатъ названія картъ *цилиндрическихъ* и *коническихъ*.

45. Цилиндрическою проекція называется тогда, когда меридіаны изображаются прямыми параллельными между собою, параллели же изображаются прямыми перпендикулярными къ изображенію меридіановъ.

Обозначая черезъ u, v широту и долготу точки M на поверхности вращенія, изображаемой на плоскости, получимъ общія формулы цилиндрической карты при прямоугольныхъ координатахъ въ такомъ видѣ:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(v),$$

гдѣ φ и ψ совершенно произвольныя функціи.

Гораздо чаще названіе цилиндрической дается проеціи въ случаѣ $\psi(v) = av + b$, ибо тогда построеніе такой проекціи связываютъ съ проектированіемъ на нѣкоторый цилиндръ.

46. Проекція получаетъ названіе конической, если меридіаны изображаются прямыми, сходящимися въ одну точку, а параллели — круги концентрическіе, имѣющіе общій центръ въ точкѣ схода меридіановъ.

Выбирая на картѣ полярныя координаты, получимъ общія формулы для этой проекціи въ такомъ видѣ:

$$r = \varphi(u), \quad \theta = \psi(v)$$

гдѣ r радіусъ векторъ, θ полярный уголъ, а φ и ψ совершенно произвольныя функціи.

Чаще всего употребляются проекціи, въ которыхъ $\psi(v) = av + b$, гдѣ a и b числа постоянныя; въ этомъ случаѣ названіе проекціи связывается съ проектированіемъ на нѣкоторый конусъ. Въ случаѣ $a = 1$ проекція называется *центральною* и обладаетъ свойствомъ, что углы между плоскостями меридіановъ, то есть разности долготъ двухъ пунктовъ, сохраняются и на картѣ.

Проекція носитъ названіе *поликонической*, если параллели изображаются кругами не концентрическими.

47. При изображеніи шара на плоскости употребляются еще два названія.

Центральная проекція носитъ названіе *полярной*, если полюсъ шара принятъ за центръ карты, и проекція называется *горизонтальною* или *зенитальною*, если за центръ карты принятъ какой нибудь пунктъ земного шара отличный отъ полюса; въ послѣднемъ случаѣ прямыми изображаются различные вертикалы даннаго мѣста, а кругами альмикантараты, т. е. круги равныхъ высотъ.

Формулы сферической тригонометріи даютъ возможность всегда перейти отъ полярной проекціи къ любой горизонтальной.

48. *Гномоническою* называется проекція шара на плоскости, получаемая при помощи перспективы изъ центра шара. Эта проекція обладаетъ свойствомъ изображать всякій большой кругъ шара прямою линіею. Бельтрами *) показалъ, что изъ всѣхъ поверхностей только развертывающіяся на шаръ могутъ быть такъ изображены на

*) Beltrami. Risoluzione del Problema: «Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengono rappresentate da linee rette». Annali di Mathematica pura ed applicata de B. Tortolini. t. III. p. 185, 1866.

плоскости, что всякой геодезической линіи поверхности соотвѣтствуетъ прямая линія на плоскости.

Дини поставилъ задачу о геодезическомъ изображеніи одной поверхности на другой, т. е. о такомъ, чтобы геодезической линіи одной поверхности соотвѣтствовала геодезическая линія другой.

49. Легко изобразить поверхность вращенія на плоскости, такъ чтобы всякой локсодроміи соотвѣтствовала прямая на картѣ.

Употребляя картографическія координаты u и v (см. § 14), получимъ уравненіе локсодроміи въ видѣ:

$$v = au + b,$$

гдѣ a и b постоянныя произвольныя.

Очевидно, что проекція, обладающая требуемыми свойствами, опредѣляется уравненіемъ

$$Ax + By + C = 0,$$

гдѣ A, B, C суть произвольныя функціи отъ a, b.

Частный случай этихъ проекцій представляетъ извѣстная Меркаторская (1569 г.)

$$x = v, \quad y = u.$$

50. Среди извѣстныхъ проекцій многія получаются при помощи нѣкотораго опредѣленнаго геометрическаго построенія.

Таковы, между прочимъ, проекціи перспективныя. Кромѣ обыкновенной перспективы на плоскость, употребляется иногда перспектива данной поверхности на развертывающуюся поверхность, черезъ развертываніе которой получается искомая плоская карта.

Обратимся теперь къ рѣшенію ряда задачъ слѣдующаго рода: найти всѣ поверхности изображаемыя при помощи даннаго геометрическаго построенія съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ или съ сохраненіемъ площадей.

51. Прежде всего обратимся къ картамъ перспективнымъ.

Возьмемъ центръ перспективы (точку глаза) за начало прямоугольныхъ координатъ; плоскость перспективы пусть будетъ $z = a$.

Возьмемъ нѣкоторую поверхность S и на ней точку $M(X, Y, Z)$. Пусть будетъ

$$X = \Phi(u, v), \quad Y = \Psi(u, v), \quad Z = \Omega(u, v).$$

Обозначая координаты соотвѣтственной точки m карты черезъ x, y, получимъ

$$x = a\frac{X}{Z}, \quad y = a\frac{Y}{Z}.$$

Дифференцируя получимъ

$$e = \frac{a^2}{Z^2}E + \frac{a^2(X^2+Y^2+Z^2)}{Z^4}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 - \frac{2a^2}{Z^3}\frac{\partial Z}{\partial u}\left\{X\frac{\partial X}{\partial u} + Y\frac{\partial Y}{\partial u} + Z\frac{\partial Z}{\partial u}\right\}$$

$$g = \frac{a^2}{Z^2}G + \frac{a^2(X^2+Y^2+Z^2)}{Z^4}\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 - \frac{2a^2}{Z^3}\frac{\partial Z}{\partial v}\left\{X\frac{\partial X}{\partial v} + Y\frac{\partial Y}{\partial v} + Z\frac{\partial Z}{\partial v}\right\}$$

$$f = \frac{a^2}{Z^2}F + \frac{a^2(X^2+Y^2+Z^2)}{Z^4}\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{a^2}{Z^3}\frac{\partial Z}{\partial u}\left\{X\frac{\partial X}{\partial v} + Y\frac{\partial Y}{\partial v} + Z\frac{\partial Z}{\partial v}\right\}$$

$$- \frac{a^2}{Z^3}\frac{\partial Z}{\partial v}\left\{X\frac{\partial X}{\partial u} + Y\frac{\partial Y}{\partial u} + Z\frac{\partial Z}{\partial u}\right\}.$$

Посмотримъ, какія изъ перспективныхъ картъ и для какихъ поверхностей даютъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ.

Обозначая черезъ k масштабъ, получимъ систему

$$e = k^2E, \quad f = k^2F, \quad g = k^2G.$$

Подставляя полученныя выраженія для e, f, g, получимъ

$$\left(k^2 - \frac{a^2}{Z^2}\right)E = \frac{a^2}{Z^4}\frac{\partial Z}{\partial u}\left[(X^2+Y^2+Z^2)\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial(X^2+Y^2+Z^2)}{\partial u}\right]. \quad (78)$$

$$\left(k^2 - \frac{a^2}{Z^2}\right)G = \frac{a^2}{Z^4}\frac{\partial Z}{\partial v}\left[(X^2+Y^2+Z^2)\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial(X^2+Y^2+Z^2)}{\partial v}\right]. \quad (79)$$

$$2\left(k^2 - \frac{a^2}{Z^2}\right)F = \frac{a^2}{Z^4}\frac{\partial Z}{\partial u}\left[(X^2+Y^2+Z^2)\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial(X^2+Y^2+Z^2)}{\partial v}\right] +$$

$$+ \frac{a^2}{Z^4}\frac{\partial Z}{\partial v}\left[(X^2+Y^2+Z^2)\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial(X^2+Y^2+Z^2)}{\partial u}\right]. \quad (80)$$

Умножая (78) на $\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2$, (79) на $\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2$, (80) на $-\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}$ и складывая, получимъ

$$\left(k^2 - \frac{a^2}{Z^2}\right)\left[E\left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} + G\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2\right] = 0.$$

Это уравненіе влечетъ, какъ слѣдствіе,

$$k^2 - \frac{a^2}{Z^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

ибо другой множитель даетъ уравненія

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}-\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}-\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}=0,$$

откуда

$$F_1(X,Z)=0,\quad F_2(Y,Z)=0,$$

чего быть не можетъ, ибо задана не кривая линія, а поверхность.

Итакъ, уравненіе (81) влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, одно изъ двухъ:

$$\frac{\partial Z}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial v}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(82)$$

$$\frac{\partial\left\{\frac{X^2+Y^2+Z^2}{Z}\right\}}{\partial u}=0,\quad \frac{\partial\left\{\frac{X^2+Y^2+Z^2}{Z}\right\}}{\partial v}=0\ \ldots\ldots(83)$$

Первое предположеніе (82) даетъ $Z=\text{const}$, тогда масштабъ постоянный и карта есть перспектива плоскости, параллельной этой картѣ.

Масштабъ $k=\frac{a}{Z}$ постоянный и карта сохраняетъ подобіе конечныхъ частей.

Второе предположеніе (83) даетъ такъ называемую *стереографическую* проекцію шара

$$X^2+Y^2+Z^2-bZ=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(84)$$

гдѣ b число постоянное. Уравненіе (84) показываетъ, что точка глаза лежитъ на самой поверхности шара.

52. Обратимся къ разсмотрѣнію перспективныхъ картъ, сохраняющихъ площади.

Пусть, подобно предыдущему параграфу, точка глаза находится въ началѣ координатъ, плоскость перспективы $Z=a$, изображаемая же поверхность

$$Z=f(X,Y).$$

Условіе сохраненія площадей даетъ дифференціальное уравненіе

$$Z-XP-YQ=\alpha^2 Z^3\sqrt{1+P^2+Q^2}\ \ldots\ldots\ldots(85)$$

гдѣ

$$P=\frac{\partial Z}{\partial X};\quad Q=\frac{\partial Z}{\partial Y}.$$

Итакъ, мы видимъ, что проектированіе при помощи перспективы искажаетъ, вообще говоря, площади; уравненіе (85) есть дифференціальное уравненіе тѣхъ поверхностей, которыя должны сохранять площади въ перспективѣ. Не трудно интегрировать уравненіе (85).

Лежандрова подстановка обращаетъ это уравненіе въ слѣдующее:

$$z = \alpha^2 \{z - xp - yq\}^3 \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Вводя полярныя координаты

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta,$$

получимъ

$$z = \alpha^2 \left[z - \rho \frac{\partial z}{\partial \rho}\right]^3 \sqrt{1 + \rho^2}$$

Отсюда, интегрируя, получимъ

$$-\frac{3}{2}\{\alpha z\}^{\frac{2}{3}} = \rho^{\frac{2}{3}} \int \rho^{-\frac{5}{3}} (1 + \rho^2)^{-\frac{1}{6}} d\rho + \varphi(\theta)\rho^{\frac{2}{3}},$$

гдѣ φ произвольная функція.

53. Изъ перспективныхъ изображеній поверхности на плоскости особеннаго вниманія заслуживаетъ случай изображенія плоскости не параллельной картѣ.

Легко показать, что перспектива двухъ плоскостей представляетъ собою самый общій случай однозначнаго, такъ называемаго гомографическаго соотвѣтствія, когда каждой прямой одной плоскости соотвѣтствуетъ опредѣленная прямая другой *).

54. При разсмотрѣніи перспективныхъ изображеній необходимо остановиться еще на случаѣ, когда точка глаза уходитъ въ безконечность.

Разсмотримъ сначала изображенія, представляющія прямоугольную проекцію.

Пусть плоскость проекціи совпадаетъ съ плоскостью xy, а направленіе проектированія параллельно оси z-овъ, тогда обозначая координаты точки на изображаемой поверхности черезъ X, Y, Z, а точки на картѣ x, y, получимъ

$$x = X, \quad y = Y.$$

---

*) Д. Граве. Курсъ аналитической геометріи 1893 г. Стр. 314. §§ 354—367.

Посмотримъ, когда будетъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ. Условія будутъ имѣть видъ:

$$(1-k^2)\,[X_u'^2+Y_u'^2]=k^2 Z_u'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (86)$$

$$(1-k^2)\,[X_u' X_v'+Y_u' Y_v']=k^2 Z_u' Z_v' \ldots\ldots\ldots (87)$$

$$(1-k^2)\,[X_v'^2+Y_v'^2]=k^2 Z_v'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (88)$$

Умножая (86) на $Z_v'^2$, (87) на $-Z_u' Z_v'$, (88) на $Z_u'^2$ и складывая, получимъ

$$(1-k^2)\,[(X_u' Z_v'-X_v' Z_u')^2+(Y_u' Z_v'-Z_u' Y_v')^2]=0.$$

Получается плоскость параллельная картѣ.

Посмотримъ, когда ортогонально проектированныя карты сохраняютъ площади.

Необходимо, чтобы проектируемая поверхность имѣла во всѣхъ точкахъ нормаль, составляющую съ осью z-овъ постоянный уголъ.

Искомая поверхность опредѣляется уравненіемъ

$$p^2+q^2=k^2,$$

которое интегрируется на основаніи самыхъ элементарныхъ соображеній. Получается, очевидно, развертывающаяся поверхность.

55. Обращаясь къ случаю косоугольной проекціи, мы замѣтимъ, что если будемъ проектировать заданную поверхность на плоскость $x\,y$ не параллельно оси z-овъ, то, обозначая координаты точки на изображаемой поверхности черезъ X, Y, Z, получимъ уравненія карты въ видѣ:

$$x=X+lZ, \quad y=Y+mZ,$$

гдѣ l и m числа постоянныя.

Разсуждая аналогично съ тѣмъ, какъ это мы дѣлали для прямоугольной проекціи, мы покажемъ, что подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ даетъ косоугольная проекція только для плоскости параллельной картѣ.

Сохраненіе площадей даетъ уравненіе

$$1+lp+mq=k^2\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Получается, очевидно, поверхность, развертывающаяся на плоскость.

56. Обратимся теперь къ проекціямъ съ развертываніемъ.

Изображенія эти образуются такъ.

Указывается въ пространствѣ нѣкоторая развертывающаяся поверхность.

Обыкновенно берутся поверхности простѣйшія, напр., прямой круговой цилиндръ или конусъ.

При помощи опредѣленнаго геометрическаго построенія точкамъ заданной изображаемой поверхности сопоставляются точки на вспомогательной развертывающейся, такъ что на развертывающейся поверхности получается нѣкоторое изображеніе или карта изображаемой поверхности. Стоитъ только развернуть на плоскость вспомогательную поверхность, чтобы получить плоскую карту.

Уравненія развертывающейся поверхности могутъ быть написаны въ такомъ видѣ:

$$x = au + \alpha, \quad y = bu + \beta, \quad z = cu + \gamma,$$

гдѣ a, b, c, α, β, γ суть функціи отъ одного v, удовлетворяющія слѣдующему условію:

$$\frac{a'}{\alpha'} = \frac{b'}{\beta'} = \frac{c'}{\gamma'} = \frac{1}{\rho}.$$

Здѣсь черезъ ρ обозначена общая величина отношеній. Имѣемъ право предположить, что

$$a = \cos\lambda\cos\mu, \quad b = \cos\lambda\sin\mu, \quad c = \sin\lambda,$$

такъ что

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$a a' + b b' + c c' = \frac{1}{\rho}(a\alpha' + b\beta' + c\gamma') = 0.$$

Линейный элементъ имѣетъ коэффиціенты

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = (u + \rho)^2(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

Обозначая

$$\int \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}\, dv = \int \sqrt{\mu'^2\cos^2\lambda + \lambda'^2}\, dv = A,$$

получимъ самыя общія формулы для изображенія заданной поверхности въ развернутомъ видѣ

$$x = \alpha_1 \cos\varphi - \beta_1 \sin\varphi$$

$$y = \alpha_1 \sin\varphi + \beta_1 \cos\varphi,$$

гдѣ

$$\alpha_1 = u\cos A - \int \rho \sin A dA$$

$$\beta_1 = u\sin A + \int \rho \cos A dA;$$

уголъ φ — постоянный.

Остается сопоставить точки вспомогательной развертывающейся поверхности съ точками изображаемой.

Во многихъ употребляемыхъ на практикѣ проекціяхъ наиболѣе употребительнымъ способомъ соотвѣтствія точекъ на изображаемой и развертывающейся поверхностяхъ является перспектива съ постоянной или перемѣнной точкой глаза.

Обратимъ наше вниманіе на простѣйшіе и наиболѣе замѣчательные случаи подобныхъ перспективныхъ изображеній съ развертываніемъ.

Разсмотримъ изображенія, получаемыя при помощи перспективы съ постоянной точкой глаза. Расположивъ эту точку въ началѣ координатъ, получимъ два уравненія

$$\frac{au+\alpha}{X} = \frac{bu+\beta}{Y} = \frac{cu+\gamma}{Z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

гдѣ X, Y, Z суть заданныя функціи отъ u_1, v_1 криволинейныхъ координатъ на заданной поверхности.

Рѣшая послѣднія уравненія (89) относительно u, v, выразимъ эти послѣднія въ функціяхъ отъ u_1, v_1.

При разсмотрѣніи перспективныхъ картъ съ постоянной точкой глаза, будемъ всегда эту точку помѣщать въ началѣ прямоугольной системы координатъ.

57. Обратимся къ проекціямъ цилиндрическимъ. Пусть будетъ вспомогательная развертывающаяся поверхность прямой круговой цилиндръ, ось котораго совпадаетъ съ осью z-овъ.

Получаемъ

$$a = b = 0, \quad c = 1, \quad \alpha = \rho\cos v, \quad \beta = \rho \sin v, \quad \gamma = 0.$$

Уравненія цилиндра имѣютъ видъ:

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z = u,$$

гдѣ ρ радіусъ основанія цилиндра.

Развернувъ цилиндръ, получимъ карты, опредѣляемыя уравненіями

$$x = \rho v, \quad y = u.$$

Уравненія (89) для нашего случая имѣютъ видъ:

$$\frac{\rho \cos v}{X} = \frac{\rho \sin v}{Y} = \frac{u}{Z},$$

гдѣ X, Y, Z координаты точки на изображаемой поверхности. Отсюда

$$x = \rho \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \quad y = \rho \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Чтобы не вводить лишнихъ обозначеній, пусть при дальнѣйшемъ разсмотрѣніи проекцій (90) буквы u и v обозначаютъ криволинейныя координаты изображаемой поверхности, въ видѣ заданныхъ функцій которыхъ выражены буквы X, Y, Z.

58. Найдемъ всѣ карты вида (90) съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ.

Обозначая

$$E = X'^2_u + Y'^2_u + Z'^2_u, \quad F = X'_u X'_v + Y'_u Y'_v + Z'_u Z'_v,$$
$$G = X'^2_v + Y'^2_v + Z'^2_v,$$

мы получимъ для подобья въ безконечно малыхъ частяхъ условія

$$\lambda^2 E (X^2 + Y^2)^3 = C_u^2 (X^2 + Y^2) + (YA_u - XB_u)^2$$

$$\lambda^2 F (X^2 + Y^2)^3 = C_u C_v (X^2 + Y^2) + (YA_u - XB_u)(YA_v - XB_v)$$

$$\lambda^2 G (X^2 + Y^2)^3 = C_v^2 (X^2 + Y^2) + (YA_v - XB_v)^2,$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{k}{\rho}, \quad k \text{ — масштабъ карты, а}$$

$$A_u = YZ'_u - ZY'_u, \quad B_u = ZX'_u - XZ'_u, \quad C_u = XY'_u - YX'_u,$$
$$A_v = YZ'_v - ZY'_v, \quad B_v = ZX'_v - XZ'_v, \quad C_v = XY'_v - YX'_v.$$

Обозначая $X^2+Y^2=R^2$, не трудно привести послѣднія уравненія къ слѣдующему виду:

$$ER^2(\lambda^2 R^2-1)=R'_u[(Z^2-R^2)R'_u-2RZZ'_u]\ldots\ldots(91)$$

$$2FR^2(\lambda^2 R^2-1)=R'_u[(Z^2-R^2)R'_v-2RZZ'_v]+$$
$$+R'_v[(Z^2-R^2)R'_u-2RZZ'_u]\ldots\ldots(92)$$

$$GR^2(\lambda^2 R^2-1)=R'_v[(Z^2-R^2)R'_v-2RZZ'_v]\ldots\ldots(93)$$

Умножая уравненіе (91) на R'^2_v, (92) на $-R'_u R'_v$, а (93) на R'^2_u и складывая, получимъ

$$R^2(\lambda^2 R^2-1)[ER'^2_v-2FR'_uR'_v+GR'^2_u]=0.$$

Это уравненіе влечетъ, какъ слѣдствіе,

$$\lambda^2 R^2-1=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(94)$$

откуда получимъ масштабъ карты.

Принимая во вниманіе (94), получимъ одно изъ двухъ:

$$R'_u=0,\quad R'_v=0,$$

$$(Z^2-R^2)R'_u-2ZRZ'_u=0$$

$$(Z^2-R^2)R'_v-2ZRZ'_v=0.$$

Первое предположеніе даетъ $R=\text{const}$ и изображаемая поверхность есть цилиндръ соосный со вспомогательнымъ.

Второе предположеніе даетъ поверхность

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2=A^2(X^2+Y^2).$$

Эта поверхность получается отъ вращенія круга вокругъ одной изъ его касательныхъ.

59. Для поверхности, дающей карту съ сохраненіемъ площадей, получаемъ дифференціальное уравненіе

$$z-px-qy=k^2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+p^2+q^2},$$

если будемъ считать x и y независимыми перемѣнными. Случай цилиндра, параллельнаго оси z-овъ, долженъ быть трактованъ отдѣльно.

Производя Лежандрову подстановку, получаемъ

$$z = k^2 (p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Вводя новыя перемѣнныя независимыя

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

получимъ

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{k^{-\frac{4}{3}} z^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{1 + \rho^2}}.$$

Интегрируя по методѣ Лагранжа, получимъ

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\alpha} \sqrt{\frac{k^{-\frac{4}{3}} \alpha^2}{\sqrt[3]{1 + \rho^2}} - \frac{1}{\rho^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\alpha},$$

гдѣ α произвольная постоянная величина.

Отсюда полный интегралъ будетъ имѣть видъ:

$$\theta + \int \sqrt{\frac{k^{-\frac{4}{3}} \alpha^2}{\sqrt[3]{1 + \rho^2}} - \frac{1}{\rho^2}}\, d\rho = \frac{3}{2} \alpha z^{\frac{2}{3}} + \beta.$$

Обращаясь къ случаю цилиндра, предположимъ X, Y функціями отъ одного v, а Z функціею отъ одного u, тогда условіе сохраненія площадей будетъ имѣть видъ:

$$\frac{(XY'_v - YX'_v)^2}{R^6} = \alpha^2 (X'^2_v + Y'^2_v).$$

Вводя новыя функціи R и Q при помощи уравненій

$$X = R \cos Q,$$

$$Y = R \sin Q,$$

получаемъ

$$\frac{Q'^2}{R^2} = \alpha^2 (R'^2 + R^2 Q'^2).$$

Отсюда

$$Q'^2\left\{\frac{1}{R^2}-\alpha^2 R^2\right\}=\alpha^2 R'^2.$$

Этому уравненію можно удовлетворить двоякимъ образомъ: 1) полагая $1-\alpha^2 R^4=0$, что даетъ цилиндръ круговой соосный со вспомогательнымъ; 2) раздѣляя обѣ части на $\frac{1}{R^2}-\alpha^2 R^2$ и интегрируя, получимъ

$$\alpha(X^2+Y^2)^2=2XY\cos\beta+(X^2-Y^2)\sin\beta;$$

получается цилиндръ, основаніемъ котораго служитъ лемниската Бернулли.

60. Обращаемся къ перспективнымъ эпиконическимъ изображеніямъ.

Возьмемъ сначала точку глаза на безконечности. Расположивъ ось z-овъ параллельно направленію проектированія, возьмемъ её за ось вспомогательнаго конуса, вершина котораго пусть будетъ въ точкѣ $z=b$.

Уравненія конуса можно будетъ написать такъ:

$$x=\sqrt{1-a^2}\cos vu,$$

$$y=\sqrt{1-a^2}\sin vu,$$

$$z=au+b,$$

гдѣ $a=\cos\varphi$ (уголъ φ при вершинѣ конуса).

Обозначая черезъ X, Y, Z координаты точки на изображаемой поверхности, получимъ для опредѣленія карты въ развернутомъ видѣ уравненія

$$x=U\cos V,\quad y=U\sin V,$$

гдѣ

$$U=\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\sqrt{1-a^2}},\quad V=\sqrt{1-a^2}\operatorname{arctg}\frac{Y}{X}.$$

61. Покажемъ, когда эти проекціи сохраняютъ подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ.

$$e=U'^2_u+U^2V'^2_u,\quad f=U'_uU'_v+U^2V'_uV'_v,\quad g=U'^2_v+U^2V'^2_v,$$

но

$$U'_u=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{XX'_u+YY'_u}{\sqrt{X^2+Y^2}},\qquad U'_v=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{XX'_v+YY'_v}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

$$V'_u=\sqrt{1-a^2}\frac{XY'_u-YX'_u}{X^2+Y^2},\quad V'_v=\sqrt{1-a^2}\frac{XY'_v-YX'_v}{X^2+Y^2}.$$

Уравненія

$$e = k^2 E, \quad f = k^2 F, \quad g = k^2 G$$

могутъ быть приведены къ виду:

$$E(1-a^2)(k^2-1) = a^2 R'^2_u - (1-a^2) Z'^2_u \ldots\ldots (95)$$

$$F(1-a^2)(k^2-1) = a^2 R'_u R'_v - (1-a^2) Z'_u Z'_v \ldots (96)$$

$$G(1-a^2)(k^2-1) = a^2 R'^2_v - (1-a^2) Z'^2_v \ldots\ldots (97)$$

Умножая уравненіе (95) на $R'_v Z'_v$, (96) на $-(R'_u Z'_v + R'_v Z'_u)$, (97) на $R'_u Z'_u$ и скадывая, получимъ

$$(k^2-1)(1-a^2)[ER'_v Z'_v - F(R'_u Z'_v + R'_v Z'_u) + GR'_u Z'_u] = 0.$$

Уравненіе это влечетъ, какъ слѣдствіе,

$$k^2 - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (98)$$

ибо уравненіе

$$ER'_v Z'_v - F(R'_u Z'_v + R'_v Z'_u) + GR'_u Z'_u = 0$$

можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(X'_u Y'_v - X'_v Y'_u)\left[Z'_u \left(\frac{Y}{X}\right)'_v - Z'_v \left(\frac{Y}{X}\right)'_u\right] = 0.$$

Равенство нулю перваго множителя даетъ

$$f(X, Y) = 0,$$

т. е. заданная поверхность цилиндръ съ образующими, параллельными направленію проектированія. Подобный цилиндръ на картѣ изобразится нѣкоторою линіею и не даетъ изображенія.

Равенство нулю другого множителя даетъ коноиды:

$$Z = f\left(\frac{Y}{X}\right);$$

нетрудно замѣтить, что и коноиды не могутъ дать изображенія съ подобіемъ въ безконечно-малыхъ частяхъ.

Итакъ, остается предположеніе (98), но тогда по уравненіямъ (95), (96), (97) получимъ

$$a R'_u \pm \sqrt{1-a^2}\, Z'_u = 0$$

$$a R'_v \pm \sqrt{1-a^2}\, Z'_v = 0.$$

Въ обоихъ уравненіяхъ нужно брать одинъ и тотъ же знакъ у корня. Получаемъ, интегрируя,

$$R = \mp \sqrt{1-a^2}\, Z + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (99)$$

гдѣ c величина постоянная.

Изображаемая поверхность обращается въ конусъ гомотетическій съ даннымъ.

Для сохраненія площадей, какъ и слѣдовало ожидать, получается уравненіе

$$p^2 + q^2 = \text{const}.$$

Косое проектированіе на конусъ обыкновенно не разсматривается.

62. Разсмотримъ теперь эпиконическую перспективу съ точкою глаза въ началѣ координатъ.

Карты опредѣляются уравненіями

$$x = U \cos V, \quad y = U \sin V,$$

гдѣ

$$V = \sqrt{1-a^2} \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \quad U = \frac{b\sqrt{X^2+Y^2}}{Z\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{X^2+Y^2}}.$$

Возьмемъ X и Y за криволинейныя координаты на поверхности и обозначимъ

$$Z'_X = p, \quad Z'_Y = q,$$

тогда получимъ, составляя выраженія e, f, g,

$$\frac{e M^4 R^2}{b^2 (1-a^2)} = (pR^2 - ZX)^2 + M^2 Y^2 \ldots\ldots\ldots (100)$$

$$\frac{f M^4 R^2}{b^2 (1-a^2)} = (pR^2 - ZX)(qR^2 - ZY) - M^2 XY \ldots (101)$$

$$\frac{g M^4 R^2}{b^2 (1-a^2)} = (qR^2 - ZY)^2 + M^2 X^2 \ldots\ldots\ldots (102)$$

гдѣ

$$R = \sqrt{X^2+Y^2}, \quad M = Z\sqrt{1-a^2} + aR.$$

63. Обратимся къ проекціямъ, сохраняющимъ подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ.

Обозначая масштабъ карты черезъ k и обозначая

$$\frac{k^2 M^4 R^2}{b^2(1-a^2)}=\xi^2,$$

получимъ уравненія для подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ

$$(\xi^2-R^4)\left[p+\frac{R^2 ZX}{\xi^2-R^4}\right]^2=Z^2X^2+M^2Y^2-\xi^2+\frac{R^4Z^2X^2}{\xi^2-R^4}\ldots(100')$$

$$(\xi^2-R^4)\left[p+\frac{R^2 ZX}{\xi^2-R^4}\right]\left[q+\frac{R^2 ZY}{\xi^2-R^4}\right]=Z^2XY-M^2XY+\frac{R^4XYZ^2}{\xi^2-R^4}.(101')$$

$$(\xi^2-R^4)\left[q+\frac{R^2 ZY}{\xi^2-R^4}\right]^2=Z^2Y^2+M^2X^2-\xi^2+\frac{R^4Z^2Y^2}{\xi^2-R^4}\ldots(102'$$

Исключая p и q, послѣ всѣхъ приведеній, получимъ

$$(\xi^2-M^2R^2)(\xi^2-R^2\mathfrak{M}_0^2)=0,$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_0^2=R^2+Z^2=X^2+Y^2+Z^2.$$

Уравненіе

$$\xi^2-R^2\mathfrak{M}_0^2=0,$$

какъ легко видѣть, не даетъ дѣйствительныхъ картъ

Остается $\xi^2=M^2R^2$, откуда

$$k=\sqrt{1-a^2}\,\frac{b}{Z\sqrt{1-a^2}+aR}.$$

Подставляя полученное выраженіе для ξ въ уравненія (100′) (101′), (102′), получимъ

$$p=X\frac{-RZ\pm M\mathfrak{M}}{R(M^2-R^2)}$$

$$q=Y\frac{-RZ\pm M\mathfrak{M}}{R(M^2-R^2)},$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}=Za-R\sqrt{1-a^2}.$$

Знаки надо выбирать одновременно, или верхніе, или нижніе; отсюда

$$dZ=pdX+qdY=RdR\frac{-RZ\pm M\mathfrak{M}}{R(M^2-R^2)}.$$

Получается дифференціальное уравненіе между Z и R, черезъ интегрированіе котораго получаемъ меридіанъ поверхности вращенія около оси z-овъ, изображаемой съ подобіемъ въ безконечно-малыхъ частяхъ при помощи нашей эпиконической перспективы.

Интегрируя уравненіе

$$dZ(M^2 - R^2) = dR(-RZ \pm M\mathfrak{M}),$$

получаемъ, при нижнемъ знакѣ, конусъ параллельный съ заданнымъ, ибо выходитъ

$$dM = 0,$$

откуда

$$M = \text{const}.$$

При верхнемъ знакѣ получаемъ

$$(M^2 - R^2)dZ + (RZ - M\mathfrak{M})dR = 0.$$

Это уравненіе можно переписать такъ:

$$(MZ + \mathfrak{M}R)dZ + (MR - \mathfrak{M}Z)dR = 0 \ldots\ldots (103)$$

Дифференцируя, получаемъ

$$dM = \sqrt{1 - a^2}\, dZ + a dR.$$

Замѣняя a и $\sqrt{1 - a^2}$ ихъ выраженіями черезъ $\mathfrak{M}$ и M, получимъ

$$dM = \frac{MZ - \mathfrak{M}R}{Z^2 + R^2} dZ + \frac{MR + \mathfrak{M}Z}{Z^2 + R^2} dR;$$

принимая же во вниманіе уравненіе (103), получаемъ

$$dM = \frac{2MZ\,dZ + 2MR\,dR}{Z^2 + R^2}.$$

Это уравненіе интегрируется непосредственно и мы получаемъ

$$Z^2 + R^2 = cM.$$

Итакъ мы видимъ, что меридіанъ искомой поверхности вращенія есть кругъ, проходящій черезъ начало координатъ и имѣющій въ этомъ началѣ касательную, параллельную заданному конусу.

Разобранный уже нами въ параграфѣ 53 случай картъ эпицилиндрическихъ можетъ быть разсматриваемъ какъ предѣльный для только что разобраннаго, когда касательная къ кругу совпадаетъ съ осью y-овъ.

64. Найдемъ эпиконическія перспективы, сохраняющія площади.

Дифференціальное уравненіе поверхности, изображаемой желаемымъ образомъ, имѣетъ видъ:

$$z - xp - yq = \frac{M^3 k^2}{b^2(1-a^2)} \sqrt{1+p^2+q^2},$$

гдѣ

$$M = z\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{x^2+y^2}.$$

Найдемъ удовлетворяющую этому уравненію поверхность вращенія.

Замѣняя z на y, $\sqrt{x^2+y^2}$ на x, получимъ для опредѣленія меридіана искомой поверхности вращенія дифференціальное уравненіе

$$y - xy' = m^2(y - \alpha x)^3 \sqrt{1+y'^2},$$

гдѣ

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad m^2 = \frac{k^2}{b^2}\sqrt{1-a^2}, \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Послѣднее уравненіе очень просто интегрируется; при $\alpha = 0$, получается случай § 52.

65. Обращаемся теперь къ картамъ эпицилиндрическимъ съ развертываніемъ перспективнымъ съ перемѣнною точкою глаза.

Изъ проекцій такого рода употребляются такія, въ которыхъ точка глаза описываетъ окружность, концентрическую съ основаніемъ цилиндра и лежащую въ плоскости этого основанія, причемъ лучъ зрѣнія всегда проходитъ черезъ ось цилиндра.

Обозначая черезъ X, Y, Z координаты точки на изображаемой поверхности, мы получимъ слѣдующія формулы, выражающія разсматриваемую проекцію

$$x = \rho \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \quad y = \frac{(\rho + a)Z}{R + a},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

ρ—радіусъ вспомогательнаго цилиндра, a—радіусъ круга, описываемаго точкою глаза.

66. Ограничимся болѣе простымъ случаемъ, когда точка глаза лежитъ на безконечности; тогда $a = \infty$ и уравненія, выражающія проекцію, имѣютъ видъ:

$$x = \rho \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}, \quad y = Z.$$

Разсмотримъ, какія изъ этихъ картъ сохраняютъ подобіе безконечно-малыхъ частей.

$$R^2 e = \rho^2 E + Z'^2_u (R^2 - \rho^2) - \rho^2 R'^2_u$$

$$R^2 f = \rho^2 F + Z'_u Z'_v (R^2 - \rho^2) - \rho^2 R'_u R'_v$$

$$R^2 g = \rho^2 G + Z'^2_v (R^2 - \rho^2) - \rho^2 R'^2_v.$$

Для подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ придется удовлетворить системѣ

$$E(k^2 R^2 - \rho^2) = Z'^2_u (R^2 - \rho^2) - \rho^2 R'^2_u$$

$$F(k^2 R^2 - \rho^2) = Z'_u Z'_v (R^2 - \rho^2) - \rho^2 R'_u R'_v$$

$$G(k^2 R^2 - \rho^2) = Z'^2_v (R^2 - \rho^2) - \rho^2 R'^2_v.$$

Отсюда

$$(EG - F^2)(k^2 R^2 - \rho^2)^2 = \rho^2 (\rho^2 - R^2)(Z'_u R'_v - Z'_v R'_u)^2 . \quad (104)$$

$$\{ER'^2_v - 2FR'_u R'_v + GR'^2_u\}(k^2 R^2 - \rho^2) =$$
$$= (R^2 - \rho^2)(Z'_u R'_v - Z'_v R'_u)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (105)$$

$$\{EZ'^2_v - 2FZ'_u Z'_v + GZ'^2_u\}(k^2 R^2 - \rho^2) =$$
$$= -\rho^2 (Z'_u R'_v - Z'_v R'_u)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

Перемножая уравненія (105) и (106), и вычитая (104), умноженное на $(Z'_u R'_v - Z'_v R'_u)^2$, получимъ

$$(k^2 R^2 - \rho^2)\{ER'_v Z'_v - F(Z'_u R'_v + R'_u Z'_v) + GR'_u Z'_u\}^2 = 0;$$

послѣднее уравненіе можно переписать такъ:

$$(k^2 R^2 - \rho^2)(X'_v Y'_u - X'_u Y'_v)[Z'_v (XY'_u - X'_u Y) -$$
$$- Z'_u (XY'_v - X'_v Y)]^2 = 0$$

Это уравненіе даетъ одно изъ трехъ:

$$1)\ k^2 R^2 - \rho^2 = 0,$$

$$2)\ Y = \text{fonct}(X),$$

$$3)\ Z = \text{fonct}\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Послѣднее уравненіе даетъ коноиды, которые проектируются по линіи и, слѣдовательно, проекцій не даютъ.

Второе предположеніе даетъ

$$EG - F^2 = EZ'^2_u - 2FZ'_u Z'_v + GZ'^2_v,$$

отсюда $k = 1$.

Далѣе получаемъ

$$(X'^2_u + Y'^2_u)(R^2 - \rho^2) = -\rho^2 R'^2_u$$

$$(X'_u X'_v + Y'_u Y'_v)(R^2 - \rho^2) = -\rho^2 R'_u R'_v$$

$$(X'^2_v + Y'^2_v)(R^2 - \rho^2) = -\rho^2 R'^2_v.$$

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, или полагая $R = \rho$, или же подставляя

$$\operatorname{arctg} \frac{Y}{X} = Q,$$

тогда получаемъ

$$X'^2_u + Y'^2_u = R'^2_u + R^2 Q'^2_u$$

$$X'_u X'_v + Y'_u Y'_v = R'_u R'_v + R^2 Q'_u Q'_v$$

$$X'^2_v + Y'^2_v = R'^2_v + R^2 Q'^2_v$$

отсюда окончательно

$$\frac{dR}{\sqrt{\rho^2 - R^2}} = dQ.$$

Интегрируя, получаемъ

$$X^2 + Y^2 = \rho\left(Y\sqrt{1 - c^2} + Xc\right),$$

гдѣ c произвольная постоянная.

Получается цилиндръ, построенный на половинномъ радіусѣ, что очевидно изъ геометрическихъ соображеній.

Обращаемся теперь къ третьему случаю $k^2 R^2 - \rho^2 = 0$, тогда получимъ, или $R = \rho$, или же

$$Z = \text{fonct}(R),$$

т. е. поверхность вращенія.

Для опредѣленія меридіана получимъ уравненіе

$$Z = \int \frac{\rho\, dR}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = c + \rho \lg \frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}.$$

Полагая $c = 0$, получимъ

$$R = \rho\, \frac{e^{\frac{Z}{\rho}} + e^{-\frac{Z}{\rho}}}{2}.$$

Получается поверхность, образованная вращеніемъ цѣпной линіи около оси.

67. Поищемъ теперь картъ разсматриваемаго рода, сохраняющихъ площади.

Уравненіе, которымъ эти карты опредѣляются

$$k^2 (EG - F^2) = eg - f^2$$

можетъ давать цилиндрическую поверхность

$$X^2 + Y^2 = \frac{\rho}{k^2} \left(Y \sqrt{1 - c^2} + Xc \right).$$

Если же X и Y будемъ считать перемѣнными независимыми, то приходимъ къ уравненію

$$\rho (xp + yq) - k^2 (x^2 + y^2) \sqrt{1 + p^2 + q^2} = 0.$$

Обозначая $\frac{k^2}{\rho} = \varepsilon$, введемъ полярныя координаты

$$x = \gamma \cos \theta, \quad y = \gamma \sin \theta,$$

тогда уравненіе обращается въ слѣдующее:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial z}{\partial \gamma} = \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2}.$$

Въ этомъ уравненіи, очевидно, перемѣнныя отдѣляются и мы получаемъ, полагая

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \alpha,$$

слѣдующее выраженіе

$$z = \alpha\theta + \mathrm{fonct}(\gamma)$$

или окончательно

$$z = \alpha\theta + \varepsilon\int\sqrt{\frac{\gamma^2+\alpha^2}{1-\varepsilon^2\gamma^2}}\,d\gamma + \beta.$$

Получается извѣстная винтовая поверхность, выражаемая въ эллиптическихъ функціяхъ; при $\alpha = 0$ получаемъ шаръ

$$x^2 + y^2 + (z-\beta)^2 = \frac{p^2}{k^4}.$$

Послѣдній случай даетъ извѣстное эпицилиндрическое изображеніе шара.

68. Обращаемся теперь къ эпиконическимъ перспективамъ съ перемѣнной точкою глаза. Ограничимся, какъ и въ случаѣ эпицилиндрическихъ проекцій, положеніемъ точки глаза на кругѣ, лежащемъ въ плоскости перпендикулярной оси круговаго конуса, черезъ развертываніе котораго получаются карты. Центръ этого круга лежитъ на оси конуса и лучъ зрѣнія проходитъ черезъ ось z-овъ.

Не трудно убѣдиться, что такія проекціи опредѣляются уравненіями

$$x = U\cos V, \quad y = U\sin V,$$

гдѣ

$$V = \sin\varphi \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}, \quad U = \frac{b\left[\sqrt{X^2+Y^2}+a\right] - aZ}{Z\sin\varphi - \cos\varphi\left[\sqrt{X^2+Y^2}+a\right]}.$$

Остановимся на случаѣ

$$a = \infty$$

то есть, когда точка глаза безконечно удалена; получаемъ тогда формулу

$$U = \frac{Z-b}{\cos\varphi}.$$

Составляя выраженія e, f, g, можемъ найти тѣ изъ этихъ проекцій, которыя сохраняютъ подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ, при помощи уравненій

$$e = k^2E, \quad f = k^2F, \quad g = k^2G.$$

Раскрывая, получимъ

$$E\left[k^2-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]=$$

$$=Z'^2_u\left[\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]-R'^2_u\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\ldots(107)$$

$$F\left[k^2-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]=$$

$$=Z'_uZ'_v\left[\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]-R'_uR'_v\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2.(108)$$

$$G\left[k^2-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]=$$

$$=\left[\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]Z'^2_v-R'^2_v\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\ldots(109)$$

Умножая уравненіе (107) на $R'_vZ'_v$, (108) на $-(R'_uZ'_v+R'_vZ'_u)$ (109) на $R'_uZ'_u$ и складывая, получимъ

$$\left[k^2-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2\right]\{ER'_vZ'_v-F(R'_uZ'_v+R'_vZ'_u)+GR'_uZ'_u\}=0;$$

на основаніи соображеній, уже приведенныхъ, получаемъ

$$k^2=\operatorname{tg}^2\varphi\frac{(Z-b)^2}{R^2}.$$

Изъ уравненій (107), (108) и (109) получаемъ

$$\pm\sqrt{\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2}\,Z'_u+\operatorname{tg}\varphi\frac{Z-b}{R}R'_u=0\ldots(110)$$

$$\pm\sqrt{\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2}\,Z'_v+\operatorname{tg}\varphi\frac{Z-b}{R}R'_v=0\ldots(111)$$

причемъ знаки у корня въ двухъ уравненіяхъ должны быть одинаковые. Умножая первое уравненіе на du, а второе на dv и складывая, получаемъ дифференціальное уравненіе меридіана искомой поверхности вращенія, изображаемой съ сохраненіямъ подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ.

Это уравненіе имѣемъ видъ:

$$\sqrt{\sec^2\varphi-\operatorname{tg}^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2}\,dZ+\operatorname{tg}\varphi\frac{Z-b}{R}dR=0.$$

Интегрируя получаемъ

$$R = C\frac{\left\{1+\sqrt{1-\sin^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2(\sin\varphi-1)}}}{\left\{1-\sqrt{1-\sin^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2(1+\sin\varphi)}}\left\{\sin\varphi+\sqrt{1-\sin^2\varphi\left(\frac{Z-b}{R}\right)^2}\right\}^{-\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

69. Для картъ, сохраняющихъ площади, имѣемъ уравненіе

$$(z-b)(px+qy) = A(x^2+y^2)\sqrt{1+p^2+q^2},$$

гдѣ

$$A = \frac{2k^2}{\sin\varphi}\cos^2\varphi,$$

k коэффиціентъ пропорціональности площадей, а

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Принимая за независимыя перемѣнныя

$$z, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2},$$

а за ихъ искомую функцію

$$Q = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

получимъ послѣ простыхъ преобразованій уравненіе

$$(z^2 - A^2\rho^2)\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)^2 - A^2\rho^2\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2 = A^2.$$

Къ послѣднему же уравненію легко примѣняется теорема Лагранжа черезъ добавленіе уравненія

$$z\frac{\partial Q}{\partial z} + \rho\frac{\partial Q}{\partial \rho} = \alpha,$$

гдѣ α произвольная постоянная величина.

ГЛАВА II.

О проекціяхъ поверхности вращенія на плоскости, въ которыхъ меридіаны и параллели изображаются прямыми и кругами.

1. Настоящая глава посвящается рѣшенію ряда вопросовъ о нахожденіи всѣхъ способовъ изображенія поверхности вращенія на плоскости, опредѣляемыхъ однимъ или двумя дифференціальными уравненіями (см. гл. I), въ которыхъ меридіаны и параллели изображаются на картѣ линіями заданнаго вида.

Въ практическомъ отношеніи весьма важно имѣть проекціи, въ которыхъ сѣтки меридіановъ и параллелей состояли бы изъ линій простѣйшаго вида. Таковы карты, которыхъ сѣтки состоятъ изъ прямыхъ линій и круговъ.

Для кратности будемъ называть *прямолинейными* такія проекціи, у которыхъ обѣ системы (какъ меридіаны, такъ и параллели) состоятъ изъ прямыхъ линій; *смѣшанными*—проекціи, у которыхъ одна система прямолинейная, а другая состоитъ изъ круговъ; и наконецъ *круговыми*, если обѣ системы круги.

Въ первый разъ подобный вопросъ для случая картъ сохраняющихъ подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ былъ рѣшенъ Лагранжемъ *).

---

*) Lagrange. Sur la construction des cartes géographiques. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin, année 1779. Oeuvres Complétes. Tome quatrieme. page 637.

Въ своихъ двухъ мемуарахъ о построеніи географическихъ картъ знаменитый ученый выводитъ круговыя проекціи изъ общихъ формулъ, рѣшающихъ общую задачу о картахъ съ сохраненіемъ подобія, черезъ подборъ произвольныхъ функцій.

Подобный вопросъ былъ рѣшенъ А. Коркинымъ *) для эйлеровскихъ проекцій, причемъ путь рѣшенія автора аналогиченъ съ соображеніями Лагранжа.

Гораздо болѣе труднымъ является, поставленный имъ же вопросъ о нахожденіи всѣхъ прямолинейныхъ, смѣшанныхъ и круговыхъ проекцій, сохраняющихъ площади безъ перпендикулярности меридіановъ и параллелей, принятой въ проекціяхъ Эйлера.

Въ настоящей главѣ мы покажемъ прямой способъ нахожденія всѣхъ прямолинейныхъ, смѣшанныхъ и круговыхъ проекцій для главнѣйшихъ сортовъ картъ.

Сначала мы разсмотримъ задачу объ ортогональныхъ траекторіяхъ, изъ нея какъ частный случай получатся карты сохраняющія подобіе въ безконечно-малыхъ частяхъ, а также карты Эйлера. Затѣмъ мы разсмотримъ карты, сохраняющія площади.

2. Обращаемся къ разсмотрѣнію ортогональныхъ траекторій. Даны двѣ системы кривыхъ

$$f(x,y,v)=0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$F(x,y,u)=0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

Получаемыя отъ измѣненій v кривыя составляютъ одну систему и опредѣляются уравненіемъ (1).

Другую систему даетъ уравненіе (2).

Условіе ортогональности имѣетъ видъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}=0 \qquad \ldots\ldots(3)$$

Поставимъ себѣ задачею найти, какое ограниченіе накладываетъ уравненіе (3) на функціи f и F, если онѣ будутъ даннаго характера.

*) A. Korkine. Sur les cartes géographiques. Mathematische Annalen, B. XXXI. S. 589.

Уравненія (1) и (2) черезъ рѣшеніе относительно x и y даютъ

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Условіе ортогональности обращается въ такое:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Уравненіе (1) черезъ рѣшеніе относительно y обращается въ такое:

$$y = f(x, v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

отсюда

$$\frac{\partial y}{\partial u} = f'_x \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = f'_x \frac{\partial x}{\partial v} + f'_v.$$

Въ этой функціи f мы предполагаемъ x входящимъ явно, тогда какъ v можетъ входить подъ знакомъ неизвѣстныхъ функцій, подлежащихъ опредѣленію изъ дальнѣйшихъ разсужденій.

Подставляя въ уравненіе (5) и сокращая на $\frac{\partial x}{\partial u}$, получимъ

$$\frac{\partial x}{\partial v}(1 + f'^2_x) + f'_x f'_v = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Это послѣднее уравненіе позволяетъ выразить частныя производныя

$$\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial v^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

черезъ x и v.

Черезъ тѣ же буквы выразятся производныя

$$\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Будемъ эти производныя (8) и (9) обозначать для краткости знаками

$$x', x'', x''', \ldots \quad y', y'', y''', \ldots$$

Возьмемъ теперь уравненіе (2). Положимъ, что характеръ функціи F заданъ, т. е., другими словами, заданъ видъ функціи F относительно перемѣнныхъ x и y, тогда какъ u можетъ входить не явно, какъ аргументъ различныхъ функцій, служащихъ параметрами функціи F.

Дифференцируя приличное число разъ уравненіе (2) по v, можемъ исключить букву u, другими словами, получимъ дифференціальное уравненіе кривыхъ (2)

$$\Omega(x, y, x', y', x'', y'', \ldots) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто y, x', y', x'', y'', ихъ выраженія черезъ x и v, получимъ окончательное уравненіе

$$\Pi(x, v) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

въ которое x входитъ явно, а перемѣнная v не явно, то есть подъ знакомъ тѣхъ функцій и нѣкотораго числа ихъ производныхъ, которыя входятъ параметрами въ уравненіе (6).

Уравненіе (11) должно быть, очевидно, тождествомъ, ибо иначе оно опредѣлило бы x какъ функцію отъ одного v, а тогда отъ одного v зависилъ бы и y на основаніи уравненія (6), что невозможно.

Требованіе, чтобы уравненіе (11) было тождествомъ, достаточно ограничиваетъ, какъ мы увидимъ далѣе, искомыя функціи, ибо получается для опредѣленія ихъ рядъ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Удовлетворивъ самымъ общимъ образомъ тождеству (11), мы тѣмъ самымъ получимъ видъ функціи $\mathcal{F}(x, y)$ въ уравненіи (6). Для окончанія задачи придется интегрировать уравненіе (7), которое будетъ имѣть опредѣленный видъ, когда будутъ найдены всѣ параметры функціи $\mathcal{F}(x, v)$.

Необходимо помнить, что уравненіе (7) будетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе между двумя перемѣнными x и v, но послѣ интегрированія необходимо постоянную произвольную считать произвольною функціею отъ u.

Проинтегрировавъ уравненіе (7), мы получимъ самое общее выраженіе x черезъ u и v; подставляя полученное выраженіе x-са въ уравненіе (6) получимъ величину y, такъ что получатся искомыя функціи $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$.

3. Обратимся теперь къ нахожденію ортогональныхъ проекцій прямолинейныхъ, смѣшанныхъ и круговыхъ.

Обращаясь къ послѣднему вопросу, мы найдемъ проекціи прямолинейныя, слѣдуя шагъ за шагомъ изложенному общему способу, чтобы изъяснить на примѣрѣ изложенныя общія соображенія, хотя нахожденіе ортогональныхъ траекторій для случая прямыхъ и круговъ есть задача совершенно элементарная.

Итакъ, уравненіе (6) должно быть уравненіемъ прямыхъ:

$$y = ax + b.$$

гдѣ a и b нѣкоторыя искомыя функціи отъ v;

$$\phi(x, v) = ax + b, \quad \phi'_x = a, \quad \phi'_v = a'x + b',$$

гдѣ a' и b' суть производныя отъ искомыхъ функцій a и b по v. Уравненіе (7) обращается въ слѣдующее:

$$x'_v (1 + a^2) + a(a'x + b') = 0.$$

Обозначая x'_v просто черезъ x', получимъ

$$x' = mx + n \text{..................} (12)$$

гдѣ

$$m = -\frac{aa'}{1 + a^2}, \quad n = -\frac{ab'}{1 + a^2}.$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ

$$x'' = m'x + mx' + n' = Mx + N \text{..........} (13)$$

гдѣ

$$M = m' + m^2, \quad N = n' + mn.$$

Дифференціальное уравненіе (10) другой системы линій, если онѣ должны быть прямыми, будетъ

$$x'y'' - x''y' = 0 \text{.................} (14)$$

но

$$y' = ax' + a'x + b', \quad y'' = ax'' + 2a'x' + a''x + b''.$$

Подставляя въ уравненіе (14), получимъ

$$x''(a'x + b') - x'(a''x + b'' + 2a'x') = 0.$$

Подставляя въ послѣднее уравненіе вмѣсто x' и x'' ихъ выраженія (12) и (13), получимъ

$$(Mx + N)(a'x + b') - (mx + n)[a''x + b'' + 2a'(xm + n)] = 0.$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ видъ:

$$\mathfrak{M}_0 x^2 + \mathfrak{M}_1 x + \mathfrak{M}_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_0 = Ma' - m(a'' + 2a'm) = -\frac{a'^3}{(1+a^2)^2},$$

$$\mathfrak{M}_1 = Mb' + Na' - m(b'' + 2a'n) - n(a'' + 2a'n),$$

$$\mathfrak{M}_2 = Nb' - n(b'' + 2a'n).$$

Уравненіе (15) должно быть тождествомъ, а потому надо положить

$$\mathfrak{M}_0 = 0, \quad \mathfrak{M}_1 = 0, \quad \mathfrak{M}_2 = 0.$$

Уравненіе $\mathfrak{M}_0 = 0$ даетъ $a' = 0$, слѣдовательно, функція a обращается въ число постоянное, которое мы обозначимъ черезъ k; но тогда $m = 0$, $M = 0$, $N = n'$.

Уравненіе $\mathfrak{M}_1 = 0$ удовлетворяется само собою; уравненіе $\mathfrak{M}_2 = 0$ обращается въ такое

$$n'b' - nb'' = 0,$$

которое удовлетворяется при всякой функціи b, ибо

$$n = -\frac{k}{1+k^2}\, b'.$$

Уравненіе (7) обращается въ такое:

$$x' = -\frac{k}{1+k^2}\, b'.$$

Интегрируя по v, получимъ

$$x = -\frac{k}{1+k^2}(b - B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

гдѣ B совершенно произвольная функція отъ u.

Итакъ, линіи одной системы опредѣляются уравненіемъ

$$y = kx + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

гдѣ k число постоянное, а b совершенно произвольная функція отъ v.

Исключая изъ уравненія (17) функцію b при помощи уравненія (16), получимъ уравненіе другой системы

$$y = -\frac{1}{k}x + B \dots\dots\dots\dots\dots\dots (18)$$

гдѣ B совершенно произвольная функція отъ u.

Двѣ системы прямолинейныхъ траекторій, какъ это и очевидно, состоятъ изъ прямыхъ, параллельныхъ между собою, причемъ прямыя одной системы перпендикулярны къ прямымъ другой.

4. Очевидное по геометрическимъ соображеніямъ рѣшеніе изложенной задачи можетъ быть получено проще на основаніи слѣдующихъ элементарныхъ аналитическихъ соображеній.

Уравненія (1) и (2) въ случаѣ прямолинейной системы имѣютъ видъ:

$$ax + by + c = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (19)$$

$$Ax + By + C = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

гдѣ a, b, c суть функціи отъ перемѣнной независимой v, а A, B, C суть функціи отъ u.

Условіе перпендикулярности прямыхъ (19) и (20) напишется такъ:

$$aA + bB = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (21)$$

Этому уравненію можно удовлетворить или полагая $a=0$, $B=0$, оставляя другія функціи совершенно произвольными, или же

$$\frac{A}{B} = -\frac{b}{a} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (22)$$

Послѣднее уравненіе, будучи тождествомъ, даетъ

$$\frac{A}{B} = k, \quad -\frac{b}{a} = k,$$

гдѣ k число постоянное.

5. Обращаясь къ нахожденію смѣшанныхъ траекторій, мы не будемъ слѣдовать буквально изложенной въ началѣ общей теоріи, ибо проще поступать иначе.

Уравненія (1) и (2) въ данномъ случаѣ принимаютъ видъ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

$$y-Ax-B=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

гдѣ a, b, r суть функціи отъ одного v, а A и B отъ одного u.

Условіе ортогональности даетъ

$$b-Aa-B=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Разсматривая уравненіе (25), которое должно быть тождествомъ, мы замѣчаемъ, что нельзя число A считать постояннымъ, ибо тогда таково же должно быть и число B, слѣдовательно, дифференцируя но u, получимъ

$$-A'a-B'=0,$$

гдѣ A' не $=0$. Отсюда

$$a=-\frac{B'}{A'}=k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

гдѣ k нѣкоторое постоянное число.

Интегрируя получимъ

$$B=-Ak+l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

гдѣ l новая постоянная произвольная величина.

Подставляя полученное выраженіе для B въ уравненіе (25) и замѣчая, что на основаніи (26) $a=k$, получимъ

$$b-Ak+Ak-l=0,$$

откуда $b=l$; итакъ, круги (23) должны быть концентрическіе; ихъ уравненіе есть

$$(x-k)^2+(y-l)^2=r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

гдѣ r совершенно произвольная функція отъ v.

Складывая уравненія (24) и (27), получимъ другую систему

$$y-l=A(x-k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

гдѣ A совершенно произвольная функція отъ u.

Прямыя (29), слѣдовательно, какъ и слѣдовало ожидать, обращаются въ радіусы концентрическихъ круговъ (28).

6. Обращаясь къ круговымъ траекторіямъ, будемъ разсуждать аналогично.

Уравненія (1) и (2) въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \dots\dots\dots\dots (30)$$

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2 \dots\dots\dots\dots (31)$$

гдѣ a, b, r суть функціи отъ v, а A, B, R отъ u.

Условіе ортогональности напишется такъ:

$$(a-A)^2+(b-B)^2=R^2+r^2 \dots\dots\dots\dots (32)$$

Прежде всего замѣтимъ, что уравненіе (32) показываетъ, что ни одна изъ системъ круговъ не можетъ быть концентрическою.

Въ самомъ дѣлѣ, если, напримѣръ, a и b числа постоянныя, то и r должно быть числомъ постояннымъ, ибо изъ уравненія (32) выходитъ

$$r^2=(a-A)^2+(b-B)^2-R^2:$$

функція отъ одного v должна равняться функціи отъ одного u.

Дифференцируя уравненіе (32) по v, получимъ

$$a'(a-A)+b'(b-B)=rr'.$$

Дифференцируя еще разъ по u, получимъ

$$a'A'+b'B'=0.$$

Если a' не $=0$, то и B' не будетъ равно нулю; слѣдовательно,

$$\frac{b'}{a'}=-\frac{A'}{B'}=k,$$

гдѣ k число постоянное. Интегрируя получаемъ,

$$b=ak+l \dots\dots\dots\dots (33)$$

$$B=-\frac{1}{k}A+m \dots\dots\dots\dots (34)$$

Итакъ мы видимъ, что центры круговъ лежатъ на двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, опредѣляемыхъ уравненіями (33) и (34).

Возьмемъ эти прямыя за оси координатъ, тогда

$$a = 0, \quad B = 0.$$

Условіе перпендикулярности (32) обращается въ такое:

$$A^2 + b^2 = R^2 + r^2.$$

Отсюда

$$A^2 - R^2 = r^2 - b^2.$$

Функція отъ u равна функціи отъ v, слѣдовательно, обѣ функціи должны приводиться къ постоянной величинѣ.

Обозначая это постоянное черезъ n^2, получимъ

$$A^2 - n^2 = R^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

$$b^2 + n^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Итакъ, двѣ функціи A и b остаются совершенно произвольны. Послѣднія уравненія даютъ простой способъ проведенія окружностей, принадлежащихъ той или другой системѣ.

Изъ начала координатъ, какъ центра, радіусомъ (см. черт. 5) $OC = n$ описываемъ окружность $CC_1 D$, которая встрѣчаетъ ось x-овъ въ точкахъ C и C_1. Окружности одной системы имѣютъ центры на оси y-овъ и проходятъ черезъ точки C и C_1. Окружности же другой системы можно строить на основаніи слѣдующихъ геометрическихъ соображеній. Примемъ произвольную точку A оси x-овъ за центръ и опишемъ изъ нея радіусомъ AO полуокружность ODB, которая встрѣчаетъ ось x-овъ въ точкѣ B, а окружность CDC_1 въ точкѣ D. Точка B будетъ центромъ окружности, принадлежащей второй системѣ и имѣющей радіусъ равный BD.

7. Прямолинейныя, смѣшанныя и круговыя проекціи съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ получаются, очевидно, какъ частный случай ортогональныхъ траекторій черезъ подборъ остающихся произвольныхъ функцій. Такимъ путемъ мы приходимъ къ картамъ Лагранжа.

Разсмотримъ, въ самомъ дѣлѣ, проекціи прямолинейныя.

Пусть на картѣ меридіаны будутъ параллельны оси y-овъ, а параллели оси x-овъ.

Тогда будемъ имѣть

$$x = V, \quad y = U,$$

гдѣ V функція отъ одного v, а U функція отъ u.

Для сохраненія подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ необходимо, чтобы дифференціалы дугъ, соотвѣтствующіе въ каждой точкѣ меридіану и параллели, на изображаемой поверхности и на картѣ были пропорціональны, что даетъ для случая изображенія шара на плоскости

$$\frac{U' du}{V' dv} = \frac{du}{\cos u dv}.$$

Отсюда

$$U' \cos u = V' = k,$$

гдѣ k число постоянное. Интегрируя получимъ

$$V = kv + l$$

$$U = k \int \frac{du}{\cos u} + m = k \lg \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) + m.$$

Взявъ начало координатъ въ точкѣ $v = 0$, $u = 0$, получимъ $l = 0$, $m = 0$; карта опредѣляется уравненіями

$$x = kv, \quad y = k \lg \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right).$$

При $k = 1$ получаемъ Меркаторскую проекцію.

Если поверхность вращенія даетъ для линейнаго элемента выраженіе

$$ds^2 = du^2 + \omega^2 dv^2,$$

то мы получимъ слѣдующія формулы

$$x = kv + l, \quad y = k \int \frac{du}{\omega} + m.$$

8. Разсматривая проекціи смѣшанныя, надо отличать два случая: 1) меридіаны прямые, а параллели круги и 2) меридіаны круги, а параллели прямыя.

Въ первомъ случаѣ, уравненія (28) и (29), выведенныя при разсмотрѣніи ортогональныхъ траекторій, могутъ быть написаны такъ:

$$x - k = \cos \varphi r, \quad y - l = \sin \varphi r,$$

здѣсь r есть функція отъ одного u, а φ функція отъ v.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\varphi r', \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\sin\varphi r\varphi'$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin\varphi r', \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \cos\varphi r\varphi'.$$

Отсюда

$$e = r'^2, \quad f = 0, \quad g = r^2\varphi'^2.$$

Условіе подобія въ безконечно-малыхъ частяхъ выразится такъ:

$$\frac{r'^2}{1} = \frac{r^2\varphi'^2}{\omega^2} \text{ (см. гл. I).}$$

Отсюда

$$\frac{r'}{r}\omega = \pm\varphi' = \lambda,$$

гдѣ λ постоянная величина.

Интегрируя получаемъ

$$\varphi = \pm\lambda v + \mu, \quad r = e^{\lambda\int\frac{du}{\omega} + \nu}.$$

Въ случаѣ шара получаемъ $\omega = \cos u$, откуда

$$r = e^{\nu}\left[\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right]^{\lambda}.$$

Полученная проекція предложена **Ламбертомъ**, но извѣстна болѣе подъ названіемъ конической проекціи **Гаусса** *).

Когда $\lambda = 1$, получается полярная стереографическая проекція. Во второмъ случаѣ надо считать r функціею отъ v, а φ отъ u, тогда

$$e = r^2\varphi'^2, \quad f = 0, \quad g = r'^2$$

получимъ

$$\frac{r^2\varphi'^2}{1} = \frac{r'^2}{\omega^2};$$

отсюда

$$\varphi'\omega = \pm\frac{r'}{r} = \lambda,$$

гдѣ λ постоянная величина. Интегрируя получаемъ

$$r = e^{\pm\lambda v + \mu}, \quad \varphi = \lambda\int\frac{du}{\omega} + r.$$

---

*) C. F. Gauss. Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Эта проекція употреблена въ звѣздномъ атласѣ Гардинга, публикованномъ въ Гётингенѣ съ 1808 по 1822.

9. Обращаемся къ случаю проекцій круговыхъ.

На основаніи соображеній параграфа 6 получаемъ

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \sqrt{\rho^2 - n^2} + \rho \sin\varphi,$$

гдѣ ρ какъ радіусъ меридіана есть функція отъ одного v, а φ вспомогательный уголъ, который нужно считать функціею отъ двухъ аргументовъ u и v.

Дифференцируя послѣднія уравненія, получимъ

$$x'_u = -\rho \sin\varphi\varphi'_u, \quad x'_v = \rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi\varphi'_v \quad \ldots\ldots (37)$$

$$y'_u = \rho \cos\varphi\varphi'_u, \quad y'_v = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}} + \rho' \sin\varphi + \rho\cos\varphi\varphi'_v \quad \ldots (38)$$

Если наши координаты u и v картографическія, то должны удовлетворяться уравненія

$$x'_u x'_v + y'_u y'_v = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

$$x'^2_u + y'^2_u = x'^2_v + y'^2_v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

Подставляя выраженія (37) и (38) производныхъ въ уравненіе (39), получимъ

$$\varphi'_v = -\cos\varphi \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Изъ уравненія (40) получаемъ подобнымъ же образомъ

$$\varphi'_u = \pm\left\{\sin\varphi \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}} + \frac{\rho'}{\rho}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Дифференцируя уравненіе (42) и пользуясь уравненіемъ (41), получимъ

$$\varphi''_{uv} = \pm\left\{-\cos^2\varphi \frac{\rho'^2}{\rho^2 - n^2} + \sin\varphi\left(\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}}\right)' + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)'\right\} \quad \ldots (43)$$

Подобнымъ же образомъ, дифференцируя уравненіе (41) по u и пользуясь уравненіемъ (42), получимъ

$$\varphi''_{uv} = \pm \sin\varphi \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}}\left\{\sin\varphi \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}} + \frac{\rho'}{\rho}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

сравнивая выраженія (43) и (44), получимъ

$$\sin\varphi\left[\left(\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 - n^2}}\right)' - \frac{\rho'^2}{\rho\sqrt{\rho^2 - n^2}}\right] + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' - \frac{\rho'^2}{\rho^2 - n^2} = 0.$$

Этому уравненію возможно удовлетворить не иначе какъ полагая,

$$\left(\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2-n^2}}\right)'-\frac{\rho'^2}{\rho\sqrt{\rho^2-n^2}}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)'-\frac{\rho'^2}{\rho^2-n^2}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Эти два уравненія, какъ нетрудно видѣть, равносильны.

Интегрируя уравненіе (45), получимъ

$$\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2-n^2}}=\frac{k}{n}\rho,$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная величина.

Отсюда

$$\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-n^2}}=\frac{kv+l}{n}=\frac{\omega}{n}.$$

Вводя вмѣсто радіуса ρ ординату центра

$$b=\sqrt{\rho^2-n^2},$$

получимъ

$$\omega=\operatorname{arctg}\frac{b}{n},$$

откуда

$$\rho=\sqrt{b^2+n^2}=\frac{n}{\cos\omega}.$$

Найдемъ теперь уголъ φ и тогда задача будетъ окончена.

Принимая во вниманіе, что

$$\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2-n^2}}=\frac{k}{\cos\omega},\quad \frac{\rho'}{\rho}=k\operatorname{tg}\omega,$$

получаемъ изъ выраженія

$$d\varphi=\varphi'_u\,du+\varphi'_v\,dv$$

на основаніи (41) и (42) слѣдующее уравненіе

$$\cos\omega\, d\varphi=\pm k\,du(\sin\varphi+\sin\omega)-k\,dv\cos\varphi,$$

но $k\,dv=d\omega$, а, обозначая $\pm k\,du=d\Omega$, получимъ

$$\Omega=\int\frac{\cos\omega\, d\varphi+\cos\varphi\, d\omega}{\sin\omega+\sin\varphi}.$$

Условіе интегрируемости, очевидно, выполняется, ибо

$$\left[\frac{\cos\omega}{\sin\omega+\sin\varphi}\right]'_{\omega}=\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\omega+\sin\varphi}\right]'_{\varphi}=-\frac{1+\sin\varphi\sin\omega}{[\sin\omega+\sin\varphi]^2}.$$

Вводя новую перемѣнную

$$\xi=n\frac{\sin\omega\sin\varphi+1}{\cos\omega\cos\varphi}\dots\dots\dots\dots\dots(47)$$

получимъ

$$\frac{\cos\omega d\varphi+\cos\varphi d\omega}{\sin\omega+\sin\varphi}=\frac{nd\xi}{\xi^2-n^2},$$

такъ что

$$\Omega=\lg\sqrt{\frac{\xi-n}{\xi+n}}.$$

Отсюда

$$\xi=n\frac{1+e^{2\Omega}}{1-e^{2\Omega}}\dots\dots\dots\dots\dots(48)$$

Уравненіе (47) можетъ быть приведено къ виду

$$\cos\varphi\xi=b\sin\varphi+\rho\dots\dots\dots\dots\dots(49$$

Исключая изъ этого уравненія три величины φ, b, ρ при помощи уравненій

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=b+\rho\sin\varphi,$$

$$\rho^2=b^2+n^2,$$

получимъ слѣдующее уравненіе

$$x^2+y^2-2\xi x+n^2=0.$$

Сравнивая это уравненіе съ полученнымъ въ задачѣ о траекторіяхъ

$$(x-A)^2+y^2-R^2=0,$$

получимъ

$$A^2-n^2=R^2,\quad A=\xi.$$

Итакъ, абсцисса A центра параллели опредѣляется такъ:

$$A=n\frac{1+e^{\pm 2ku+l}}{1-e^{\pm 2ku+l}}$$

и, слѣдовательно, проекція опредѣлена вполнѣ.

Другой родъ изображеній получимъ, мѣняя ролями буквы u и v.

Выведенныя нами формулы согласуются вполнѣ съ формулами Лагранжа, полученными другимъ путемъ. Мы не будемъ подробно разсматривать полученныя проекціи, ибо это сдѣлано у Лагранжа. Укажемъ только, что при $k=\frac{1}{2}$ получается въ случаѣ изображенія шара на плоскости стереографическая проекція.

Итакъ, резюмируя сказанное о задачѣ Лагранжа, мы замѣчаемъ, что получается пять видовъ проекцій: одна прямолинейная, двѣ смѣшанныя и двѣ круговыя.

10. Обращаясь къ картамъ Эйлера, рѣшимъ такую задачу: найти всѣ проекціи Эйлера, меридіаны которыхъ прямыя.

Приличнымъ выборомъ перемѣнныхъ, какъ мы видѣли въ первой главѣ, карты Эйлера приводятся къ уравненіямъ

$$x'_u\, y'_v - x'_v\, y'_u = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

$$x'_u\, x'_v + y'_u\, y'_v = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Уравненіе меридіановъ можетъ быть написано такъ:

$$y = ax + b,$$

гдѣ a и b суть функціи отъ v.

Дифференцируя, получимъ

$$y'_u = ax'_u, \quad y'_v = a'x + b' + ax'_v \ldots\ldots\ldots (52)$$

Подставляя въ уравненіе (50), получимъ

$$(a'x + b')x'_u = 1,$$

интегрируя по u', получаемъ

$$a'x^2 + 2b'x + c = 2u \ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

гдѣ c новая функція отъ v, вводимая интегрированіемъ. Подставляя выраженія (52) въ уравненіе (51), получимъ

$$x'_v(1 + a^2) + a(a'x + b') = 0 \ldots\ldots\ldots (54)$$

Дифференцируя по v уравненіе (53), получимъ

$$a''x^2+2b''x+c'+2x'_v(a'x+b')=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(55)$$

исключая изъ уравненій (6) и (7) производную x'_v, получимъ

$$(a''x^2+2b''x+c')(1+a^2)-2a(a'x+b')^2=0\,.\,.\,.\,.\,(56)$$

Это послѣднее уравненіе (56) должно быть тождествомъ, а потому, приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x, получимъ три уравненія

$$a''(1+a^2)-2aa'^2=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(57)$$

$$(1+a^2)b''-2aa'b'=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(58)$$

$$(1+a^2)c'-2ab'^2=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(59)$$

Надо разсмотрѣть два случая: 1) $a'=0$ и 2) a' не $=0$.

1) $a'=0$.

Уравненіе (58) даетъ $b''=0$, отсюда $a=k$, $b'=l$, гдѣ k и l произвольныя постоянныя величины

$$b=lv+m.$$

Уравненіе меридіановъ принимаетъ видъ:

$$y=kx+lv+m\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(60)$$

Уравненіе (59) даетъ

$$c=\frac{2kl^2}{1+k^2}\,v+2n.$$

Уравненіе (53) обращается въ слѣдующее:

$$2lx+\frac{2kl^2}{1+k^2}\,v+2n=2u\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(61)$$

исключая v между уравненіями (60) и (61) получимъ, уравненіе параллелей

$$y=-\frac{1}{k}\,x+m+\frac{1+k^2}{lk}\,(u-n).$$

Итакъ, меридіаны въ полученной проекціи суть прямыя, параллельныя между собою, параллели же перпендикулярны къ меридіанамъ.

Формулы, выражающія проекцію, будутъ гораздо проще, если мы выберемъ оси координатъ параллельно линіямъ сѣтки, полагая въ уравненіяхъ (60) и (61) $k=0$

$$x=\frac{1}{l}(u-n),\quad y=lv+m.$$

При $l=1$ получается извѣстная цилиндрическая проекція Ламберта.

2) a' не $=0$.

Раздѣляя обѣ части уравненія (57) на $a'(1+a^2)$, получимъ

$$\frac{a''}{a'}=\frac{2aa'}{1+a^2}.$$

Интегрируя, получимъ $a'=2k(1+a^2)$, гдѣ k число постоянное. Интегрируя еще разъ, получимъ

$$a=\operatorname{tg}(2kv+l).$$

Интегрируя уравненіе (58), получимъ

$$b'=-2mk(1+a^2)=-\frac{2mk}{\cos^2(2kv+l)}.$$

Интегрируя еще разъ,

$$b=-m\operatorname{tg}(2kv+l)+n\ \ldots\ldots\ldots\ (62)$$

Отсюда уравненіе меридіановъ имѣетъ видъ:

$$y=\operatorname{tg}(2kv+l)(x-m)+n\ \ldots\ldots\ldots\ (63)$$

Выведенное уравненіе показываетъ, что всѣ меридіаны сходятся въ одну точку, имѣющую координаты $x=m$, $y=n$. Параллели, какъ ортогональныя траекторіи, будутъ понятно концентрическими кругами, имѣющими общій центръ въ точкѣ (m, n). Это видно изъ нашихъ формулъ, ибо интегрируя уравненіе (59) получимъ

$$c=2m^2k\frac{1}{\cos^2(2kv+l)}+2u_0,$$

гдѣ u_0 новая постоянная величина.

Уравненіе (53) даетъ

$$x = m + \cos(2kv + l)\sqrt{\frac{u - u_0}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

кромѣ того уравненіе (63) даетъ

$$y = n + \sin(2kv + l)\sqrt{\frac{u - u_0}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Изъ уравненій (64) и (65) можно исключить v, тогда получимъ

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = \frac{u - u_0}{k}.$$

Итакъ, получаемъ для параллелей концентрическіе круги, радіусъ которыхъ выражается по формулѣ

$$\sqrt{\frac{u - u_0}{k}}.$$

Получается Ламбертова коническая проекція.

Другую проекцію мы получимъ, мѣняя ролями u и v.

11. Найдемъ теперь всѣ карты Эйлера съ круговыми меридіанами.

Пусть меридіаны будутъ заданы слѣдующими уравненіями:

$$x = a + \rho\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

$$y = b + \rho\sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

гдѣ a, b и ρ суть искомыя функціи отъ одного v, а φ вспомогательный уголъ, который будемъ разсматривать какъ функцію отъ u и v.

Для того чтобы удовлетворить уравненіямъ (50) и (51), будемъ дифференцировать уравненія (66) и (67)

$$x'_v = a' + \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi\varphi'_v, \quad x'_u = -\rho\sin\varphi\varphi'_u$$

$$y'_v = b' + \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi\varphi'_v, \quad y'_u = +\rho\cos\varphi\varphi'_u.$$

Подставляя въ уравненіе (50), получимъ

$$\rho\,[a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + \rho']\,\varphi'_u = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

Уравненіе же (51) даетъ

$$\rho\varphi'_v = a'\sin\varphi - b'\cos\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

Интегрируя уравненіе (68) по u, получимъ

$$\rho a'\sin\varphi - \rho b'\cos\varphi + \rho\rho'\varphi = u + w \ldots\ldots\ldots (70)$$

здѣсь w новая функція отъ v, вводимая интегрированіемъ.

Дифференцируя уравненіе (70) по v, получимъ

$$(\rho a')'\sin\varphi - (\rho b')'\cos\varphi + (\rho\rho')'\varphi - w' +$$
$$+ \varphi'_v \rho[a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + \rho'] = 0 \ldots\ldots\ldots (71)$$

Исключая изъ уравненія (69) и (71) производную φ'_v, получимъ

$$(\rho a')'\sin\varphi - (\rho b')'\cos\varphi + (\rho\rho')'\varphi - w' +$$
$$+ (a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + \rho')(a'\sin\varphi - b'\cos\varphi) = 0$$

Послѣднее уравненіе должно быть тождествомъ, что даетъ

$$a' = 0, \quad b' = 0, \quad \rho\rho' = k, \quad w' = 0,$$

гдѣ k число постоянное; отсюда координаты центра меридіана a и b числа постоянныя и, слѣдовательно, меридіаны суть круги концентрическіе

$$\rho = \sqrt{2kv + l}, \quad w' = \text{const}$$

$$\varphi = \frac{u + w}{k}.$$

Получились проекціи уже найденныя.

Итакъ, круговыхъ картъ Эйлера нѣтъ.

Существуетъ только одна прямолинейная проекція и двѣ смѣшанныхъ.

Этотъ результатъ высказанъ безъ доказательства въ статьѣ Коркина «Sur la construction des cartes géographiques».

12. Обращаясь къ разсмотрѣнію картъ, сохраняющихъ площади безъ условія перпендикулярности меридіановъ и параллелей, я долженъ замѣтить, что всѣ прямолинейныя и смѣшанныя проекціи этого рода получены мною въ статьѣ: «о проекціяхъ поверхности вращенія на плоскости, въ которыхъ сохраняются площади, меридіаны же изображаются прямыми, а параллели кругами» *).

Здѣсь я покажу выводъ этихъ проекцій инымъ путемъ, а также рѣшеніе задачи о нахожденіи картъ круговыхъ. Эта послѣдняя задача представила значительныя трудности.

13. Обратимся къ задачѣ самой общей.

Проекціи, сохраняющія площади, должны, конечно, удовлетворять уравненію, которое можетъ быть представлено въ видѣ:

$$x'_u y'_v - x'_v y'_u = 1 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (50)$$

Требуется подобрать функціи

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (72)$$

такъ, чтобы онѣ удовлетворяли уравненію (50) и давали для меридіановъ и параллелей линіи заданнаго вида.

Исключая изъ уравненій (72) широту u, мы получимъ уравненіе меридіановъ, которое напишется такъ:

$$y = f(x, v) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (73)$$

Подобнымъ же образомъ уравненіе параллелей будетъ имѣть видъ:

$$y = \mathrm{F}(x, u) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (74)$$

Дифференцируя уравненіе (73), получимъ

$$y'_u = f'_x x'_u; \quad y'_v = f'_x x'_v + f'_v.$$

Подставляя въ уравненіе (50), получимъ

$$f'_v x'_u = 1 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (75)$$

Интегрируя уравненіе (75) по u, получимъ

$$\int f'_v(x, v)\, dx = u + w \quad \dots \dots \dots \dots \quad (76)$$

w произвольная функція отъ v, а интегралъ взятъ въ предположеніи v постояннаго.

---

*) Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. 1894, № 1 Сентябрь, стр. 73—85.

Уравненіе (76) имѣетъ, слѣдовательно, видъ:

$$\omega(x, v) = u + w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

Функція ω выражается явно черезъ x, если видъ меридіановъ заданъ, а перемѣнная v входитъ неявно, какъ аргументъ параметровъ уравненія меридіановъ.

Примемъ теперь въ разсчетъ заданный видъ параллелей.

Если уравненіе параллелей (74) задано, то это значитъ, что задана функція F отъ x, параметры которой суть нѣкоторыя функціи отъ u.

Исключимъ перемѣнную величину u при помощи дифференцированія, другими словами, напишемъ дифференціальное уравненіе параллелей въ предположеніи u постояннаго. Придется дифференцировать по v.

Такъ какъ во всемъ дальнѣйшемъ разсужденіи мы будемъ дифференцировать по v, то будемъ производныя отъ y и x по v обозначать

$$x', \; y', \; x'', \; y'' \ldots$$

тогда дифференціальное уравненіе параллелей будетъ имѣть видъ:

$$\Omega(x, \; y, \; x', \; y', \; x'', \; y'', \ldots) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Дифференцируя уравненіе (73), мы получимъ

$$y' = f'_x \, x' + f'_v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$

$$y'' = f'_x \, x'' + f''_{xx} \, x'^2 + 2f''_{xv} \, x' + f''_{vv} \ldots\ldots (80)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Эти формулы даютъ возможность исключить изъ уравненія (78) производныя отъ y. Получаемъ уравненіе

$$\Pi(v, x, x', x'', \ldots) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (81)$$

Производныя же отъ x исключимъ на основаніи уравненія (77); въ самомъ дѣлѣ,

$$\omega'_x \, x' + \omega'_v = w'.$$

Отсюда

$$x' = \xi_1(x, v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Дифференцируя, получимъ

$$x''=\frac{\partial\xi_1}{\partial x}x'+\frac{\partial\xi_1}{\partial v}=\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\xi_1+\frac{\partial\xi_1}{\partial v}=\xi_2(x,v)\ \ldots\ldots \quad (83)$$

и т. д.

Подставляя вмѣсто x', x'',... въ уравненіе (81) функціи $\xi_1(x, v)$, $\xi_2(x, v)$,..., мы получимъ окончательно уравненіе

$$\Psi(x,v)=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

Въ это послѣднее уравненіе x входитъ явно.

Это уравненіе должно быть тождествомъ, ибо иначе оно опредѣляло бы x, какъ функцію отъ одного v, но тогда на основаніи уравненія (77) u выражалось бы черезъ v, что невозможно. Перемѣнная x не можетъ быть постоянною, ибо она должна зависить отъ u или v.

Мы видѣли уже на рядѣ примѣровъ, какъ значительно ограничиваются входящія въ уравненіе функціи требованіемъ, чтобы уравненіе было тождествомъ.

Рѣшить поставленную задачу, это значитъ удовлетворить тождеству (84) самымъ общимъ образомъ.

Когда найдены всѣ коэффиціенты уравненія меридіановъ и функція w, проекція опредѣляется вполнѣ уравненіями (73), (77).

14. Проекціи прямолинейныя.

Пусть уравненіе меридіановъ будетъ

$$y=ax+b\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

гдѣ a и b суть нѣкоторыя функціи отъ долготы v.

Надо удовлетворить уравненію

$$x'_u y'_v - x'_v y'_u = 1,$$

но подставляя

$$y'_u = ax'_u,\quad y'_v = a'x + ax'_v + b',$$

получимъ

$$a'xx'_u + b'x'_u = 1.$$

Интегрируя по u, получимъ

$$\frac{a'}{2}x^2 + b'x = u + w\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

гдѣ w нѣкоторая произвольная функція отъ v.

Разсмотримъ сначала случай, когда параллели изображаются прямыми, параллельными между собою.

Взявъ направленіе оси y-овъ параллельно направленію этихъ прямыхъ, получимъ

$$x' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (87)$$

гдѣ для краткости символомъ x' обозначена производная x-са по v; то же значеніе символа x' оставимъ во всемъ дальнѣйшемъ.

Подобнымъ же образомъ будемъ обозначать символами x'', x''',... производныя, взятыя въ предположеніи u постояннаго.

Дифференцируя уравненіе (86) по v, получимъ

$$\frac{a''}{2} x^2 + b'' x - w' + (a' x + b') x' = 0, \ldots\ldots (88)$$

принимая же во вниманіе уравненіе (87), получимъ

$$\frac{a''}{2} x^2 + b'' x - w' = 0.$$

Отсюда

$$a'' = 0, \quad b'' = 0, \quad w' = 0;$$

интегрируя, получаемъ

$$a = kv + l, \quad b = k_1 v + l_1, \quad w = m;$$

Итакъ, уравненіе меридіановъ имѣетъ видъ:

$$y = x(kv + l) + k_1 v + l. \ldots\ldots\ldots\ldots (89)$$

Что касается до уравненія параллелей, то оно получается изъ уравненія (86) и имѣетъ видъ:

$$x^2 k + 2k_1 x = 2(u + m). \ldots\ldots\ldots\ldots (90)$$

Карты опредѣляются двумя уравненіями (89), (90).

15. Обращаемся къ общему случаю.

Дифференціальное уравненіе прямыхъ линій имѣетъ видъ:

$$x' y'' - x'' y' = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (91)$$

но

$$y' = ax' + a'x + b', \quad y'' = ax'' + 2a'x' + a''x + b''.$$

Подставляя въ уравненіе (91), получимъ

$$2a'x'^2 + x'(a''x + b'') - x''(a'x' + b') = 0 \ldots\ldots (92)$$

Дифференцируя уравненіе (86), получимъ

$$\frac{a''}{2}x^2 + b''x - w' + x'(a'x + b') = 0 \ldots\ldots\ldots (93)$$

$$\frac{a'''}{2}x^2 + b'''x - w'' + 2(a''x + b'')x' + a'x'^2 + x''(a'x + b') = 0 \,.(94)$$

Складывая уравненія (92) и (94), получимъ

$$3a'x'^2 + 3(a''x + b'')x' + \frac{a'''}{2}x^2 + b'''x - w'' = 0 \ldots (95)$$

но изъ уравненія (93) получаемъ

$$x' = -\frac{\frac{a''}{2}x^2 + b''x - w'}{a'x + b'}.$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе (95), получимъ послѣ простыхъ приведеній

$$M_0x^4 + M_1x^3 + M_2x^2 + M_3x + M_4 = 0,$$

гдѣ

$$M_0 = \frac{a'}{4}[2a'a''' - 3a''^2],$$

$$M_1 = a'(b'a''' + a'b''') - \frac{3}{2}a''(a'b'' + b'a''),$$

$$M_2 = 2a'b'b''' + \frac{1}{2}b'^2a''' - \frac{9}{2}b'b''a'' - a'^2w'',$$

$$M_3 = 3w'(b'a'' - a'b'') - 2w''a'b' + b'(b'b''' - 3b''^2),$$

$$M_4 = 3a'w'^2 + 3w'b'b'' - w''b'^2.$$

Для рѣшенія задачи надо удовлетворить системѣ уравненій

$$M_0 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0, \quad M_4 = 0.$$

Обращаясь къ уравненію $M_0 = 0$, мы замѣчаемъ, что случая $a' = 0$ нечего разсматривать, ибо получаются проекціи, выводимыя изъ картъ (89), (90) черезъ замѣну меридіановъ параллелями и обратно.

Подобнымъ же образомъ ничего новаго не даетъ случай $a''=0$; ибо тогда уравненіе $M_1=0$ даетъ $b'''=0$. Уравненіе $M_2=0$ даетъ $w''=0$ и, наконецъ, уравненія $M_3=0$, $M_4=0$ обращаются въ одно

$$a'w'+b'b''=0;$$

но если

$$a=kv+l, \quad b=k_1v^2+l_1v+m_1, \quad w=k_2v+l_2,$$

то получимъ

$$kk_2+2k_1(2k_1v+l_1)=0.$$

Это уравненіе даетъ $k_1=0$. Оба же случая $k=0$, $k_2=0$ заключаются въ проекціяхъ (89), (90) и выводимыхъ изъ нихъ черезъ замѣну параллелей меридіанами и обратно.

Подобнымъ же образомъ не приводитъ къ новымъ проекціямъ разсмотрѣніе общаго случая

$$2a'a'''-3a''^2=0.$$

Интегрируемъ это уравненіе, не предполагая $a''=0$, тогда получимъ

$$a=-\frac{1}{\lambda(\lambda v+\mu)}+\nu.$$

Принимая во вниманіе уравненія $M_0=0$, $M_1=0$, получаемъ

$$b''=ka'', \quad b=ka+lv+m;$$

на основаніи уравненій $M_2=0$, $M_3=0$ получимъ

$$l(3w'a''-2w''a')=0,$$

откуда $l=0$ даетъ уже полученныя проекціи.

Въ случаѣ l не $=0$, $3w'a''-2w''a'=0$, приходимъ къ противорѣчію.

16. Резюмируя сказанное, получаемъ три вида проекцій:

$$\left.\begin{aligned} x&=au+bv+c\\ y&=\alpha u+\beta v+\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (96)$$

гдѣ a, b, c, α, β, γ числа постоянныя, между которыми существуетъ соотношеніе

$$a\beta - \alpha b = 1.$$

Второй видъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= (av + b)\sqrt{2ku + l} + c \\ y &= (\alpha v + \beta)\sqrt{2ku + l} + \gamma \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (97)$$

гдѣ между постоянными существуетъ соотношеніе

$$k(a\beta - b\alpha) = 1.$$

Третій видъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= (au + b)\sqrt{2kv + l} + c \\ y &= (\alpha u + \beta)\sqrt{2kv + l} + \gamma \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (98)$$

гдѣ

$$k(a\beta - b\alpha) = -1.$$

17. Обращаемся теперь къ нахожденію проекцій смѣшанныхъ.

Пусть кругами будутъ на картѣ меридіаны, такъ что ихъ уравненія напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \rho\cos\varphi \\ y &= b + \rho\sin\varphi \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (99)$$

гдѣ a, b, ρ суть нѣкоторыя функціи отъ долготы v, а φ функція отъ долготы и широты.

Для того чтобы удовлетворить уравненію (71), будемъ дифференцировать уравненія (99), тогда, получимъ

$$\rho[a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + \rho']\varphi'_u = 1.$$

Интегрируя по u, получимъ

$$\rho a'\sin\varphi - \rho b'\cos\varphi + \rho\rho'\varphi = u + w \dots\dots\dots (100)$$

Здѣсь w новая функція отъ одного v, вводимая интегрированіемъ. Будемъ во всемъ дальнѣйшемъ подъ знаками

$$x',\ x'',\ x''',\dots y',\ y'',\ y''',\dots \varphi',\ \varphi'',\ \varphi'''\dots$$

разумѣть производныя по буквѣ v.

Такъ какъ параллели прямыя, то ихъ уравненіе будетъ

$$x'y''-x''y'=0.$$

Черезъ дифференцированіе получаемъ

$$x'=a'+\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi\varphi',$$

$$y'=b'+\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi\varphi',$$

$$x''=a''+\rho''\cos\varphi-2\rho'\sin\varphi\varphi'-\rho\cos\varphi\varphi'^2-\rho\sin\varphi\varphi'',$$

$$y''=b''+\rho''\sin\varphi+2\rho'\cos\varphi\varphi'-\rho\sin\varphi\varphi'^2+\rho\cos\varphi\varphi''.$$

Введемъ обозначенія

$$a'\cos\varphi+b'\sin\varphi=A_1,\quad a'\sin\varphi-b'\cos\varphi=B_1$$

$$a''\cos\varphi+b''\sin\varphi=A_2,\quad a''\sin\varphi-b''\cos\varphi=B_2$$

$$a'''\cos\varphi+b'''\sin\varphi=A_3,\quad a'''\sin\varphi-b'''\cos\varphi=B_3$$

. . . .

Получаемъ послѣ простыхъ приведеній

$$\begin{aligned}x'y''-x''y'=a'b''-b'a''+\rho''B_1-\rho'B_2+\\ +\varphi'\,[2\rho'A_1-\rho A_2+2\rho'^2-\rho\rho'']\\ +\varphi'^2[-\rho B_1]\\ +\varphi'^3\rho^2\\ +\varphi''\,[\rho A_1+k]=0\end{aligned}\quad\ldots\ldots\ldots(101)$$

гдѣ черезъ k обозначена функція $\rho\rho'$

Съ другой стороны уравненіе (100) можно написать такъ:

$$\rho B_1+k\varphi=u+w.$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе, мы получимъ

$$\rho' B_1 + \rho B_2 - w' + k'\varphi + \varphi' [\rho A_1 + k] = 0 \ldots\ldots (102)$$

$$\begin{aligned} -w'' + \rho'' B_1 + 2\rho' B_2 + \rho B_3 + k''\varphi + \\ + \varphi' \, 2 [\rho' A_1 + \rho A_2 + k'] \\ + \varphi'^2 [-\rho B_1] \\ + \varphi'' [\rho A_1 + k] = 0 \end{aligned} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (103)$$

Вычитая уравненіе (103) изъ уравненія (101), получимъ

$$\begin{aligned} a' b'' - b' a'' + w'' - 3\rho' B_2 - \rho B_3 - k''\varphi - \\ - 3\varphi' [\rho A_2 + \rho\rho''] + \varphi'^3 \rho^2 = 0 \end{aligned} \ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

Умножая на $(\rho A_1 + k)^3$ и подставляя вмѣсто $\varphi'(\rho A_1 + k)$ въ послѣднее уравненіе соотвѣтственное выраженіе изъ уравненія (102), получимъ

$$\begin{aligned} (\rho A_1 + k)^3 [a' b'' - b' a'' + w'' - 3\rho' B_2 - \rho B_3 - k''\varphi] - \\ - 3 (\rho A_1 + k)^2 (\rho A_2 + \rho\rho'') [w' - \rho' B_1 - \rho B_2 - k'\varphi] + \\ + \rho^2 [w' - \rho' B_1 - \rho B_2 - k'\varphi]^3 = 0. \end{aligned}$$

Собирая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ φ, замѣчаемъ, что уравненіе принимаетъ видъ:

$$k'^3 \rho^2 \varphi^3 + M_1 \varphi^2 + M_2 \varphi + M_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (105)$$

гдѣ M_1, M_2, M_3 суть цѣлыя раціональныя функціи отъ $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ съ коэффиціентами, зависящими отъ одного v.

18. Очевидно, что уравненіе (105), будучи тождествомъ, не можетъ иначе удовлетворяться, какъ положеніемъ

$$k'^3 \rho^2 = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0.$$

Итакъ мы видимъ, что число k должно быть постоянное, отсюда

$$\rho\rho' = k, \quad 2\rho\rho' = 2k, \quad \rho^2 = 2kv + l$$

и наконецъ

$$\rho = \sqrt{2kv + l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (106)$$

Одна изъ искомыхъ функцій ρ такимъ образомъ опредѣлена. Остается выразить координаты центра меридіана въ функціяхъ отъ долготы v.

19. Для удобства дальнѣйшихъ выкладокъ введемъ въ разсмотрѣніе числа комплексныя.

Обозначимъ

$$a+bi=c, \quad a-bi=\gamma, \quad 2iw=\sigma.$$

Кромѣ того введемъ обозначенія

$$e^{i\varphi}=z, \quad e^{-i\varphi}=t,$$

такъ что конечно будетъ $zt=1$.

Уравненіе (104) перепишется такъ:

$$c''\gamma'-c'\gamma''+\sigma''-z[3\rho'\gamma''+\rho\gamma''']+t[3\rho'c''+\rho c''']-$$

$$-3\rho i\varphi'[z\gamma''+tc''+2\rho'']+2i\rho^2\varphi'^3=0 \ldots\ldots(107)$$

Условіе (100) обращается въ такое:

$$\rho\gamma'z-\rho c't+2ik\varphi=2iu+\sigma \ldots\ldots\ldots\ldots(108)$$

Дифференцируя уравненіе (108) по v, получимъ

$$(\rho\gamma z+\rho c't+2k)i\varphi'=-(\rho\gamma')'z+(\rho c')'t+\sigma'.$$

Обозначая для краткости

$$A_0=\rho\gamma'z+\rho c't+2k, \quad B_0=-(\rho\gamma')'z+(\rho c')'t+\sigma',$$

получимъ

$$i\varphi'A_0=B_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(109)$$

Умножая уравненіе (107) на A_0^3, получимъ

$$A_0^2[A_0E_0-3\rho B_0D_0]-2\rho^2B_0^3=0 \ldots\ldots\ldots(110)$$

гдѣ для сокращенія письма введены обозначенія

$$A_0 = \mathfrak{a}z + A + \alpha t,$$

$$B_0 = \mathfrak{b}z + B + \beta t,$$

$$E_0 = \mathfrak{e}z + E + \varepsilon t,$$

$$D_0 = \mathfrak{d}z + D + \delta t,$$

гдѣ

$$\mathfrak{a} = \rho\gamma', \qquad A = 2k, \quad \alpha = \rho c'$$

$$\mathfrak{b} = -(\rho\gamma')', \quad B = \sigma', \quad \beta = (\rho c')'$$

$$\mathfrak{e} = -(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma'''), \quad E = c''\gamma' - \gamma''c' + \sigma'', \quad \varepsilon = 3\rho'c'' + \rho c''',$$

$$\mathfrak{d} = \gamma'', \qquad D = 2\rho'', \qquad \delta = c''.$$

Получаемъ

$$A_0 E_0 = \mathfrak{a}\mathfrak{e}z^2 + (A\mathfrak{e} + E\mathfrak{a})z + \mathfrak{e}\alpha + EA + \varepsilon\mathfrak{a} +$$
$$+ \alpha\varepsilon t^2 + (A\varepsilon + E\alpha)t.$$

Подобнымъ же образомъ будемъ имѣть

$$B_0 D_0 = \mathfrak{b}\mathfrak{d}z^2 + (B\mathfrak{d} + D\mathfrak{b})z + \mathfrak{d}\beta + DB + \delta\mathfrak{b} +$$
$$+ \beta\delta t^2 + (B\delta + D\beta)t.$$

Отсюда

$$A_0 E_0 - 3\rho B_0 D_0 = M_2 z^2 + M_1 z + \mathfrak{M} + \mathrm{M}_1 t + \mathrm{M}_2 t^2$$

гдѣ

$$M_2 = \rho^2(3\gamma''^2 - \gamma'\gamma''')$$

$$M_1 = \rho(\gamma'\sigma'' - 3\gamma''\sigma') + \rho\gamma'(c''\gamma' - c'\gamma'') +$$
$$+ 6\rho\rho'(\rho''\gamma' - 2\rho'\gamma'') - 2k\rho\gamma'''$$

$$\mathfrak{M} = 8k(c''\gamma' - c'\gamma'') + \rho^2(c'''\gamma' - c'\gamma''') + 2(k\sigma'' - 3\rho\rho''\sigma')$$

$$\mathrm{M}_1 = \rho(c'\sigma'' - 3c''\sigma') + \rho c'(c''\gamma' - c'\gamma'') +$$
$$+ 6\rho\rho'(2\rho'c'' - \rho''c') + 2k\rho c'''$$

$$\mathrm{M}_2 = \rho^2(c'c''' - 3c''^2).$$

Умножая

$$M_2 z^2 + M_1 z + \mathfrak{M} + \mathrm{M}_1 t + \mathrm{M}_2 t^2$$

на

$$\mathrm{a} z + A + \alpha t,$$

получимъ

$$N_3 z^3 + N_2 z^2 + N_1 z + \mathfrak{N} + \mathrm{N}_1 t + \mathrm{N}_2 t^2 + \mathrm{N}_3 t^3,$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
N_3 &= M_2 \mathrm{a} \\
N_2 &= M_1 \mathrm{a} + M_2 A \\
N_1 &= \mathfrak{M}\, \mathrm{a} + M_1 A + M_2 \alpha \\
\mathfrak{N} &= \mathrm{M}_1 \mathrm{a} + \mathfrak{M}\, A + M_1 \alpha \\
\mathrm{N}_1 &= \mathrm{M}_2 \mathrm{a} + \mathrm{M}_1 A + \mathfrak{M}\, \alpha \\
\mathrm{N}_2 &= \qquad\quad \mathrm{M}_2 A + \mathrm{M}_1 \alpha \\
\mathrm{N}_3 &= \qquad\qquad\qquad \mathrm{M}_2 \alpha.
\end{aligned}$$

Умножая еще разъ на $\mathrm{a} z + A + \alpha t$, получимъ

$$P_4 z^4 + P_3 z^3 + P_2 z^2 + P_1 z + \mathfrak{P} + \mathrm{P}_1 t + \mathrm{P}_2 t^2 + \mathrm{P}_3 t^3 + \mathrm{P}_4 t^4,$$

гдѣ

$$\begin{aligned}
P_4 &= N_3 \mathrm{a} \\
P_3 &= N_2 \mathrm{a} + N_3 A \\
P_2 &= N_1 \mathrm{a} + N_2 A + N_3 \alpha \\
P_1 &= \mathfrak{N}\, \mathrm{a} + N_1 A + N_2 \alpha \\
\mathfrak{P} &= \mathrm{N}_1 \mathrm{a} + \mathfrak{N}\, A + N_1 \alpha \\
\mathrm{P}_1 &= \mathrm{N}_2 \mathrm{a} + \mathrm{N}_1 A + \mathfrak{N}\, \alpha \\
\mathrm{P}_2 &= \mathrm{N}_3 \mathrm{a} + \mathrm{N}_2 A + \mathrm{N}_1 \alpha \\
\mathrm{P}_3 &= \qquad\quad \mathrm{N}_3 A + \mathrm{N}_2 \alpha \\
\mathrm{P}_4 &= \qquad\qquad\qquad \mathrm{N}_3 \alpha.
\end{aligned}$$

Принимая въ соображенiе, что

$$B_0{}^3 = z^3 \mathfrak{b}^3 + z^2\, 3B\mathfrak{b}^2 + z\, 3\mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}\beta + B^2) + B\,(6\mathfrak{b}\beta + B^2) +$$

$$+ t^3 \beta^3 + t^2\, 3B\beta^2 + t\, 3\beta\,(\mathfrak{b}\beta + B^2),$$

подставляя полученныя выраженія въ уравненіе (110) и принимая во вниманіе, что должны равняться нулю отдѣльно всѣ коэффиціенты при различныхъ степеняхъ z и t, получаемъ слѣдующія уравненія, рѣшающія задачу,

$$P_4 = 0 \tag{111}$$

$$P_3 - 2\rho^2 \mathfrak{b}^3 = 0 \tag{112}$$

$$P_2 - 6\rho^2 B\mathfrak{b}^2 = 0 \tag{113}$$

$$P_1 - 6\rho^2 \mathfrak{b}(\mathfrak{b}\beta + B^2) = 0 \tag{114}$$

$$\mathfrak{P} - 2\rho^2 B(6\mathfrak{b}\beta + B^2) = 0 \tag{115}$$

$$\mathrm{P}_1 - 6\rho^2 \beta(\mathfrak{b}\beta + B^2) = 0 \tag{116}$$

$$\mathrm{P}_2 - 6\rho^2 B\beta^2 = 0 \tag{117}$$

$$\mathrm{P}_3 - 2\rho^2 \beta^3 = 0 \tag{118}$$

$$\mathrm{P}_4 = 0 \tag{119}$$

Уравненія (111) и (119) даютъ $\mathfrak{a}^2 M_2 = 0$, $\alpha^2 \mathrm{M}_2 = 0$.

20. Остановимся на случаѣ $\mathfrak{a} = 0$.

Уравненіе $\mathfrak{a} = \rho\gamma' = 0$ даетъ $\gamma' = 0$, $\gamma = \text{const}$.

Получаются, очевидно, карты съ концентрическими меридіанами. Въ этомъ случаѣ получается

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{a} = 0, & A = 2k_\gamma & \alpha = 0 \\ \mathfrak{b} = 0, & B = \sigma', & \beta = 0 \\ \mathfrak{e} = 0, & E = \sigma'', & \varepsilon = 0 \\ \mathfrak{d} = 0, & D = 2\rho'', & \delta = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} M_2 = 0 & , N_3 = 0 & , P_4 = 0 \\ M_1 = 0 & , N_2 = 0 & , P_3 = 0 \\ \mathfrak{M} = 2(k\sigma'' - 3\rho\rho''\sigma'), & N_1 = 0 & , P_2 = 0 \\ \mathrm{M}_1 = 0 & , \mathfrak{N} = 4k(k\sigma'' - 3\rho\rho''\sigma'), & P_1 = 0 \\ \mathrm{M}_2 = 0 & , \mathrm{N}_1 = 0 & , \mathfrak{P} = 8k^2(k\sigma'' - 3\rho\rho''\sigma') \\ & \mathrm{N}_2 = 0 & , \mathrm{P}_1 = 0 \\ & \mathrm{N}_3 = 0 & , \mathrm{P}_2 = 0 \\ & & \mathrm{P}_3 = 0 \\ & & \mathrm{P}_4 = 0 \end{array}$$

Изъ всей системы остается удовлетворить только уравненію (115)

$$\mathfrak{P} - 2\rho^2 B(6\beta b + B^2) = 0,$$

что даетъ

$$8k^2(k\sigma'' - 3\rho\rho''\sigma') - 2\rho^2\sigma'^3 = 0.$$

Раздѣляя на $8k^3$ получимъ

$$\sigma'' - \frac{3\rho\rho''}{k}\sigma' - \frac{\rho^2}{4k^3}\sigma'^3 = 0,$$

но $\sigma' = 2iw'$, $\sigma'' = 2iw''$.

Подставляя получимъ

$$2w'' - \frac{6\rho\rho''}{k}w' + \frac{2\rho^2}{k^3}w'^3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (120)$$

Если $w' = 0$, то карты опредѣляются уравненіями

$$x = a + \rho\cos\varphi,$$

$$y = b + \rho\sin\varphi,$$

гдѣ

$$\rho = \sqrt{2kv + l}, \quad \varphi = \frac{u - u_0}{k},$$

гдѣ a, b, k, l, u_0 произвольныя постоянныя числа.

Эта проекція была нами получена при разсмотрѣніи картъ Эйлера, ибо въ ней сѣтка состоитъ изъ концентрическихъ круговъ и ихъ радіусовъ.

Обращаясь къ общему случаю, мы положимъ

$$\frac{1}{w'^2} = \frac{y}{2},$$

тогда уравненіе (120) обращается въ слѣдующее:

$$-\frac{y'}{2} - \frac{6\rho\rho''}{k}\frac{y}{2} + \frac{2\rho^2}{k^3} = 0,$$

или

$$y' + \frac{6\rho\rho''}{k}y - \frac{4\rho^2}{k^3} = 0.$$

Получается для опредѣленія функціи y линейное уравненіе.

Интегрируя, получимъ

$$y = \frac{(2kv + l)^2}{k^4}\left[Ck^4(2kv + l) - 2\right],$$

гдѣ C постоянная величина, вводимая интегрированіемъ.

Отсюда

$$w'^2 = \frac{2}{y} = \frac{2k^4}{(2kv + l)^2\,[Ck^4(2kv + l) - 2]}.$$

Обозначая

$$Ck^4 = \frac{2}{\delta^2},$$

получимъ

$$w' = \frac{\delta k^2}{(2kv + l)\sqrt{2kv + l - \delta^2}}.$$

Интегрируя, получаемъ

$$w = \delta\,\frac{k}{2}\int\frac{2k\,dv}{(2kv + l)\sqrt{2kv + l - \delta^2}} = \delta k\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - \delta^2}} =$$

$$= k\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\rho^2 - \delta^2}}{\delta} - w_0.$$

Отсюда уравненіе (100) получаетъ видъ:

$$\varphi = \frac{u + w_0}{k} + \mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{\rho^2 - \delta^2}}{\delta},$$

откуда

$$\cos\varphi = \frac{\delta}{\rho}\cos\frac{u + w_0}{k} - \sin\frac{u + w_0}{k}\,\frac{\sqrt{\rho^2 - \delta^2}}{\rho}$$

$$\sin\varphi = \frac{\delta}{\rho}\sin\frac{u + w_0}{k} + \cos\frac{u + w_0}{k}\,\frac{\sqrt{\rho^2 - \delta^2}}{\rho}.$$

Итакъ, окончательно, карты съ концентрическими меридіанами опредѣляются уравненіями

$$a = \mathrm{const}, \quad b = \mathrm{const}, \quad \rho = \sqrt{2kv + l}, \quad \delta = \mathrm{const}, \quad w_0 = \mathrm{const},$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \delta\cos\frac{u + w_0}{k} - \sqrt{\rho^2 - \delta^2}\sin\frac{u + w_0}{k} \\ y &= b + \delta\sin\frac{u + w_0}{k} + \sqrt{\rho^2 - \delta^2}\cos\frac{u + w_0}{k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (121)$$

Иключая изъ уравненій (121) букву u, получимъ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2kv + l;$$

исключая же ρ, получимъ уравненіе параллелей

$$(x - a)\cos\frac{u + w_0}{k} + (y - b)\sin\frac{u + w_0}{k} = \delta.$$

Мы видимъ, что параллели суть прямыя, разстоянія которыхъ отъ общаго центра меридіановъ a, b равны постоянной величинѣ δ; слѣдовательно, параллели касаются одного изъ круговъ, концентрическихъ съ меридіанами.

Перпендикуляръ, опущенный изъ центра меридіановъ на параллель, образуетъ съ осью x-овъ уголъ $\frac{u+w_0}{k}$.

21. Обращаемся теперь къ другому случаю.

Придется разсматривать уравненіе $M_2=0$.
Обозначая $\gamma'=y$, получимъ уравненіе

$$3y'^2-yy''=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(122)$$

Здѣсь надо разсматривать искомую величину y, какъ функцію отъ дѣйствительнаго аргумента v и комплексныхъ значеній постоянныхъ произвольныхъ, вводимыхъ интегрированіемъ.

Придется разсмотрѣть два случая $y'=0$ и общее рѣшеніе

$$y=\frac{1}{\sqrt{\lambda v+\mu}}.$$

Зная, что $y=a'-b'i$, положимъ

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1 i,\quad \mu=\mu_0+\mu_1 i,$$

обозначая

$$\lambda_0 v+\mu_0=L_0;\quad \lambda_1 v+\mu_1=L_1,$$

получимъ

$$a'-b'i=\frac{1}{\sqrt{L_0+iL_1}}.$$

Отдѣляя дѣйствительную часть отъ мнимой, получимъ черезъ интегрированіе двѣ функціи a и b, которыя могутъ быть координатами меридіановъ, если приличнымъ выборомъ постоянныхъ произвольныхъ можно будетъ удовлетворить всѣмъ остальнымъ условіямъ вопроса.

22. Останавливаясь на случаѣ $y'=0$, мы получимъ $\gamma'=\text{const}$.

Раскрывая уравненія (112),... (118), мы получимъ

$$\rho^3\gamma'^2(\gamma'\sigma''-3\gamma''\sigma')+\rho^3\gamma'^3(c''\gamma'-c'\gamma'')-4k^2\rho'\gamma'^3-6k^2\rho\gamma'^2\gamma''+$$
$$+18k\rho^3\gamma'\gamma''^2-6k\rho^3\gamma'^2\gamma'''+2\rho^5\gamma''^3=0\ldots\ldots(112^*)$$

$$\rho^3c'^2(c'\sigma''-3c''\sigma')+\rho^3c'^3(c''\gamma'-c'\gamma'')+4k^2\rho'c'^3+6k^2\rho c'^2c''-$$
$$-18k\rho^3c'c''^2+6k\rho^3c'^2c'''-2\rho^5c''^3=0\ldots\ldots(118^*)$$

$$\sigma''6k\rho^3\gamma'^2-6\rho^2\sigma'[4k\gamma'\gamma''+\gamma''^2]+12k\rho^2\gamma'^2(c''\gamma'-c'\gamma'')+$$
$$+\rho^4\gamma'^2(c'''\gamma'-c'\gamma''')+\rho^2(3\gamma''^2-\gamma'\gamma''')(4k^2+2\rho^2c'\gamma')+$$
$$+4k\rho\gamma'(6k\rho''\gamma'-12k\rho'\gamma''-2k\rho\gamma''')=0\ldots\ldots(113^*)$$

$$\sigma''6k\rho^3c'^2-6\rho^2\sigma'(4kc'c''+c''^2)+12k\rho^2c'^2(c''\gamma'-c'\gamma'')+$$
$$+\rho^4c'^2(c'''\gamma'-c'\gamma''')+\rho^2(c'c'''-3c''^2)(4k^2+2\rho^2c'\gamma')-$$
$$-4k\rho c'(6k\rho''c'-12k\rho'c''-2k\rho c''')=0\ldots\ldots(117^*)$$

$$\sigma''3\rho\gamma'(\rho^2c'\gamma'+4k^2)+\sigma'^2 6\rho^2(\rho'\gamma'+\rho\gamma'')-$$
$$-\sigma'3\rho[\rho^2\gamma'^2c''+8k\rho\rho''\gamma'+\gamma''(2\rho^2\gamma'c'-4k^2)]+$$
$$+(c''\gamma'-\gamma''c')3\rho\gamma'(\rho^2c'\gamma'+12k^2)+4k\rho^3\gamma'(c'''\gamma'-c'\gamma''')-$$
$$-6\rho^2(\rho'\gamma'+\rho\gamma'')^2(3\rho'c'+\rho c'')+\rho^2\gamma'^2(-6\rho''kc'+12k\rho'c''+2k\rho c''')+$$
$$+4k^2(6k\rho''\gamma'-12k\rho'\gamma''-2k\rho\gamma''')=0\ldots\ldots(114^*)$$

$$\sigma''3\rho c'(\rho^2c'\gamma'+4k^2)-\sigma'^2 6\rho^2(\rho'c'+\rho c'')-$$
$$-\sigma'3\rho[\rho^2c'^2\gamma''+8k\rho\rho''c'+c''(2\rho^2c'\gamma'+4k^2)]+$$
$$+(c''\gamma'-\gamma''c')3\rho c'(\rho^2c'\gamma'+12k^2)+4k\rho^3c'(c'''\gamma'-c'\gamma''')+$$
$$+6\rho^2(\rho'c'+\rho c'')^2(3\rho'\gamma'+\rho\gamma'')+\rho^2c'^2(6\rho''k\gamma'-12k\rho'\gamma''-2k\rho\gamma''')+$$
$$+4k^2(-6k\rho''c'+12k\rho'c''+2k\rho c''')=0\ldots\ldots(116^*)$$

$$\sigma''4k(3\rho^2\gamma'c'+2k^2)-\sigma'24\left(\rho\rho''k^2-\rho^2\rho'^2\gamma'c'-\frac{1}{2}\rho^3c''\gamma''\right)-$$
$$-2\rho^2\sigma'^3+$$
$$+8k(c''\gamma'-\gamma''c')(3\rho^2\gamma'c'+10k^2)+$$
$$+2\rho^2(c'''\gamma'-\gamma'''c')(\rho^2\gamma'c'+6k^2)=0\ldots\ldots(115^*)$$

Итакъ, замѣчая, что $\gamma''=c''=0$, получимъ изъ уравненія (112 *)

$$\rho\sigma''-4\rho'^3=0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что должно быть $\sigma''=0$, $\rho'=0$ слѣдовательно, $k=0$.

Получаются карты съ постояннымъ радіусомъ меридіановъ, причемъ центры меридіановъ лежатъ на прямой. — Въ самомъ дѣлѣ, интегрируя уравненіе $\gamma''=0$, получимъ

$$\gamma=mv+n,$$

гдѣ надо положить $m=m_0-m_1 i$, $n=n_0-n_1 i$, тогда

$$\gamma=m_0 v+n_0-i\,(m_1 v+n_1)$$

$$c=m_0 v+n_0+i\,(m_1 v+n_1),$$

отсюда координаты a, b центра меридіановъ выражаются по формуламъ

$$a=m_0 v+n_0,\quad b=m_1 v+n_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

Посмотримъ теперь, какія выходятъ параллели.

Уравненіе (115*) даетъ $\sigma'=0$, $\sigma=\text{const}$, $w=\text{const}$.

Уравненія (99), (100) обращаются въ слѣдующія:

$$x=m_0 v+n_0+\rho\cos\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (124)$$

$$y=m_1 v+n_1+\rho\sin\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (125)$$

$$\rho m_0\sin\varphi-\rho m_1\cos\varphi=u+w \ldots\ldots\ldots\ldots (126)$$

Умножая уравненіе (124) на $-m_1$, уравненіе (125) на m_0, складывая и пользуясь уравненіемъ (126), получимъ

$$ym_0-xm_1=n_1 m_0-m_1 n_0+u+w.$$

Параллели, слѣдовательно, выходятъ прямыми, параллельными между собой и параллельными линіи центровъ меридіановъ, ибо послѣдняя прямая имѣетъ уравненіе

$$ym_0-xm_1=n_1 m_0-m_1 n_0,$$

получаемое изъ уравненія (123) черезъ исключеніе долготы v.

23. Обращаясь къ общему случаю, перепишемъ систему (112 *), (113 *),... (118 *) въ такомъ видѣ:

$$\mathfrak{a}^2 M_1 - 2\rho^2 \mathfrak{b}^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (127)$$

$$2\mathfrak{a} A M_1 + \mathfrak{a}^2 \mathfrak{M} - 6\rho^2 B \mathfrak{b}^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (128)$$

$$(2\mathfrak{a}\alpha + A^2) M_1 + 2\mathfrak{a} A \mathfrak{M} + \mathfrak{a}^2 \mathrm{M}_1 - 6\rho^2 \mathfrak{b} (\mathfrak{b}\beta + B^2) = 0 \quad \ldots (129)$$

$$2\alpha \mathrm{A} M_1 + (2\mathfrak{a}\alpha + \mathrm{A}^2) \mathfrak{M} + 2\mathfrak{a} A \mathrm{M}_1 - 2\rho^2 B (6\mathfrak{b}\beta + B^2) = 0 \, . (130)$$

$$\alpha^2 M_1 + 2\alpha A \mathfrak{M} + (2\mathfrak{a}\alpha + A^2) \mathrm{M}_1 - 6\rho^2 \beta (\mathfrak{b}\beta + B^2) = 0 \ldots (131)$$

$$\alpha^2 \mathfrak{M} + 2\alpha \mathrm{A} \mathrm{M}_1 - 6\rho^2 B \beta^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (132)$$

$$\alpha^2 \mathrm{M}_1 - 2\rho^2 \beta^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (133)$$

гдѣ

$$M_1 = \rho\gamma' E - 3\rho\gamma''\sigma' + 6k(\rho''\gamma' - 2\rho'\gamma'') - 2k\rho\gamma''' \ldots (134)$$

$$\mathfrak{M} = 2kE - 6\rho\rho''\sigma' + 6k(c''\gamma' - c'\gamma'') + \rho^2(c'''\gamma' - \gamma'''c') \, . (135)$$

$$\mathrm{M}_1 = \rho c' E - 3\rho c''\sigma' - 6k(\rho'' c' - 2\rho' c'') + 2k\rho c''' \ldots (136)$$

Изъ уравненій (127) и (133) получаемъ

$$M_1 = \frac{2\rho^2 \mathfrak{b}^3}{\mathfrak{a}^2}, \quad \mathrm{M}_1 = \frac{2\rho^2 \beta^3}{\alpha^2}.$$

Подставляя въ уравненія (128) и (132), мы получимъ для $\mathfrak{M}$ двѣ величины

$$\mathfrak{M} = \frac{2\rho^2}{\mathfrak{a}^3} [3 B \mathfrak{a} \mathfrak{b}^2 - 2 A \mathfrak{b}^3]$$

$$\mathfrak{M} = \frac{2\rho^2}{\alpha^3} [3 B \alpha \beta^2 - 2 A \beta^3].$$

Отсюда сравнивая, получимъ

$$(\mathfrak{b}\alpha - \mathfrak{a}\beta) [3 B \mathfrak{a}\alpha (\mathfrak{b}\alpha + \mathfrak{a}\beta) - 2A(\mathfrak{b}^2\alpha^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta + \mathfrak{a}^2\beta^2)] = 0 \ldots (137)$$

24. **Остановимся сначала на случаѣ**

$$\mathfrak{b}\alpha - \mathfrak{a}\beta = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \frac{\beta}{\alpha} = -\lambda',$$

гдѣ λ' производная по v отъ нѣкоторой функціи λ, но $\mathfrak{b} = -\mathfrak{a}'$, $\beta = \alpha'$, отсюда

$$\mathfrak{a} = e^{\lambda}, \quad \alpha = Ce^{-\lambda},$$

гдѣ C постоянная произвольная величина.

Такъ какъ $\mathfrak{a}$ и α должны быть мнимыя сопряженныя, то

$$\lambda = \mu + i\nu, \quad C = C_0 + iC_1,$$

гдѣ μ и ν нѣкоторыя вещественныя функціи отъ v, а C_0 и C_1 числа постоянныя и должно быть

$$e^{\mu - i\nu} = (C_0 + iC_1)\, e^{-\mu - i\nu}.$$

Отсюда

$$e^{2\mu} = C_0 + iC_1;$$

это уравненіе даетъ $C_1 = 0$, а μ обращается въ постоянную, удовлетворяющую условію

$$e^{2\mu} = C_0.$$

Итакъ,

$$\mathfrak{a} = \sqrt{C_0}\, e^{i\nu}, \quad \alpha = \sqrt{C_0}\, e^{-i\nu}.$$

Имѣемъ право C_0 положить равнымъ единицѣ, тогда

$$\mathfrak{a} = e^{i\nu} = e^{\tau}, \quad \text{гдѣ} \quad \tau = i\nu.$$

Отсюда

$$\gamma' = \frac{e^{\tau}}{\rho}, \quad \gamma'' = e^{\tau}\,\frac{\rho\tau' - \rho'}{\rho^2},$$

$$\gamma''' = e^{\tau}\left[\tau'\,\frac{\rho\tau' - \rho'}{\rho^2} + \left(\frac{\rho\tau' - \rho'}{\rho^2}\right)'\right].$$

Отсюда уравненіе (122) обращается въ такое:

$$3\,(\rho\tau' - \rho')^2 - \rho\tau'\,(\rho\tau' - \rho') - \rho^2\,\tau'' - \rho\rho'\tau' + \rho\rho'' + 2\rho\rho'\tau' - 2\rho'^2 = 0.$$

Принимая во вниманіе, что $\rho\rho'' + \rho'^2 = 0$, получимъ

$$2\rho^2\tau'^2 - 4k\tau' - \rho^2\tau'' = 0,$$

откуда

$$2\rho^2\nu'^2 + i\,(4k\nu' + \rho^2\nu'') = 0,$$

отсюда $\nu' = 0$, слѣдовательно, $\mathfrak{a}$ число постоянное. Таково же должно быть и число α.

Отсюда $\mathfrak{b} = \beta = 0$.

Итакъ, предполагая $\mathfrak{a}$ и α постоянными, получимъ

$$\gamma' = \frac{\mathfrak{a}}{\rho}, \quad \gamma'' = -\mathfrak{a}\frac{\rho'}{\rho^2}, \quad \gamma''' = \mathfrak{a}\frac{3\rho'^2}{\rho^3};$$

подобныя же формулы получаются для c', c'', c''',...

$$M_1 = \mathfrak{a}\, E + 3\frac{\rho'}{\rho}\mathfrak{a}\sigma' + 6k\mathfrak{a}\left\{\frac{\rho''}{\rho} + \frac{2\rho'^2}{\rho^2}\right\} - 6k\mathfrak{a}\frac{\rho'^2}{\rho^2} =$$

$$= \mathfrak{a}\left[E + 3\frac{\rho'}{\rho}\sigma'\right].$$

Подобнымъ же образомъ вычислимъ

$$\mathfrak{M} = 2k\left[E + 3\frac{\rho'}{\rho}\sigma'\right], \quad \mathrm{M}_1 = \alpha\left[E + 3\frac{\rho'}{\rho}\sigma'\right],$$

гдѣ

$$E = \sigma''.$$

Уравненіе (127) даетъ $M_1 = 0$, откуда $\mathfrak{M} = 0$ и $\mathrm{M}_1 = 0$, но тогда по уравненію (130) $B = 0$, что даетъ $\sigma = \text{const}$ и карты опредѣляются уравненіями

$$\gamma' = \frac{\lambda - \mu i}{\sqrt{2kv + l}},$$

гдѣ λ и μ постоянныя вещественныя числа; отсюда, переходя къ первоначальному обозначенію

$$\gamma = a - bi,$$

получимъ

$$a' = \frac{\lambda}{\sqrt{2kv + l}}, \quad b' = \frac{\mu}{\sqrt{2kv + l}}.$$

Интегрируя, получимъ

$$a = a_0 + \frac{\lambda}{k}\sqrt{2kv + l}, \quad b = b_0 + \frac{\mu}{k}\sqrt{2kv + l}.$$

Карты опредѣляются уравненіями

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 + \sqrt{2kv + l}\left[\frac{\lambda}{k} + \cos\varphi\right] \\ y &= b_0 + \sqrt{2kv + l}\left[\frac{\mu}{k} + \sin\varphi\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (138)$$

гдѣ φ опредѣляется по уравненію

$$\lambda \sin\varphi - \mu \cos\varphi + k\varphi = u + w \quad \ldots\ldots\ldots (139)$$

гдѣ w число постоянное.

Меридіаны опредѣляются уравненіемъ

$$\left(x - a_0 - \frac{\lambda}{k}\sqrt{2kv + l}\right)^2 + \left(y - b_0 - \frac{\mu}{k}\sqrt{2kv + l}\right)^2 = 2kv + l,$$

а параллели имѣютъ уравненіе

$$y - b_0 = \frac{\mu + k\sin\varphi}{\lambda + k\cos\varphi}(x - a_0).$$

Уголъ φ есть функція отъ одного u, неявно опредѣляемая при помощи уравненія (139).

25. Итакъ, остается разобрать равенство нулю другого множителя уравненія (137)

$$3B\mathfrak{a}\alpha(\mathfrak{b}\alpha + \mathfrak{a}\beta) = 2\mathrm{A}\left[\mathfrak{b}^2\alpha^2 + \mathfrak{b}\mathfrak{a}\alpha\beta + \mathfrak{a}^2\beta^2\right] \quad \ldots\ldots (140)$$

Подставляя выраженія для M_1 и M_1, полученныя изъ уравненій (127) и (133) въ уравненія (129) и (131), получимъ

$$\mathfrak{M} = \frac{\rho^2}{\mathrm{A}}\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\left[3(\mathfrak{b}\beta + B^2) - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2}(\mathfrak{a}\alpha + \mathrm{A}^2) - \frac{\mathfrak{b}^3\alpha^3 + \mathfrak{a}^3\beta^3}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha^2}\right]$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\rho^2}{\mathrm{A}}\frac{\beta}{\alpha}\left[3(\mathfrak{b}\beta + B^2) - \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\mathfrak{a}\alpha + \mathrm{A}^2) - \frac{\mathfrak{b}^3\alpha^3 + \mathfrak{a}^3\beta^3}{\alpha\beta\mathfrak{a}^2}\right].$$

Сравнивая получимъ

$$3\mathfrak{a}^2\alpha^2(\mathfrak{b}\beta + B^2) = (\mathfrak{a}\alpha + \mathrm{A}^2)(\mathfrak{b}^2\alpha^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta + \mathfrak{a}^2\beta^2) \quad . (141)$$

Изъ уравненій (140) и (141) выводимъ слѣдующее заключеніе: уравненіе (140) даетъ

$$B^2\mathfrak{a}^2\alpha^2 = \frac{4}{9}\frac{\mathrm{A}^2}{(\mathfrak{b}\alpha + \mathfrak{a}\beta)^2}\left[\mathfrak{b}^2\alpha^2 + \mathfrak{b}\mathfrak{a}\alpha\beta + \mathfrak{a}^2\beta^2\right]^2.$$

Уравненіе же (141) можно написать такъ:

$$3B^2\mathfrak{a}^2\alpha^2 - \mathrm{A}^2(\mathfrak{b}^2\alpha^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta + \mathfrak{a}^2\beta^2) = \mathfrak{a}\alpha(\mathfrak{b}\alpha - \mathfrak{a}\beta)^2$$

откуда, подставляя, получимъ

$$\left[\frac{4}{3}\,\frac{A^2}{(\mathfrak{b}\alpha+\mathfrak{a}\beta)^2}\,\mathrm{H}-\mathrm{A}^2\right]\mathrm{H}=\mathfrak{a}\alpha\,(\mathfrak{b}\alpha-\mathfrak{a}\beta)^2,$$

гдѣ

$$\mathrm{H}=\mathfrak{b}^2\alpha^2+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta+\mathfrak{a}^2\beta^2,$$

но замѣчая, что

$$4\,\mathrm{H}-3\,(\mathfrak{b}\alpha+\mathfrak{a}\beta)^2=(\mathfrak{b}\alpha-\mathfrak{a}\beta)^2$$

и сокращая на $(\mathfrak{b}\alpha-\mathfrak{a}\beta)^2$, получимъ

$$A^2(\mathfrak{b}^2\alpha^2+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta+\mathfrak{a}^2\beta^2)=3\mathfrak{a}\alpha(\mathfrak{b}\alpha+\mathfrak{a}\beta)^2\,.\,.\,.\,.\,.\,(142)$$

Изъ уравненій (140) и (142) получимъ

$$AB=2(\mathfrak{b}\alpha+\mathfrak{a}\beta)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(143)$$

Послѣднее уравненіе даетъ самое общее выраженіе для σ по γ.

Необходимо помнить, что γ должна удовлетворять уравненію (122), а потому самое общее выраженіе для $\mathfrak{a}$ и α будетъ имѣть видъ:

$$\mathfrak{a}=\rho\gamma'=\sqrt{\frac{2kv+l}{2\lambda v+\mu}},\quad \alpha=\rho\sigma'=\sqrt{\frac{2kv+l}{2\lambda' v+\mu'}},$$

гдѣ λ и λ' суть мнимыя сопряженныя величины подобно тому какъ μ и μ'.

Если $\mathfrak{a}$ и α не постоянныя, какъ это было въ случаѣ уже разобранномъ, то не должны равняться нулю числа

$$k\mu-\lambda l,\quad k\mu'-\lambda' l,$$

ибо

$$\mathfrak{a}'=-\mathfrak{b}=\frac{\mu k-l\lambda}{\sqrt{2kv+l}\,(2\lambda v+\mu)^{3/2}};\quad \alpha'=\beta=\frac{\mu' k-l\lambda'}{\sqrt{2kv+l}\,(2\lambda' v+\mu')^{3/2}}.$$

Далѣе

$$\mathfrak{a}\beta+\mathfrak{b}\alpha=\mathfrak{a}\alpha'-\alpha\mathfrak{a}'=\frac{(2kv+l)\,(\lambda\mu'-\mu\lambda')}{(2\lambda v+\mu)^{3/2}\,(2\lambda' v+\mu')^{3/2}},$$

но $\lambda\mu'-\mu\lambda'$ не равно нулю, ибо тогда равнялось бы нулю $\mathfrak{a}\beta+\mathfrak{b}\alpha$ и на основаніи уравненія (140) получилось бы

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta=0,$$

что приводится къ случаямъ уже разобраннымъ.

Умножая уравненіе (140) на A, получимъ

$$3AB\mathfrak{a}\alpha(\mathfrak{b}\alpha+\mathfrak{a}\beta)=8k^2[\mathfrak{b}^2\alpha^2+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\alpha\beta+\mathfrak{a}^2\beta^2];$$

на основаніи уравненія (143), получимъ

$$3(\mathfrak{a}\alpha'-\alpha\mathfrak{a}')^2\mathfrak{a}\alpha=4k^2\{(\mathfrak{a}\alpha'-\alpha\mathfrak{a}')^2+\mathfrak{a}\alpha\mathfrak{a}'\alpha'\}.$$

Подставляя вмѣсто $\mathfrak{a}$, α, $\mathfrak{a}'$, α' приведенныя выше общія выраженія, приходимъ къ уравненію

$$3\frac{(2kv+l)^3}{\sqrt{(2\lambda v+\mu)(2\lambda' v+\mu')}}=4k^2[(2kv+l)^2-\mathfrak{y}(2\lambda v+\mu)(2\lambda' v+\mu')]\ (144)$$

гдѣ

$$\mathfrak{y}=\frac{(\mu k-l\lambda)(\mu' k-l\lambda')}{(\lambda\mu'-\mu\lambda')^2}$$

$\mathfrak{y}$ не нуль и не безконечность.

Равенство (144), очевидно, должно быть тождествомъ, что невозможно, ибо для тѣхъ значеній v, которыя обращаютъ первую часть въ безконечность, вторая часть сохраняетъ конечную величину.

26. Резюмируя все сказанное, мы замѣчаемъ, что основное уравненіе

$$3\gamma''-\gamma'\gamma'''=0,$$

которое можно переписать такъ:

$$3\mathfrak{a}'^2-\mathfrak{a}\mathfrak{a}''-\tau\mathfrak{a}\mathfrak{a}'=0,$$

гдѣ

$$\tau=\frac{4k}{\rho^2}$$

обладаетъ свойствомъ, что его общее рѣшеніе приводитъ къ противорѣчію.

Получаются три вида проекцій. — Черезъ перестановку перемѣнныхъ u и v получаемъ еще три сорта проекцій, гдѣ параллели круги, а меридіаны прямыя.

Проекціи получаются отъ особенныхъ рѣшеній

$$\mathfrak{a}=0,\quad \mathfrak{a}'=0,\quad \mathfrak{a}=l_1\rho.$$

Это обстоятельство, какъ мы увидимъ, имѣетъ мѣсто также и въ общемъ случаѣ круговыхъ проекцій, когда обѣ системы, какъ меридіаны, такъ и параллели состоятъ изъ круговъ.

27. Обращаясь къ выводу проекцій круговыхъ, возьмемъ прежнія знакоположенія.

Получаемъ

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho' A_1 - 2\rho\varphi' B_1 + \rho^2 \varphi'^2.$$

Дифференцируя, получимъ

$$\begin{aligned} x'x'' + y'y'' = a'a'' + b'b'' + \rho'\rho'' + \rho' A_2 + \rho'' A_1 + \\ + \varphi' [-2\rho' B_1 - \rho B'_2] \\ + \varphi'^2 [-\rho A_1 + k] \\ + \varphi'' [-\rho B_1] \\ + \varphi' \varphi'' \rho^2. \end{aligned}$$

У насъ было

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' = a'b'' - b'a'' + \rho'' B_1 - \rho' B_2 + \\ + \varphi' [2\rho' A_1 - \rho A_2 + 2\rho'_2 - \rho\rho''] \\ + \varphi'^2 [-\rho B_1] \\ + \varphi'^3 \rho^2 \\ + \varphi'' [\rho A_1 + k]. \end{aligned}$$

Дифференцируя, получимъ

$$\left.\begin{aligned} x'y''' - y'x''' = a'b''' - b'a''' + \rho''' B_1 - \rho' B_3 + \\ + \varphi' [3\rho'' A_1 - \rho A_3 + 3\rho'\rho'' - \rho\rho'''] \\ + \varphi'^2 [-3\rho' B_1] \\ + \varphi'^3 [-\rho A_1 + 2k] \\ + \varphi'' 3\rho' [A_1 + \rho'] + \varphi'' \varphi'^2 3\rho^2 + \varphi'' \varphi' [-3\rho B_1] \\ + \varphi''' [\rho A_1 + k]. \end{aligned}\right\} \ldots (145)$$

Уравненія (102), (103) и то, которое получается изъ (103) черезъ дифференцированіе, дадутъ возможность исключить изъ уравненія

$$3(x'x''+y'y'')(x'y''-x''y')-(x'^2+y'^2)(x'y'''-x'''y')=0$$

производныя φ', φ'', φ''', такъ что останется одно уравненіе вида:

$$f(\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi)=0,$$

въ которомъ f есть цѣлая функція отъ φ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ съ коэффиціентами, функціями отъ одного v.

28. Дифференцируя уравненіе (103), получимъ

$$\left.\begin{aligned}
&-w'''+\rho'''B_1+3\rho''B_2+3\rho'B_3+\rho B_4+k'''\varphi+\\
&+\varphi'\,3\,[\rho''A_1+2\rho'A_2+\rho A_3+k'']\\
&+\varphi'^2\,3\,[-\rho'B_1-\rho B_2]\\
&+\varphi'^3\,[-\rho A_1]\\
&+\varphi''\,3\,[\rho'A_1+\rho A_2+k']\\
&+\varphi'\varphi''\,3\,[-\rho B_1]\\
&+\varphi'''\,[\rho A_1+k]=0.
\end{aligned}\right\}\ldots(146)$$

Вычитая изъ (145) равенство (146), получимъ

$$\left.\begin{aligned}
x'y'''-y'x'''=&\,a'b'''-b'a'''+w'''-3\rho''B_2-4\rho'B_3-\rho B_4-k'''\varphi\\
&+\varphi'\,[-6\rho'A_2-4\rho A_3-6\rho'\rho''-4\rho\rho''']\\
&+\varphi'^2\,[3\rho B_2]\\
&+\varphi'^3\,2k\\
&+\varphi''\,[-3\rho A_2-3\rho\rho'']\\
&+\varphi'^2\varphi''\,3\rho^2.
\end{aligned}\right\}\ldots(147)$$

Исключимъ изъ выраженія $x'y'''-y'x'''$ производную φ'' на основаніи уравненія (103).

Въ самомъ дѣлѣ, умножая на $A_1+\rho'$, получимъ

$$(A_1+\rho')(x'y'''-x'''y')=(A_1+\rho')\,\mathrm{H}$$

$$+3\,[-\varphi''(\rho A_1+k)]\,(A_2+\rho''-\rho\varphi'^2)$$

где

$$\mathrm{H} = a'b''' - a'''b' + w''' - 3\rho''B_2 - 4\rho'B_3 - \rho B_4 - k'''\varphi +$$
$$+ \varphi'[-6\rho'(A_2 + \rho'') - 4\rho(A_3 + \rho''')] +$$
$$+ \varphi'^2[3\rho B_2]$$
$$+ \varphi'^3 2k.$$

На основаніи уравненія (103) получимъ

$$(A_1 + \rho')(x'y''' - x'''y') = (A_1 + \rho')\mathrm{H} +$$
$$+ 3(A_2 + \rho'' - \rho\varphi'^2)\left\{\begin{matrix} -w'' + \rho''B_1 + 2\rho'B_2 + \rho B_3 + k''\varphi \\ + \varphi'^2 2(\rho'A_1 + \rho A_2 + k') - \varphi'^2\rho B_1 \end{matrix}\right\}.$$

Итакъ,

$$(A_1 + \rho')(x'y''' - y'x''') = P_0 + P_1\varphi' + P_2\varphi'^2 + P_3\varphi'^3 + P_4\varphi'^4,$$

где

$$P_0 = (A_1 + \rho')[a'b''' - a'''b' + w''' - 3\rho''B_2 - 4\rho'B_3 - \rho B_4 - k'''\varphi] +$$
$$+ 3(A_2 + \rho'')[-w'' + \rho''B_1 + 2\rho'B_2 + \rho B_3 + k''\varphi],$$

$$P_1 = 6\rho(A_2 + \rho'')^2 - 4\rho(A_1 + \rho')(A_3 + \rho'''),$$

$$P_2 = 3\rho[w'' + A_1B_2 - A_2B_1 - k''\varphi - 2\rho''B_1 - \rho'B_2 - \rho B_3],$$

$$P_3 = \rho[-4\rho'(A_1 + \rho') - 6\rho(A_2 + \rho'')],$$

$$P_4 = 3\rho^2 B_1.$$

29. Мы видѣли уже, что

$$x'y'' - y'x'' = N_0 + N_1\varphi' + N_2\varphi'^2 + N_3\varphi'^3,$$

где

$$N_0 = a'b'' - a''b' + w'' - 3\rho'B_2 - \rho B_3 - k''\varphi,$$

$$N_1 = -3\rho(A_2 + \rho''),$$

$$N_2 = 0,$$

$$N_3 = \rho^2.$$

Кромѣ того

$$x'^2 + y'^2 = L_0 + L_1 \varphi' + L_2 \varphi'^2,$$

гдѣ

$$L_0 = a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho' A_1,$$

$$L_1 = -2\rho B_1,$$

$$L_2 = \rho^2.$$

Дифференцируя и умножая на $A_1 + \rho'$, получимъ

$$(A_1 + \rho')(x'x'' + y'y'') = (A_1 + \rho') K + \varphi'' \rho (A_1 + \rho') [-B_1 + \rho\varphi'],$$

гдѣ

$$K = a'a'' + b'b'' + \rho'\rho'' + \rho' A_2 + \rho'' A_1 +$$
$$+ \varphi' [-2\rho' B_1 - \rho B_2]$$
$$+ \varphi'^2 [-\rho A_1 + k].$$

Отсюда, принимая во вниманіе уравненіе (123), получимъ

$$(A_1 + \rho')(x'x'' + y'y'') = K(A_1 + \rho') -$$
$$-[-B_1 + \rho\varphi'] \left\{ \begin{array}{r} -w'' + \rho'' B_1 + 2\rho' B_2 + \rho B_3 + k''\varphi + \\ + 2\varphi'(\rho' A_1 + \rho A_2 + k') - \varphi'^2 \rho B_1 \end{array} \right\},$$

такъ что

$$(A_1 + \rho')(x'x'' + y'y'') = M_0 + M_1 \varphi' + M_2 \varphi'^2 + M_3 \varphi'^3,$$

гдѣ

$$M_0 = (A_1 + \rho')[a'a'' + b'b'' + \rho'\rho'' + \rho' A_2 + \rho'' A_1] +$$
$$+ B_1 [-w'' + \rho'' B_1 + 2\rho' B_2 + \rho B_3 + k''\varphi],$$

$$M_1 = w''\rho + 2\rho A_2 B_1 - \rho A_1 B_2 + (k' - \rho'^2) B_1 - 3k B_2 - \rho^2 B_3 - k''\varphi\rho$$

$$M_2 = -\rho [A_1^2 + B_1^2 - \rho'^2 + 2k' + 2\rho' A_1 + 2\rho A_2],$$

$$M_3 = \rho^2 B_1.$$

30. Такъ какъ параллели должны быть тоже круги, то взявъ дифференціальное уравненіе круга

$$3(x'y'' - x''y')(x'x'' + y'y'') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') = 0,$$

получимъ послѣ подстановки

$$3\,[N_0 + N_1\varphi' + N_2\varphi'^2 + N_3\varphi'^3]\,[M_0 + M_1\varphi' + M_2\varphi'^2 + M_3\varphi'^3] -$$
$$- [L_0 + L_1\varphi' + L_2\varphi'^2]\,[P_0 + P_1\varphi' + P_2\varphi'^2 + P_3\varphi'^3 + P_4\varphi'^4] = 0.$$

Раскрывая скобки, получимъ

$$\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_1\varphi' + \mathfrak{M}_2\varphi'^2 + \mathfrak{M}_3\varphi'^3 + \mathfrak{M}_4\varphi'^4 + \mathfrak{M}_5\varphi'^5 + \mathfrak{M}_6\varphi'^6 = 0 \quad (148)$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_6 = 3N_3M_3 - L_2P_4 = 3\rho^2\rho^2B_1 - \rho^2 3\rho^2 B_1 = 0,$$
$$\mathfrak{M}_5 = 3N_3M_2 + 3N_2M_3 - L_2P_3 - L_1P_4 =$$
$$= 3N_3M_2 - L_2P_3 - L_1P_4 = \rho^3[3(B_1^2 - A_1^2) - 2A_1\rho' + \rho'^2].$$

Остается изъ уравненія (148) исключить φ' при помощи уравненія (102), причемъ получимъ уравненіе вида:

$$f(\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos\varphi) = 0.$$

31. Посмотримъ, какъ въ это уравненіе будетъ входить дуга φ. Дуга φ входитъ явно въ первой степени въ коэффиціентахъ

$$M_0,\ M_1,\ N_0,\ P_0,\ P_2,$$

слѣдовательно, она можетъ входить во второй степени лишь въ коэффицентахъ

$$\mathfrak{M}_0,\ \mathfrak{M}_1$$

и въ первой степени въ коэффиціентахъ

$$\mathfrak{M}_2,\ \mathfrak{M}_3.$$

Что же касается коэффиціента $\mathfrak{M}_4$, то въ него дуга φ явно не входитъ, ибо

$$\mathfrak{M}_4 = 3N_1M_3 + 3N_3M_1 - L_0P_4 - L_1P_3 - L_2P_2 =$$
$$= 3\rho^2B_1[-3\rho(A_2 + \rho'')] +$$
$$+ 3\rho^2[w''\rho + 2\rho A_2B_1 - \rho A_1B_2 + (k' - \rho'^2)B_1 - 3kB_2 - \rho^2B_3 - k''\varphi\rho]$$
$$- 3\rho^2B_1[a'^2 + b'^2 + \rho'^2 + 2\rho' A_1] +$$
$$+ 2\rho^2B_1[-4\rho'(A_1 + \rho') - 6\rho(A_2 + \rho'')] -$$
$$- 3\rho^3[w'' + A_1B_2 - A_2B_1 - k''\varphi - 2\rho''B_1 - \rho'B_2 - \rho B_3];$$

послѣднее выраженіе показываетъ, что члены съ φ сокращаются.

Отсюда мы замѣчаемъ, что по умноженіи всего уравненія на $(\rho A_1 + k)^5$, получимъ

$$\mathfrak{M}_5 k'^5 \varphi^5 + \varphi^4 Q_1 + \varphi^3 Q_2 + \varphi^2 Q_3 + \varphi Q_4 + Q_5 = 0 \ldots . (149)$$

Коэффиціенты

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ Q_5$$

суть цѣлыя функціи отъ $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ съ коэффиціентами, функціями отъ одного v.

Уравненію (149) не иначе возможно удовлетворить, какъ полагая

$$\mathfrak{M}_5 k'^5 = 0,\ Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ Q_3 = 0,\ Q_4 = 0,\ Q_5 = 0,$$

ибо въ обратномъ случаѣ φ выражалось бы алгебраически черезъ $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

32. Разсмотримъ случай $\mathfrak{M}_5 = 0$

Получается уравненіе

$$3\,(B_1^2 - A_1^2) - 2A_1 \rho' + \rho'^2 = 0.$$

Раскрывая получимъ

$$3\,[(a' \sin\varphi - b' \cos\varphi)^2 - (a' \cos\varphi + b' \sin\varphi)^2] + \rho'^2 -$$

$$- 2\rho'(a' \cos\varphi + b' \sin\varphi) = 0$$

$$3\,(a'^2 - b'^2) \sin^2\varphi - 12a'b' \sin\varphi \cos\varphi + 3(b'^2 - a'^2)\cos^2\varphi -$$

$$- 2\rho' a' \cos\varphi - 2\rho' b' \sin\varphi + \rho'^2 = 0.$$

Этому уравненію возможно удовлетворить не иначе, какъ полагая

$$a'^2 - b'^2 = 0,\ \ a'b' = 0,\ \ \rho' a' = 0,\ \ \rho' b' = 0,\ \ \rho' = 0.$$

Отсюда

$$a' = 0,\ \ b' = 0,\ \ \rho' = 0$$

и, слѣдовательно, проекцій нѣтъ.

Остается, слѣдовательно, единственно возможный случай

$$k' = 0,$$

тогда

$$\rho\rho' = \text{const},$$

откуда

$$\rho = \sqrt{2kv + l},$$

гдѣ k и l числа постоянныя

33. Итакъ, мы доказали, что возможныя карты будутъ при $k' = 0$, остается ихъ найти.

Легко замѣтить, что для опредѣленія координатъ a и b центра меридіановъ можно употребить тотъ же самый пріемъ отдѣленія перемѣнныхъ при помощи введенія мнимостей, который мы употребляли для случая картъ смѣшанныхъ.

Вводя

$$a + bi = c, \quad a - bi = \gamma$$

можно будетъ получить дифференціальное уравненіе для опредѣленія γ.

Если бы мы производили выкладку аналогично тому, какъ мы это дѣлали въ предыдущей задачѣ, то мы пришли бы, разсматривая уравненіе

$$3(x'x'' + y'y'')(x'y'' - x''y') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') = 0. \quad (150)$$

къ уравненію вида:

$$O_0 z^8 + O_1 z^7 + \dots + O_7 z + \mathfrak{O} +$$
$$+ \Omega_0 t^8 + \Omega_1 t^7 + \dots + \Omega_7 t = 0.$$

Какъ слѣдствіе этого уравненія получается система

$$\left.\begin{array}{l} O_0 = 0, \;\; O_1 = 0, \;\; \dots \;\; O_7 = 0, \;\; \mathfrak{O} = 0 \\ \Omega_0 = 0, \;\; \Omega_1 = 0, \;\; \dots \;\; \Omega_7 = 0. \end{array}\right\} \dots\dots (151)$$

Для рѣшенія задачи придется удовлетворить самымъ общимъ образомъ этой системѣ выборомъ функцій a и b, или, что одно и то же, выборомъ функціи γ.

На основаніи уже упомянутыхъ соображеній, уравненія $\Omega_0 = 0$, $\Omega_1 = 0, \ldots \Omega_7 = 0$ можно не разсматривать, ибо они получаются отъ замѣны $+i$ на $-i$ изъ остальныхъ.

Принимая во вниманіе, что насъ интересуютъ лишь дѣйствительныя карты, то функціи a и b суть дѣйствительныя функціи перемѣнной v и, слѣдовательно, каждое изъ остальныхъ уравненій равносильно двумъ получающимся приравнивая нулю дѣйствительную часть и коэффиціентъ при i.

34. Дифференцируя выраженіе (107), полученное нами для $2i(x'y''-x''y')$, получимъ

$$2i(x'y'''-x'''y') = c'''\gamma' - \gamma'''c' + \sigma''' - z(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{IV}) +$$
$$+ t(3\rho''c'' + 4\rho'c''' + \rho c^{IV}) -$$
$$- i\varphi'[z(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') + 2\rho\rho''' - 6\rho'\rho'' + t(6\rho'c'' + 4\rho c''')] +$$
$$+ \varphi'^2\, 3\rho(z\gamma'' - tc'') + \varphi'^3\, 4ik +$$
$$+ i\varphi''[6\rho^2\varphi'^2 + 6\rho'^2 - 3\rho(z\gamma'' + tc'')] =$$
$$= \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1\varphi' i + \mathfrak{A}_2\varphi'^2 + \mathfrak{A}_3\varphi'^3 i + i\varphi''[\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2\varphi'^2].$$

Подобнымъ образомъ

$$x'^2 + y'^2 = c'\gamma' + z\rho'\gamma' + tc'\rho' + \rho'^2 + i\rho\varphi'(z\gamma' - c't) +$$
$$+ \rho^2\varphi'^2 = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1 i\varphi' + \mathfrak{L}_2\varphi'^2.$$

Дифференцируя, получаемъ

$$2(x'x'' + y'y'') = c''\gamma' + c'\gamma'' + 2\rho'\rho'' + z(\rho'\gamma')' + t(\rho'c')' +$$
$$+ i\varphi'\,[(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'')z - (2\rho'c' + \rho c'')t]$$
$$+ \varphi'^2\,[2k - \rho\gamma'z - \rho c't]$$
$$+ i\varphi''\,[\rho(z\gamma' - tc') - i2\rho^2\varphi'] =$$
$$= \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1\varphi' i + \mathfrak{C}_2\varphi'^2 + \varphi'' i\,[\mathfrak{F}_0 + i\mathfrak{F}_1\varphi'].$$

Кромѣ того обозначимъ

$$2i(x'y'' - y'x'') = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1 i\varphi' + \mathfrak{D}_3 i\varphi'^3.$$

Получается слѣдующая таблица коэффиціентовъ

$$\mathfrak{A}_0 = \sigma''' + c'''\gamma' - c'\gamma''' - z[3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{IV}] +$$
$$+ t[3\rho''c'' + 4\rho'c''' + \rho c^{IV}]$$

$$\mathfrak{A}_1 = 6\rho'\rho'' - 2\rho\rho''' - z(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') - t(6\rho'c'' + 4\rho c''')$$

$$\mathfrak{A}_2 = 3\rho(z\gamma'' - tc''); \quad \mathfrak{A}_3 = 4k$$

$$\mathfrak{B}_0 = 6\rho'^2 - 3\rho\gamma''z - 3\rho c''t; \quad \mathfrak{L}_0 = \rho'^2 + c'\gamma' + z\rho'\gamma' + t\rho'c'$$

$$\mathfrak{B}_1 = 0 \quad ; \quad \mathfrak{L}_1 = \rho(z\gamma' - tc')$$

$$\mathfrak{B}_2 = 6\rho^2 \quad ; \quad \mathfrak{L}_2 = \rho^2.$$

$$\mathfrak{D}_0 = \sigma'' + c''\gamma' - \gamma''c' - z(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''') + t(3\rho'c'' + \rho c''')$$

$$\mathfrak{D}_1 = -3\rho[z\gamma'' + tc'' + 2\rho'']$$

$$\mathfrak{D}_3 = 2\rho^2$$

$$\mathfrak{E}_0 = c''\gamma' + c'\gamma'' + 2\rho'\rho'' + z(\rho'\gamma')' + t(\rho'c')'$$

$$\mathfrak{E}_1 = z(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'') - t(2\rho'c' + \rho c'')$$

$$\mathfrak{E}_2 = 2k - z\rho\gamma' - t\rho c'$$

$$\mathfrak{F}_0 = \rho(z\gamma' - tc')$$

$$\mathfrak{F}_1 = -2\rho^2.$$

Уравненіе (150) принимаетъ видъ:

$$3[\mathfrak{D}_0 + i\varphi'\mathfrak{D}_1 + i\varphi'^3\mathfrak{D}_3][\mathfrak{E}_0' + i\varphi'\mathfrak{E}_1 + \varphi'^2\mathfrak{E}_2 + i\varphi''(\mathfrak{F}_0 + i\varphi'\mathfrak{F}_1)] -$$
$$-2[\mathfrak{L}_0 + i\varphi'\mathfrak{L}_1 + \varphi'^2\mathfrak{L}_2][\mathfrak{A}_0 + i\varphi'\mathfrak{A}_1 + \varphi'^2\mathfrak{A}_2 + i\varphi'^3\mathfrak{A}_3 + i\varphi''(\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_2\varphi'^2)] = 0.$$

Раскрывая скобки, получимъ

$$\left.\begin{array}{l} M_0 + i\varphi' M_1 + \varphi'^2 M_2 + i\varphi'^3 M^3 + \varphi'^4 M_4 + i\varphi'^5 M_5 + \\ + i\varphi''[N_0 + i\varphi' N_1 + \varphi'^2 N_2 + i\varphi'^3 N_3 + \varphi'^4 N_4] = 0 \end{array}\right\} \ldots (152)$$

гдѣ

$$M_0 = 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{E}_0 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_0$$

$$M_1 = 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_0 + 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{E}_1 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_1 - 2\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{L}_1$$

$$M_2 = 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{E}_2 - 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_1 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_2 + 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}_1 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{A}_0$$

$$M_3 = 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_2 + 3\mathfrak{D}_3\,\mathfrak{E}_0 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_3 - 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}_2 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{A}_1$$

$$M_4 = -3\mathfrak{D}_3\,\mathfrak{E}_1 + 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}_3 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{A}_2$$

$$M_5 = 3\mathfrak{D}_3\,\mathfrak{E}_2 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{A}_3$$

$$N_0 = 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{F}_0 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{B}_0$$

$$N_1 = 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{F}_1 + 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{F}_0 - 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{B}_0$$

$$N_2 = -3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{F}_1 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{B}_2 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{B}_0$$

$$N_3 = 3\mathfrak{D}_3\,\mathfrak{F}_0 - 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{B}_2$$

$$N_4 = -3\mathfrak{D}_3\,\mathfrak{F}_1 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{B}_2.$$

Прежде всего мы замѣчаемъ, что $N_4 = 0$, ибо

$$-3\mathfrak{D}_3\,\mathfrak{F}_1 - 2\mathfrak{L}_2\,\mathfrak{B}_2 = -6\rho^2(-2\rho^2) - 2\rho^2\,6\rho^2 = 0.$$

Обозначая по прежнему

$$A_0 = \mathfrak{a}z + \mathrm{A} + \alpha t,$$

гдѣ

$$\mathfrak{a} = \rho\gamma', \quad \mathrm{A} = 2k, \quad \alpha = \rho c',$$

получимъ

$$i\varphi'' A_0 = K_0 + K_1 i\varphi' + K_2\varphi'^2,$$

гдѣ

$$K_0 = \sigma'' - (\rho\gamma')'' z + (\rho c')'' t,$$

$$K_1 = -2\,[z(\rho\gamma')' + t(\rho c')'],$$

$$K_2 = \rho\,[z\gamma' - tc'].$$

Умножая уравненіе (152) на A_0, получимъ

$$A_0\,[M_0 + i\varphi' M_1 + \varphi'^2 M_2 + i\varphi'^3 M_3 + \varphi'^4 M_4 + i\varphi'^5 M_5] +$$
$$+ (K_0 + K_1 i\varphi' + K_2\varphi'^2)\,[N_0 + N_1 i\varphi' + N_2\varphi'^2 + N_3 i\varphi'^3] = 0.$$

Это уравненіе получитъ окончательно видъ:

$$\mathfrak{M}_0 + i\varphi'\mathfrak{M}_1 + \varphi'^2\mathfrak{M}_2 + i\varphi'^3\mathfrak{M}_3 + \varphi'^4\mathfrak{M}_4 + i\varphi^5\mathfrak{M}_5 = 0\ldots(153)$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_0 = A_0 M_0 + K_0 N_0$$

$$\mathfrak{M}_1 = A_0 M_1 + K_0 N_1 + K_1 N_0$$

$$\mathfrak{M}_2 = A_0 M_2 + K_0 N_2 - K_1 N_1 + K_2 N_0$$

$$\mathfrak{M}_3 = A_0 M_3 + K_0 N_3 + K_1 N_2 + K_2 N_1$$

$$\mathfrak{M}_4 = A_0 M_4 \qquad - K_1 N_3 + K_2 N_2$$

$$\mathfrak{M}_5 = A_0 M_5 \qquad + K_2 N_3.$$

35. Займемся разсмотрѣніемъ уравненія (153).

Умножая его на A_0^5 и замѣчая, что

$$i\varphi' A_0 = B_0 = \mathfrak{b} z + B + \beta t,$$

гдѣ

$$\mathfrak{b} = -(\rho\gamma')', \quad B = \sigma', \quad \beta = (\rho c')',$$

получимъ

$$\mathfrak{M}_0 A_0^5 + \mathfrak{M}_1 A_0^4 (i\varphi' A_0) - \mathfrak{M}_2 A_0^3 (i\varphi' A_0)^2 - \mathfrak{M}_3 A_0^2 (i\varphi' A_0)^3 +$$
$$+ \mathfrak{M}_4 A_0 (i\varphi' A_0)^4 + \mathfrak{M}_5 (i\varphi' A_0)^5 = 0.$$

Откуда окончательно

$$\mathfrak{M}_0 A_0^5 + \mathfrak{M}_1 B_0 A_0^4 - \mathfrak{M}_2 B_0^2 A_0^3 - \mathfrak{M}_3 B_0^3 A_0^2 +$$
$$+ \mathfrak{M}_4 B_0^4 A_0 + \mathfrak{M}_5 B_0^5 = 0.$$

Степени коэффиціентовъ относительно z и t не могутъ быть выше чиселъ, указанныхъ въ таблицѣ

$N_3 \ldots 1$	$M_5 \ldots 1$	$K_2 \ldots 1$	$A_0 \ldots 1$	$\mathfrak{M}_5 \ldots 2$
$N_2 \ldots 1$	$M_4 \ldots 1$	$K_1 \ldots 1$	$B_0 \ldots 1$	$\mathfrak{M}_4 \ldots 2$
$N_1 \ldots 2$	$M_3 \ldots 2$	$K_0 \ldots 1$		$\mathfrak{M}_3 \ldots 3$
$N_0 \ldots 2$	$M_2 \ldots 2$			$\mathfrak{M}_2 \ldots 3$
	$M_1 \ldots 2$			$\mathfrak{M}_1 \ldots 3$
	$M_0 \ldots 2$			$\mathfrak{M}_0 \ldots 3.$

Не трудно убѣдиться, что $\mathfrak{M}_3$ не выше второй степени. Въ самомъ дѣлѣ,

$$M_3 = 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{C}_2 - 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}_2 + \text{члены степени не выше первой} =$$

$$= 3\rho^2\gamma'\gamma'' z^2 + \ldots + 3\rho^2 c'' c' t^2,$$

$$N_1 = 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{F}_0 + 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{F}_1 - 2\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{L}_1 =$$

$$= 3[-3\rho\gamma'' z + \ldots][\rho\gamma' z + \ldots] + 3(-2\rho^2)[-(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')z + \ldots] -$$

$$- 2[-3\rho\gamma'' z + \ldots][\rho\gamma' z + \ldots] = -3\rho^2\gamma'\gamma'' z^2 + \ldots\ldots$$

Отсюда

$$\mathfrak{M}_3 = A_0 M_3 + K_2 N_1 + \text{члены степени не выше второй} =$$

$$= [\rho\gamma' z + \ldots][3\rho^2\gamma'\gamma'' z^2 + \ldots] + [\rho\gamma' z + \ldots][-3\rho^2\gamma'\gamma'' z^2 + \ldots] + \ldots$$

$$= \mathfrak{M}_3{}^0 z^2 + \ldots + \mathfrak{M}_3{}' t^2,$$

ибо оба члена съ z^3 и t^3 пропадаютъ.

36. Составимъ уравненіе $O_0 = 0$, для этого придется собрать коэффиціентъ при z^8.

Обращая вниманіе на таблицу и на то, что сказано о степени $\mathfrak{M}_3$ мы видимъ, что членъ съ z^8 получится изъ членовъ

$$\mathfrak{M}_0 A_0{}^5 + \mathfrak{M}_1 A_0{}^4 B_0 - \mathfrak{M}_2 A_0{}^3 B_0{}^2.$$

Обозначая коэффиціенты пря z^3 въ выраженіяхъ

$$\mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{M}_1, \quad \mathfrak{M}_2$$

соотвѣтственно черезъ

$$\mathfrak{M}_0{}^0, \quad \mathfrak{M}_1{}^0, \quad \mathfrak{M}_2{}^0,$$

замѣтимъ, что уравненіе $O_0 = 0$ будетъ имѣть видъ:

$$\mathfrak{a}^3[\mathfrak{a}^2\mathfrak{M}_0{}^0 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{M}_1{}^0 - \mathfrak{b}^2\mathfrak{M}_2{}^0] = 0 \quad \ldots\ldots\ (154)$$

гдѣ

$$\mathfrak{a} = \rho\gamma', \quad \mathfrak{b} = -(\rho\gamma')'.$$

Итакъ, вычислимъ коэффиціенты

$$\mathfrak{M}_0^0,\quad \mathfrak{M}_1^0,\quad \mathfrak{M}_2^0$$

$$M_0 = 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{E}_0 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_0 = 3\,[-(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')\,z + \ldots]\,[(\rho'\gamma')'z + \ldots] -$$

$$-\,2\,[\rho'\gamma' z + \ldots]\,[-(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{IV})\,z + \ldots] =$$

$$= z^2\,\{2\rho'\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{IV}) - 3\,(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')(\rho'\gamma'' + \rho''\gamma')\} + \ldots$$

$$N_0 = 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{F}_0 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{B}_0 = z^2\,[2\cdot 3\rho\gamma''\rho'\gamma' - 3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')] + \ldots$$

Итакъ

$$\mathfrak{M}_0 = A_0\,M_0 + K_0\,N_0 = \mathfrak{M}_0^0\,z^3 + \ldots,$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_0^0 = \rho\gamma'\,[2\rho'\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{IV}) - 3\,(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')(\rho'\gamma'' + \rho''\gamma')]$$

$$+\,(\rho\gamma')''\,[3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''') - 6\rho\rho'\gamma'\gamma''] =$$

$$= \rho\gamma'\,[2k\gamma'\gamma^{IV} - 3\rho'^2\gamma''^2 + 3\rho^2\gamma'''^2 + 6k\gamma''\gamma''' + 8\rho'^2\gamma'\gamma'''].$$

Далѣе вычисляемъ $\mathfrak{M}_1^0$

$$M_1 = 3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_0 + 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{E}_1 - 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}_0 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_1 =$$

$$= z^2 \left\{ \begin{array}{c} 2\rho\gamma'(3\rho''\gamma'' + 4\rho'\gamma''' + \rho\gamma^{IV}) + 2\rho'\gamma'(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') - \\ -\,9\rho\gamma''(\rho'\gamma')' - 3\,(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''')\,(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'') \end{array} \right\} + \ldots$$

Выраженія старшихъ членовъ въ N_0 и N_1 уже составлены, слѣдовательно, получаемъ

$$\mathfrak{M}_1 = A_0\,M_1 + K_1\,N_0 + K_0\,N_1 = \mathfrak{M}_1^0\,z^3 + \ldots,$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_1^0 = \rho\gamma'\,[2\rho^2\gamma'\gamma^{IV} + 16\,k\gamma'\gamma''' - 6k\gamma''^2 + 6\rho^2\gamma''\gamma'''].$$

Вычисленіе же $\mathfrak{M}_2^0$ произведется такъ:

$$M_2 = -\,3\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{E}_1 + 3\mathfrak{D}_0\,\mathfrak{E}_2 - 2\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{L}_2 + 2\mathfrak{L}_1\,\mathfrak{A}_1 - 2\mathfrak{L}_0\,\mathfrak{A}_2 =$$

$$= z^2 \left\{ \begin{array}{c} 9\rho\gamma''(2\rho'\gamma' + \rho\gamma'') + 3\rho\gamma'(3\rho'\gamma'' + \rho\gamma''') - \\ -\,2\rho\gamma'(6\rho'\gamma'' + 4\rho\gamma''') - 6\rho\rho'\gamma'\gamma'' \end{array} \right\} + \ldots$$

Отсюда

$$\mathfrak{M}_2 = A_0 M_2 + K_2 N_0 - K_1 N_1 + K_0 N_2 = \mathfrak{M}_2{}^0 z^3 + \ldots,$$

гдѣ

$$\mathfrak{M}_2{}^0 = \rho^3 \gamma' [3\gamma''^2 - 8\gamma'\gamma'''].$$

Уравненію (153) можно удовлетворить двоякимъ образомъ, или полагая $\mathfrak{a} = 0$, или же полагая

$$\mathfrak{a}^2 \mathfrak{M}_0{}^0 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{M}_1{}^0 - \mathfrak{b}^2 \mathfrak{M}_2{}^0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (154)$$

Случай $\mathfrak{a} = 0$ даетъ $\gamma' = 0$, $\gamma = const.$

Получаются карты съ концентрическими меридіанами.

Въ общемъ же случаѣ надо будетъ удовлетворить уравненію (154), которое сокращая на $\rho\gamma'$ можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\rho^2 \gamma'^2 [2k\gamma'\gamma^{IV} - 3\rho'^2\gamma''^2 - 3\rho^2\gamma'''^2 + 6k\gamma''\gamma''' + 8\rho'^2\gamma'\gamma''']$$
$$- \rho\gamma'(\rho\gamma')' [2\rho^2\gamma'\gamma^{IV} + 16k\gamma'\gamma''' - 6k\gamma''^2 + 6\rho^2\gamma''\gamma''']$$
$$+ (\rho\gamma')'^2 [-3\rho^2\gamma''^2 + 8\rho^2\gamma'\gamma'''] = 0.$$

Сдѣлавъ всѣ приведенія и сокращая на ρ^4, получимъ

$$-2\gamma'^2\gamma''\gamma^{IV} - 3\gamma''^4 + 3\gamma'^2\gamma'''^2 + 2\gamma'\gamma''^2\gamma''' = 0 \ldots (155)$$

37. Для интегрированія уравненія (155) подставимъ $\gamma' = y$

$$-2y^2 y' y''' - 3y'^4 + 3y^2 y''^2 + 2y y'^2 y'' = 0.$$

Возьмемъ за новую перемѣнную независимую y, а за новую функцію $y' = z$, тогда получимъ, обозначая

$$z' = \frac{dz}{dy}, \quad z'' = \frac{d^2 z}{dy^2},$$

$$dz = dy' = y'' dx, \text{ но } dy = y' dx;$$

раздѣляя, получимъ

$$z' = \frac{dz}{dy} = \frac{y''}{y'} = \frac{y''}{z},$$

слѣдовательно,

$$y'' = zz'.$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ

$$y''' = (zz'' + z'^2)\frac{dy}{dx} = z(zz'' + z'^2).$$

Подставляя въ наше уравненіе, получимъ по сокращеніи на z^2

$$-2y^2[zz'' + z'^2] - 3z^2 + 3y^2z'^2 + 2yzz' = 0$$

$$-2yz(z''y - z') + y^2z'^2 - 3z^2 = 0.$$

Возьмемъ за новую перемѣнную

$$u = \frac{z}{y}.$$

$$u' = \frac{yz' - z}{y^2},$$

слѣдовательно,

$$z = uy$$

$$y^2u' = yz' - z \dots\dots\dots\dots\dots\dots (156)$$

$$yz' = y^2u' + z = y(yu' + u) \dots\dots\dots\dots (157)$$

Дифференцируя (156), получимъ

$$2u'y + y^2u'' = yz'',$$

но уравненіе (157) даетъ

$$z' = yu' + u;$$

вычитая, получимъ

$$yu' + y^2u'' - u = yz'' - z'.$$

Подставляя въ наше уравненіе, получимъ

$$-2y^2u[yu' + y^2u'' - u] + (y^2u' + yu)^2 - 3u^2y^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и дѣлая приведеніе, получимъ

$$y^4(u'^2 - 2uu'') = 0.$$

Получаемъ, очевидно, одно изъ двухъ: или

$$y = 0, \quad \text{или} \quad u'^2 - 2uu'' = 0.$$

Итакъ, подлежатъ особому разсмотрѣнію случаи

$$y = 0, \quad z = 0, \quad u' = 0.$$

Если ни одинъ изъ этихъ случаевъ не имѣетъ мѣста, то надо разсматривать уравненіе

$$u'^2 - 2uu'' = 0.$$

Интегрируя, получимъ

$$u = (cy + c_1)^2,$$

отсюда

$$y\,(cy + c_1)^2 = \frac{dy}{dv}$$

и наконецъ

$$v + c_2 = \int \frac{dy}{y\,(cy + c_1)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (158)$$

но кромѣ того

$$\frac{d\gamma}{dv} = y,$$

слѣдовательно,

$$\gamma = \int y dv = \int \frac{dy}{(cy + c_1)^2} = -\frac{1}{c\,(cy + c_1)} + c_3 \ldots\ldots (159)$$

Исключая изъ уравненій (158) и (159) функцію y, мы получимъ выраженіе для γ черезъ v, заключающее четыре произвольныхъ постоянныхъ c, c_1, c_2, c_3.

Давая этимъ постояннымъ комплексныя значенія и отдѣляя вещественную часть отъ мнимой въ функціи γ, мы получимъ самыя общія выраженія для координатъ a и b центра меридіановъ.

Подобнымъ же образомъ надо разсмотрѣть особенныя рѣшенія

$$y = 0, \quad z = 0, \quad u = \text{const}.$$

38. Удовлетворивъ такимъ образомъ уравненію $O_0 = 0$ самымъ общимъ образомъ, мы замѣчаемъ, что въ тоже время будетъ удовлетворено и уравненіе $\Omega_0 = 0$; остается выборомъ постоянныхъ произвольныхъ удовлетворить остальнымъ 15-ти уравненіямъ.

Подобно тому, какъ это имѣло мѣсто въ случаѣ проекцій смѣшанныхъ, и здѣсь общее рѣшеніе, выражаемое формулами (158) и (159), ведетъ къ противорѣчію и проекціи получаются только при особенныхъ рѣшеніяхъ.

Выкладка разбора остальныхъ 15-ти уравненій настолько сложна и неудобна, что почти не представляется возможности не только произвести её аналогично тому, какъ мы это дѣлали для случая смѣшанныхъ картъ, но даже весьма затруднительно выписать эти уравненія; въ виду этого является необходимость искать другихъ путей рѣшенія задачи.

39. Обратимся прежде всего къ изученію картъ концентрическихъ, т. е. случая $a = \rho\gamma' = 0$.

Приведенная выше таблица обращается въ слѣдующую:

$$\mathfrak{A}_0 = \sigma''', \quad \mathfrak{A}_1 = 12\rho'\rho'', \quad \mathfrak{A}_2 = 0, \quad \mathfrak{A}_3 = 4k$$

$$\mathfrak{B}_0 = 6\rho'^2, \quad \mathfrak{B}_2 = 6\rho^2$$

$$\mathfrak{L}_0 = \rho'^2, \quad \mathfrak{L}_1 = 0, \quad \mathfrak{L}_2 = \rho^2$$

$$\mathfrak{D}_0 = \sigma'', \quad \mathfrak{D}_1 = -6\rho\rho'', \quad \mathfrak{D}_3 = 2\rho^2$$

$$\mathfrak{E}_0 = 2\rho'\rho'', \quad \mathfrak{E}_1 = 0, \quad \mathfrak{E}_2 = 2k$$

$$\mathfrak{F}_0 = 0, \quad \mathfrak{F}_1 = -2\rho^2.$$

Далѣе составляемъ

$$M_0 = 6\rho'\rho''\sigma'' - 2\rho'^2\sigma''', \quad N_0 = -12\rho'^4$$

$$M_1 = -12\rho\rho'\rho''^2, \quad N_1 = -6\sigma''\rho^2$$

$$M_2 = 6k\sigma'' - 2\rho^2\sigma''', \quad N_2 = 12\rho^2\rho'^2$$

$$M_3 = -40\rho^2\rho'\rho'', \quad N_3 = 0$$

$$M_4 = 0, \quad M_5 = 4\rho^2 k.$$

Отсюда

$$\mathfrak{M}_0 = 24\rho\rho'^2\rho''\sigma'' - 4k\rho'^2\sigma''', \quad A_0 = 2k, \quad B_0 = \sigma'$$

$$\mathfrak{M}_1 = -24\rho^2\rho'^2\rho''^2 - 6\rho^2\sigma''^2, \quad K_0 = \sigma''$$

$$\mathfrak{M}_2 = 24k^2\sigma'' - 4k\rho^2\sigma''', \qquad K_1 = 0, \quad K_2 = 0$$

$$\mathfrak{M}_3 = -80\rho^2\rho'\rho''k, \qquad \mathfrak{M}_4 = 0, \quad \mathfrak{M}_5 = 8\rho^2k^2.$$

Уравненіе (153) обращается, окончательно, въ слѣдующее:

$$2^5k^5[24\rho\rho'^2\rho''\sigma'' - 4k\rho'^2\sigma'''] + 2^4k^4\sigma'[-24\rho^2\rho'^2\rho''^2 - 6\rho^2\sigma''^2] -$$

$$-2^3k^3\sigma'^2[24k^2\sigma'' - 4k\rho^2\sigma'''] + 2^2k^2\sigma'^3 80\rho^2\rho'\rho''k + \sigma'^5 8\rho^2k^2 = 0.$$

Подставимъ сюда вмѣсто σ величину дѣйствительную w при помощи формулъ

$$\sigma' = 2iw', \quad \sigma'' = 2iw'', \quad \sigma''' = 2iw''',$$

тогда мы легко замѣтимъ, что можно будетъ все уравненіе сократить на 2^8ik^2; послѣ сокращенія получимъ

$$k^3[6\rho\rho'^2\rho''w'' - k\rho'^2w'''] +$$

$$+ k^2w'[-3\rho^2\rho'^2\rho''^2 + 3\rho^2w''^2] +$$

$$+ kw'^2[6k^2w'' - k\rho^2w'''] -$$

$$-10k\rho^2\rho'\rho''w'^3 + \rho^2w'^5 = 0.$$

Раскрывая скобки, получимъ

$$\left.\begin{aligned} &w'''\left\{\frac{k^6}{\rho^2} + k^2\rho^2w'^2\right\} - 3\rho^2k^2w'w''^2 + \\ &\quad + 6w''\left\{\frac{k^7}{\rho^4} - k^3w'^2\right\} + 3\frac{k^8}{\rho^6}w' \\ &-10\frac{k^4}{\rho^2}w'^3 - \rho^2w'^5 = 0 \text{ *)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(160)$$

*) Надо помнить, что $\rho' = \frac{k}{\rho}$, $\rho'' = -\frac{k^2}{\rho^3}$.

Возьмемъ ρ за независимую перемѣнную и обозначимъ ее черезъ x, за новую неизвѣстную функцію возьмемъ величину

$$\frac{1}{k}\ \frac{dw}{d\rho}$$

и обозначимъ ее черезъ y, такъ что

$$dw = kyd\rho,$$

откуда

$$\frac{dw}{dv} = w' = ky\frac{d\rho}{dv} = k^2\frac{y}{x}.$$

Итакъ,

$$w' = k^2\frac{y}{x},$$

$$w'' = k^3\frac{xy' - y}{x^3},$$

$$w''' = k^4\frac{x^2y'' - 3xy' + 3y}{x^5}.$$

Подставляя полученныя выраженія въ уравненіе (160), послѣ приличныхъ приведеній и сокращеній получимъ уравненіе

$$xy''(1 + x^2y^2) - 3x^3yy'^2 + 3y'(1 - x^2y^2) - xy^3(4 + x^2y^2) = 0. \quad (161)$$

Уравненіе (161) весьма просто интегрируется до конца.

Введемъ новую перемѣнную, полагая

$$xy = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (162)$$

$$xy' + y = \frac{u'}{(1-u^2)^{3/2}},\quad xy'' + 2y' = \frac{(1-u^2)u'' + 3uu'^2}{(1-u^2)^{5/2}}$$

$$x^2y' = \frac{xu'}{(1-u^2)^{3/2}} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{xu' - u(1-u^2)}{(1-u^2)^{3/2}}.$$

Уравненіе (161) можно представить въ видѣ:

$$x^2(xy'' + 2y')(1 + x^2y^2) + (x^2y')[3(1 - x^2y^2) - 2(1 + x^2y^2)] -$$
$$- 3xy(x^2y')^2 - (xy)^3(4 + x^2y^2) = 0.$$

Представляя получимъ

$$x^2[(1-u^2)u'' + 3uu'^2] + (1-6u^2)(1-u^2)[xu' - u(1-u^2)] -$$
$$- 3u[xu' - u(1-u^2)]^2 - u^3(4-3u^2)(1-u^2) = 0.$$

Послѣ приличныхъ сокращеній получимъ

$$(1-u^2)\,[x^2u''+xu'-u]=0,$$

но $1-u^2$ не можетъ равняться нулю, слѣдовательно, получаемъ уравненіе

$$x^2u''+xu'-u=0,$$

интегрируемое непосредственно.

Интегрируя, получаемъ

$$u'+\frac{u}{x}=l, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (163)$$

гдѣ l постоянная произвольная величина.

Интегрируемъ уравненіе (163)

$$u=\frac{c+lx^2}{2x}.$$

Отсюда

$$y=\frac{\frac{u}{x}}{\sqrt{1-u^2}}$$

На основаніи уравненія (163) получимъ

$$y=-\frac{u'-l}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Введемъ новую перемѣнную

$$u-lx=q \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (164)$$

откуда

$$q=\frac{c+lx^2}{2x}-lx=\frac{c-lx^2}{2x},$$

далѣе

$$1-u^2=1-q^2-2lxq-l^2x^2=1-q^2-2lx\frac{c-lx^2}{2x}-l^2x^2$$

$$=1-lc-q^2;$$

обозначимъ

$$1-lc=l^2\mathrm{A}^2.$$

Изъ уравненія (164) получаемъ $u'-l=q'$, такъ что

$$y=\frac{dw}{kd\rho}=-\frac{q'}{\sqrt{l^2\mathrm{A}^2-q^2}},$$

но $q'd\rho = dq$, слѣдовательно,

$$w = -k\int\frac{dq}{\sqrt{l^2 A^2 - q^2}} = k \arccos\frac{q}{lA} + w_0,$$

гдѣ w_0 третья постоянная произвольная.

Подставляя вмѣсто q его величину черезъ $x = \rho$, получимъ

$$w = w_0 + k \arccos\frac{\frac{1}{l^2} - A^2 - x^2}{2Ax}.$$

Формула

$$w = w_0 + k \arccos\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho}, \text{ гдѣ } R = \frac{1}{l},$$

опредѣляетъ карты вполнѣ, ибо изъ уравненія (100) получаемъ

$$\varphi = \frac{u + w_0}{k} + \arccos\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho}.$$

Подставляя въ основныя уравненія (99), получимъ

$$x = a + \rho\left[\cos\frac{u + w_0}{k}\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho} - \sin\frac{u + w_0}{k}\frac{\Delta}{2A\rho}\right],$$

$$y = b + \rho\left[\sin\frac{u + w_0}{k}\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A\rho} + \cos\frac{u + w_0}{k}\frac{\Delta}{2A\rho}\right],$$

гдѣ

$$\Delta = \sqrt{4A^2\rho^2 - (\rho^2 + A^2 - R^2)^2} =$$

$$= \sqrt{(R + \rho + A)(R + A - \rho)(R + \rho - A)(\rho + A - R)}.$$

Окончательно уравненія картъ напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \cos\frac{u + w_0}{k}\cdot\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\frac{u + w_0}{k}\frac{\Delta}{2A} \\ y &= b + \sin\frac{u + w_0}{k}\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\frac{u + w_0}{k}\frac{\Delta}{2A} \end{aligned}\right\} \ldots (165)$$

Остается написать уравненія меридіановъ и параллелей.

Переписывая систему (165) въ видѣ:

$$x - a = \cos\frac{u + w_0}{k}\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} - \sin\frac{u + w_0}{k}\frac{\Delta}{2A} \quad \ldots (166)$$

$$y - b = \sin\frac{u + w_0}{k}\frac{\rho^2 + A^2 - R^2}{2A} + \cos\frac{u + w_0}{k}\frac{\Delta}{2A} \quad \ldots (167)$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2=2kv+l.$$

Меридіаны, какъ и слѣдовало ожидать, концентрическіе круги.

Для полученія параллелей необходимо исключить ρ.

Умножая уравненіе (166) на $\cos\frac{u+w_0}{k}$, а уравненіе (167) на $\sin\frac{u+w_0}{k}$ и складывая, получимъ

$$2A(x-a)\cos\frac{u+w_0}{k}+2A(y-b)\sin\frac{u+w_0}{k}=\rho^2+A^2-R^2,$$

но

$$\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2.$$

Отсюда получимъ

$$(x^2-a)^2+(y-b)^2-2A\cos\frac{u+w_0}{k}(x-a)-2A\sin\frac{u+w_0}{k}(y-b)+$$

$$+A^2=R^2.$$

Отсюда получаемъ окончательно

$$\left(x-a-A\cos\frac{u+w_0}{k}\right)^2+\left(y-b-A\sin\frac{u+w_0}{k}\right)^2=R^2.$$

Итакъ, мы видимъ, что параллели суть круги съ постояннымъ радіусомъ R.

Называя координаты центра параллели черезъ ξ и η, получимъ

$$\xi=a+A\cos\frac{u+w_0}{k},\quad \eta=b+A\sin\frac{u+w_0}{k}.$$

Отсюда мы видимъ, что центры параллелей лежатъ на кругѣ

$$(\xi-a)^2+(\eta-b)^2=A^2\ldots\ldots\ldots\ldots(168)$$

40. Перейдемъ теперь къ общему случаю.

Постараемся задачу по возможности упростить.

Припоминая основной результатъ, состоящій въ томъ, что радіусъ меридіановъ опредѣляется по формулѣ

$$\sqrt{2kv+l}$$

мы замѣчаемъ, что можно помѣнять ролями меридіаны и параллели, ибо уравненіе (50), выражающее сохраненіе площадей, симметрично относительно u и v.

Разсуждая аналогично съ тѣмъ, какъ мы дѣлали для меридіановъ, мы замѣтимъ, что радіусъ параллели долженъ опредѣляться по формулѣ аналогичной

$$\sqrt{2Ku + L}.$$

Или сохраняя наши прежнія обозначенія, мы получимъ

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2} = 2Ku + L.$$

K и L суть, очевидно, числа постоянныя.

Что касается выраженія

$$\frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - y'x'')^2},$$

то, на основаніи предыдущихъ соображеній, оно выражается раціонально черезъ $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, отсюда, обозначая получаемую раціональную функцію черезъ

$$R(\sin\varphi, \ \cos\varphi),$$

получимъ

$$R(\sin\varphi, \ \cos\varphi) = 2Ku + L \ldots\ldots\ldots\ldots (169)$$

но на основаніи уравненія (100) можно будетъ выразить u черезъ φ; подставляя въ уравненіе (169), получаемъ

$$2kK\varphi + 2K(a'\sin\varphi - b'\cos\varphi)\rho - 2Kw + L = R(\sin\varphi, \ \cos\varphi). (170)$$

Если R не обращается въ неопредѣленность, что могло бы имѣть мѣсто, когда обращается въ нуль знаменатель

$$x'y'' - x''y',$$

то уравненіе (170) даетъ

$$kK = 0$$

откуда замѣчаемъ, что одна система, меридіаны или параллели должны, быть съ постояннымъ радіусомъ.

Полученное замѣчаніе позволяетъ значительно упростить задачу.

41. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что меридіаны суть круги съ постояннымъ радіусомъ.

Примемъ этотъ радіусъ за единицу длины, тогда карты выразятся уравненіями

$$x = a + \cos\varphi$$

$$y = b + \sin\varphi$$

гдѣ a и b, выраженныя въ v даютъ кривую Σ геометрическаго мѣста центровъ меридіановъ; пусть v будетъ обозначать уголъ, образуемый касательною къ кривой Σ съ осью x-*овъ*, кромѣ того введемъ въ разсмотрѣніе радіусъ кривизны ϱ кривой Σ, тогда будетъ одно изъ двухъ, или $\varrho = \infty$, такъ что линія центровъ меридіановъ прямая, или же

$$a = \int \varrho \cos v dv, \quad b = \int \varrho \sin v dv \ldots\ldots\ldots\ldots (171)$$

Придется, конечно, удовлетворить уравненію

$$x'_v y'_u - x'_u y'_v = V,$$

гдѣ V нѣкоторая функція отъ v.

Имѣемъ

$$x'_u = -\sin\varphi\varphi'_u, \quad y'_u = \cos\varphi\varphi'_u$$

$$x'_v = a' - \sin\varphi\varphi'_v, \quad y'_v = b' + \cos\varphi\varphi'_v$$

подставляя получаемъ

$$a'\cos\varphi\varphi'_u + b'\sin\varphi\varphi'_u = V.$$

Интегрируя но u, получимъ

$$a'\sin\varphi - b'\cos\varphi = Vu + \sigma,$$

гдѣ σ нѣкоторая функція отъ v.

Подставляя выраженія для a и b изъ формулъ (171), получимъ

$$\varrho\sin(\varphi - v) = Vu + \sigma;$$

полагая

$$\varrho = \mu V, \quad \sigma = wV, \quad \varphi - v = \xi,$$

получимъ

$$\mu\sin\xi = u + w \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (172)$$

Это и будетъ основнымъ уравненіемъ для всего дальнѣйшаго.

Дифференцируя по v, получимъ

$$\mu \cos \xi \xi' = w' - \mu' \sin \xi; \quad \varphi' - 1 = \xi' \;\ldots\ldots\ldots(173)$$

Дифференцируя, получаемъ

$$x' = a' - \sin \varphi \varphi' = \rho \cos v - \sin \varphi \varphi' \;\ldots\ldots\ldots(174)$$

$$y' = b' + \cos \varphi \varphi' = \rho \sin v + \cos \varphi \varphi' \;\ldots\ldots\ldots(175)$$

Возвышая въ квадратъ и складывая, получимъ

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \varphi'^2 - 2\rho\varphi' \sin \xi' =$$

$$= \rho^2 + (1 + \xi')^2 - 2\rho \sin \xi \,(1 + \xi') =$$

$$= \rho^2 + 1 - 2\rho \sin \xi + 2\xi' \,(1 - \rho \sin \xi) + \xi'^2.$$

Умножая на $\mu^2 \cos^2 \xi$, получимъ

$$\mu^2 \cos^2 \xi \,(x'^2 + y'^2) = \mu^2 \cos^2 \xi \,[\rho^2 + 1 - 2\rho \sin \xi] +$$

$$+ 2 \,[1 - \rho \sin \xi] \,\mu \cos \xi \,(\mu \cos \xi \xi') + (\mu \cos \xi \xi')^2 =$$

$$= \mu^2 \cos^2 \xi \,[\rho^2 + 1 - 2\rho \sin \xi] + 2\mu \cos \xi \,(1 - \rho \sin \xi)\,(w' - \mu' \sin \xi) +$$

$$+ (w' - \mu' \sin \xi)^2 =$$

$$= A_0 \cos^3 \xi + A_1 \cos^2 \xi \sin \xi + A_2 \cos \xi \sin^2 \xi + A_3 \sin^3 \xi +$$

$$+ B_0 \cos^2 \xi + B_1 \cos \xi \sin \xi + B_2 \sin^2 \xi +$$

$$+ C_0 \cos \xi + C_1 \sin \xi$$

$$+ D_0,$$

гдѣ

$$A_0 = 0, \;\; A_1 = -2\rho\mu^2, \;\; A_2 = 2\rho\mu\mu', \;\; A_3 = 0,$$

$$B_0 = \mu^2 (\rho^2 + 1), \;\; B_1 = -2\mu\,(\mu' + \rho w'), \;\; B_2 = \mu'^2,$$

$$C_0 = 2\mu w', \;\; C_1 = -2\mu' w',$$

$$D_0 = w'^2.$$

Вычислимъ теперь выраженіе $x' y'' - x'' y'$.

Дифференцируя равенства (174) и (175), мы получимъ

$$x'' = \rho' \cos v - \rho \sin v - \cos \varphi \varphi'^2 - \sin \varphi \varphi''$$

$$y'' = \rho' \sin v + \rho \cos v - \sin \varphi \varphi'^2 + \cos \varphi \varphi''.$$

Подставляя, замѣчаемъ

$$x' y'' - y' x'' = [\rho \cos v - \sin \varphi \varphi'] [\rho' \sin v + \rho \cos v - \sin \varphi \varphi'^2 + \cos \varphi \varphi''] -$$

$$- [\rho \sin v + \cos \varphi \varphi'] [\rho' \cos v - \rho \sin v - \cos \varphi \varphi'^2 - \sin \varphi \varphi''] =$$

$$= \rho^2 - \varphi' [\rho' \cos \xi + \rho \sin \xi] - \varphi'^2 \rho \sin \xi + \varphi'^3 + \varphi'' \rho \cos \xi,$$

но

$$\varphi' = \xi' + 1, \quad \varphi'' = \xi''.$$

Итакъ,

$$\left.\begin{aligned} x' y'' - y' x'' = \rho^2 - (\xi' + 1)(\rho' \cos \xi + \rho \sin \xi) - \\ - (\xi' + 1)^2 \rho \sin \xi + (\xi' + 1)^3 + \xi'' \rho \cos \xi. \end{aligned}\right\} \ldots (176)$$

Дифференцируя уравненіе (173), получимъ

$$\mu \cos \xi \xi'' = w'' + \mu \sin \xi \xi'^2 - 2\mu' \cos \xi \xi' - \mu'' \sin \xi \ldots (177)$$

Умножая (176) на μ, получимъ

$$\mu (x' y'' - y' x'') =$$

$$= \mu[\rho^2 - (\xi'+1)(\rho' \cos \xi + \rho \sin \xi) - (\xi'+1)^2 \rho \sin \xi + (\xi'+1)^3] + \rho[\xi'' \mu \cos \xi] =$$

$$= \mu\rho^2 - \mu (\rho' \cos \xi + \rho \sin \xi) - \mu\rho \sin \xi + \mu + \rho (w'' - \mu'' \sin \xi) +$$

$$+ \xi' [- \mu (\rho' \cos \xi + \rho \sin \xi) - 2\mu\rho \sin \xi + 3\mu - 2\mu' \rho \cos \xi] +$$

$$+ \xi'^2 [- \mu\rho \sin \xi + 3\mu + \mu\rho \sin \xi] + \mu \xi'^3 \ldots \ldots (178)$$

Умножая на $\mu^2 \cos^3\xi$ и пользуясь уравненіемъ (173), получимъ

$$\mu^3 \cos^3\xi (x'y'' - y'x'') = \mu^2 \cos^3\xi \begin{bmatrix} \mu\rho^2 - \mu(\rho'\cos\xi + \rho\sin\xi) + \mu - \\ - \mu\rho\sin\xi + \rho(w'' - \mu''\sin\xi) \end{bmatrix} +$$

$$+ \mu\cos^2\xi (w' - \mu'\sin\xi)\,[-3\mu\rho\sin\xi + 3\mu - \cos\xi(\mu\rho' + 2\mu'\rho)] +$$

$$+ 3\mu\cos\xi (w' - \mu'\sin\xi)^2 + (w' - \mu'\sin\xi)^3 =$$

$$= \mathfrak{A}_0 \cos^4\xi + \mathfrak{A}_1 \cos^3\xi \sin\xi + \mathfrak{A}_2 \cos^2\xi \sin^2\xi + \mathfrak{A}_3 \cos\xi \sin^3\xi + \mathfrak{A}_4 \sin^4\xi +$$

$$+ \mathfrak{B}_0 \cos^3\xi + \mathfrak{B}_1 \cos^2\xi \sin\xi + \mathfrak{B}_2 \cos\xi \sin^2\xi + \mathfrak{B}_3 \sin^2\xi$$

$$+ \mathfrak{C}_0 \cos^2\xi + \mathfrak{C}_1 \cos\xi \sin\xi + \mathfrak{C}_2 \sin^2\xi$$

$$+ \mathfrak{D}_0 \cos\xi + \mathfrak{D}_1 \sin\xi$$

$$+ \mathfrak{E}_0,$$

гдѣ

$$\mathfrak{A}_0 = -\mu^3\rho'$$

$$\mathfrak{A}_1 = -\rho(2\mu^3 + \mu^2\mu'' - 2\mu\mu'^2) + \rho'\mu^2\mu'$$

$$\mathfrak{A}_2 = 3\mu^2\mu'\rho$$

$$\mathfrak{A}_3 = 0$$

$$\mathfrak{A}_4 = 0$$

$$\mathfrak{B}_0 = \mu^2[\rho w'' + \mu(\rho^2 + 1)] - \mu w'(\mu\rho' + 2\mu'\rho)$$

$$\mathfrak{B}_1 = -3\mu^2(\mu' + w'\rho)$$

$$\mathfrak{B}_2 = 3\mu\mu'^2$$

$$\mathfrak{B}_3 = -\mu'^3$$

$$\mathfrak{C}_0 = 3\mu^2 w', \qquad \mathfrak{D}_0 = 3\mu w'^2$$

$$\mathfrak{C}_1 = -6\mu\mu' w', \qquad \mathfrak{D}_1 = -3\mu' w'^2$$

$$\mathfrak{C}_2 = 3w'\mu'^2, \qquad \mathfrak{E}_0 = w'^3.$$

Придется удовлетворить тождеству

$$(x'^2 + y'^2)^3 = [2Ku + L]\,(x'y'' - x''y')^2,$$

которое на основаніи приведенныхъ нами выкладокъ можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$\left\{\begin{matrix} A_0 \cos^3\xi + \ldots + A_3 \sin^3\xi \\ B_0 \cos^2\xi + \ldots + B_2 \sin^2\xi \\ C_0 \cos\xi + C_1 \sin\xi \\ D_0 \end{matrix}\right\}^3 =$$

$$= [2K(\mu \sin\xi - w) + L] \left\{\begin{matrix} \mathfrak{A}_0 \cos^4\xi + \ldots + \mathfrak{A}_4 \sin^4\xi \\ \mathfrak{B}_0 \cos^3\xi + \ldots + \mathfrak{B}_3 \sin^3\xi \\ \mathfrak{C}_0 \cos^2\xi + \ldots + \mathfrak{C}_2 \sin^2\xi \\ \mathfrak{D}_0 \cos\xi + \mathfrak{D}_1 \sin\xi \\ \mathfrak{E}_0 \end{matrix}\right\}^2 \ldots (179)$$

Это уравненіе, очевидно, должно быть тождествомъ, ибо иначе оно давало бы зависимость между ξ и v, или, что одно и то же, между u и v.

Въ тождество имѣемъ право вмѣсто входящихъ въ него буквъ подставлять любыя численныя значенія; въ результатѣ должно получиться тождество.

Подставимъ $\xi = \frac{\pi}{2}$, получимъ

$$(D_0 + C_1 + B_2 + A_3)^3 = [2K(\mu - w) + L]\{\mathfrak{A}_4 + \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{E}_0\}^2$$

или на основаніи нашей таблицы коэффиціентовъ получимъ

$$(w'^2 - 2\mu' w' + \mu'^2)^3 = [2K(\mu - w) + L]\,(w'^3 - 3\mu' w'^2 + 3\mu' w' - \mu'^3)^2;$$

это уравненіе даетъ

$$\mu - w = \text{const}.$$

Подобнымъ же образомъ, подставляя $\xi = -\frac{\pi}{2}$ получимъ

$$\mu + w = \text{const},$$

откуда окончательно получаемъ

$$\mu = \text{const}, \quad w = \text{const}$$

и, слѣдовательно, $\xi' = 0$, то есть ξ функція отъ одного u.

Уравненіе (179) значительно упрощается, ибо получаемъ

$$\mathfrak{A}_0 = -\mu^3\rho',\ \mathfrak{A}_1 = -2\mu^3\rho,\ \mathfrak{A}_2 = 0,\ \mathfrak{A}_3 = 0,\ \mathfrak{A}_4 = 0,$$

$$\mathfrak{B}_0 = \mu^3(\rho^2 + 1),\ \mathfrak{B}_1 = 0,\ \mathfrak{B}_2 = 0,\ \mathfrak{B}_3 = 0,$$

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{E}_0 = 0,$$

отсюда

$$\mathfrak{A}_0 \cos^4\xi + \ldots = \cos^3\xi\,\mu^3\,[-\rho'\cos\xi - 2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1].$$

Подобнымъ образомъ получаемъ

$$A_0 = 0,\ A_1 = -2\rho\mu^2,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,$$

$$B_0 = \mu^2(\rho^2 + 1),\ B_1 = 0,\ B_2 = 0,\ C_0 = C_1 = D_0 = 0.$$

Отсюда окончательно уравненіе (179) принимаетъ видъ:

$$(-2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1)^3 =$$

$$= [2K(\mu\sin\xi - w) + L]\,(-\rho'\cos\xi - 2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1)^2.$$

Подставляя $\xi = \frac{\pi}{2}$, получимъ $\rho = \text{const}$, тогда получаемъ

$$-2\rho\sin\xi + \rho^2 + 1 = 2K(\mu\sin\xi - w) + L$$

отюда

$$\left.\begin{aligned} \rho &= -K\mu \\ \rho^2 + 1 &= L - 2Kw \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (180)$$

Уравненіе (180) даетъ $V = -K$, а отсюда отъ перемѣнной v, выражающей уголъ, составляемый касательною къ кривой Σ съ осью x-овъ, мы перейдемъ къ настоящей долготѣ замѣняя v на $-Kv + w$.

Кривая Σ очевидно кругъ и карты опредѣляются формулами

$$x = a - K\mu\sin v + \cos\varphi,$$

$$y = b + K\mu\cos v + \sin\varphi,$$

гдѣ

$$\mu\sin(\varphi - v) = u + w.$$

Параллели получаются концентрическіе круги и, слѣдовательно, выходятъ карты, которыя получаются изъ разобраннаго нами случая черезъ замѣну u на v и обратно.

42. Остается разобрать случай $\rho = \infty$; тогда центры меридіановъ лежатъ на одной прямой и мы получаемъ проекціи, опредѣляемыя уравненіями

$$x = a + \cos\varphi$$

$$y = \quad \sin\varphi.$$

Мы приняли прямую центровъ за ось x-овъ

$$x'_v = a' - \sin\varphi\varphi'_v, \quad y'_v = \cos\varphi\varphi'_v$$

$$x'_u = \quad - \sin\varphi\varphi'_u, \quad y'_u = \cos\varphi\varphi'_u.$$

Отсюда, подставляя въ уравненіе (50), получимъ

$$a' \cos\varphi\varphi'_u = 1.$$

Интегрируя, получаемъ

$$a' \sin\varphi = u + w.$$

Дифференцируя по v, мы имѣемъ

$$x' = a' - \sin\varphi\varphi'$$

$$y' = \quad \cos\varphi\varphi'$$

отсюда, принимая во вниманіе равенство

$$a' \cos\varphi\varphi' = w' - a'' \sin\varphi$$

получаемъ

$$a'^2 \cos^2\varphi\,(x'^2 + y'^2) =$$

$$= a'^4 \cos^2\varphi - 2a'^2 \sin\varphi \cos\varphi\,(w' - a'' \sin\varphi) + (w' - a'' \sin\varphi)^2$$

Дифференцируя еще разъ, получаемъ

$$x'' = a'' - \cos\varphi\varphi'^2 - \sin\varphi\varphi''$$

$$y'' = \quad - \sin\varphi\varphi'^2 + \cos\varphi\varphi''.$$

Отсюда, принимая во вниманіе уравненіе

$$a' \cos\varphi\varphi'' = w'' + a' \sin\varphi\varphi'^2 - 2a'' \cos\varphi\varphi' - a''' \sin\varphi,$$

получаемъ

$$a'^3 \cos^3\varphi\,(x'y'' - x'y'') = a'^3 \cos^3\varphi\,(w''' - a''' \sin\varphi) -$$
$$- 3a'^2 a'' \cos^3\varphi\,(w' - a'' \sin\varphi) + (w' - a'' \sin\varphi)^3.$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, то есть подставляя въ тождество

$$(x'^2 + y'^2)^3 = [2K(a' \sin\varphi - w') + L]\,(x'y'' - x''y')^2$$

вмѣсто φ сначала $+\frac{\pi}{2}$, а потомъ $-\frac{\pi}{2}$, мы получимъ

$$a' = \text{const}, \quad w = \text{const}.$$

Параллели выходятъ прямыя параллельныя между собой и параллельныя оси x-овъ.

Этотъ случай можно разсматривать, какъ предѣльный для общаго.

ГЛАВА III.

О задачѣ Дирихле.

1. Послѣ работъ К. Неймана, Шварца, Пуанкаре и другихъ авторовъ, касающихся уравненія Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

можно считать доказаннымъ слѣдующее предложеніе.

Теорема I. Если функція u отъ двухъ перемѣнныхъ независимыхъ x, y обладаетъ слѣдующими свойствами:

1) удовлетворяетъ уравненію $\Delta u = 0$,

2) конечна, однозначна и непрерывна вмѣстѣ съ ея производными первыхъ двухъ порядковъ для всѣхъ точекъ внутри нѣкотораго контура C,

то maximum и minimum всѣхъ значеній, которыя можетъ принимать функція u на контурѣ C и внутри его, могутъ имѣть мѣсто лишь для точекъ контура.

Слѣдствіе 1. Если значенія функціи u на контурѣ положительны (отрицательны), то и внутри контура функція имѣетъ положительныя (отрицательныя) значенія.

Слѣдствіе 2. Если значенія функціи u не отрицательны (положительны) на контурѣ, то функція можетъ обращаться въ нуль лишь для точекъ контура, оставаясь положительною (отрицательною) для всѣхъ точекъ внутри.

Слѣдствіе 3. Если значенія функціи u на контурѣ равны постоянному числу K, то функція обращается въ постоянное число K для всѣхъ точекъ внутри контура.

Слѣдствіе 4. Если значенія функціи u совпадаютъ на контурѣ со значеніями другой функціи u_0, обладающей тѣми же вышеприведенными свойствами, то функція u совпадаетъ съ функціею u_0 для всѣхъ точекъ внутри контура.

2. На основаніи слѣдствія 4 мы видимъ, что можетъ существовать одно только рѣшеніе задачи:

найти функцію u, удовлетворяющую свойствамъ, формулированнымъ въ приведенной теоремѣ, которая бы принимала въ точкахъ заданнаго контура C заданныя напередъ значенія.

Заданныя на контурѣ значенія можно, конечно, разсматривать, какъ значенія нѣкоторой заданной функціи дуги.

Приведенная задача получила въ настоящее время подъ именемъ задачи Дирихле большую извѣстность, какъ по своему значенію въ теоріи функцій, такъ и по своимъ приложеніямъ въ математической физикѣ и гидродинамикѣ.

3. Въ первой главѣ настоящаго сочиненія мы видѣли уже, что нахожденіе картъ, изображающихъ часть поверхности, заключенную внутри нѣкотораго контура, на плоскости съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ, связано съ разсмотрѣніемъ интеграловъ Лапласова уравненія, обладающихъ свойствами непрерывности, указанными въ теоремѣ I.

4. Вопросъ о существованіи рѣшенія задачи Дирихле при произвольно заданныхъ значеніяхъ функціи на контурѣ связанъ неразрывно съ вопросомъ о нахожденіи пріемовъ для вычисленія значенія искомой функціи для любой точки внутри контура по заданнымъ значеніямъ на контурѣ.

5. Внимательное изученіе задачи Дирихле привело меня къ нахожденію новой методы рѣшенія, прилагаемой съ успѣхомъ къ разсмотрѣнію алгебраическихъ контуровъ.

Краткое резюме моей методы доложено на конгрессѣ, имѣвшемъ мѣсто въ Бордо въ августѣ 1895 года.

Моя метода основывается на особенномъ способѣ преобразованія плоскихъ фигуръ, къ изложенію главнѣйшихъ свойствъ котораго мы теперь и переходимъ.

Пусть будетъ заданъ какой нибудь контуръ C уравненіемъ въ прямоугольныхъ координатахъ

$$f(x,\ y) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Введемъ двѣ комплексныя перемѣнныя величины

$$\xi = x + iy,\quad \dot{\xi} = x - iy\ ^{*}).$$

Уравненіе (1) даетъ связь между ξ и $\dot{\xi}$, причемъ его можно написать такъ:

$$f\left(\frac{\xi + \dot{\xi}}{2},\ \frac{\xi - \dot{\xi}}{2i}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Здѣсь конечно предполагается, что выраженія, стоящія въ первой части уравненія (2) имѣютъ смыслъ при комплексныхъ величинахъ.

Разрѣшая послѣднее уравненіе относительно ξ, мы получимъ

$$\xi = F(\dot{\xi}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ алгебраическихъ контуровъ. Пусть будетъ m степень уравненія алгебраическаго (1), а n степень уравненія (2) относительно ξ. Мы имѣемъ, очевидно, $n \leqq m$.

Функція F имѣетъ, вообще говоря, n значеній, которыя соотвѣтствуютъ n корнямъ уравненія (2).

Возьмемъ какой нибудь изъ корней и разсмотримъ комплексную величину

$$\eta = x_1 + y_1 i = F(x - iy) = \varphi(x,\ y) + i\psi(x,\ y),$$

гдѣ φ и ψ суть вещественныя функціи.

Мы получимъ

$$x_1 = \varphi(x,\ y),\quad y_1 = \psi(x_1\ y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Эти формулы даютъ нѣкоторое преобразованіе плоскихъ фигуръ,

---

*) Во всемъ дальнѣйшемъ знаками $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, мы будемъ обозначать количества мнимыя, сопряженныя съ величинами ξ, η,...

которое мы будемъ называть *комплекснымъ преобразованіемъ по заданному контуру.*

Будемъ называть точку $N_1(x_1, y_1)$, соотвѣтствующую величинѣ η, изображеніемъ точки $N(x, y)$, соотвѣтствующей величинѣ ξ.

Разсматривая всѣ n корней уравненія (2), мы получаемъ для каждой точки N плоскости n комплексныхъ изображеній

$$N_1,\ N_2, \ldots N_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Для извѣстныхъ значеній перемѣнныхъ x, y нѣкоторыя изъ этихъ точекъ могутъ совпадать.

Очевидно, что если точка N приближается къ нѣкоторой точкѣ M контура (1), одно изъ изображеній (5) приближается къ той же точкѣ M. Въ самомъ дѣлѣ, по крайней мѣрѣ, для одного изъ корней уравненія (2) количество η должно совпадать съ ξ на контурѣ, потому что для точекъ контура должно имѣть мѣсто уравненіе (3).

6. Прилагая этотъ способъ преобразованія къ случаю прямой, мы получаемъ извѣстную методу зеркальныхъ изображеній (Spiegelungen), на которую обратилъ вниманіе Вильямъ Томсонъ въ Cambridge mathematical Journal 1845.

Случай круга даетъ извѣстное преобразованіе при помощи обратныхъ радіусовъ векторовъ.

7. Разсмотримъ область Г вокругъ точки M контура C (1), не заключающую критическихъ точекъ уравненія (2), а также особенныхъ точекъ контура.

Возьмемъ $\xi = x + iy$ въ области L.

Точкѣ ξ соотвѣтствуютъ n точекъ

$$\eta_1^{(1)} = F_1(\xi),\ \ \eta_2^{(1)} = F_2(\xi), \ldots \eta_n^{(1)} = F_n(\xi) \ldots\ldots \quad (6)$$

Изъ теоріи алгебраическихъ функцій мы знаемъ, что, если ξ измѣняется въ области Г, то 1) модули $|\eta_1^{(1)}|$, $|\eta_2^{(1)}|, \ldots |\eta_n^{(1)}|$ не могутъ превосходить нѣкотораго опредѣленнаго числа μ, 2) модули же $|\eta_1^{(1)} - \eta_2^{(1)}|, \ldots |\eta_k^{(1)} - \eta_l^{(1)}|, \ldots$ не могутъ быть ниже нѣкотораго числа ν, большаго нуля.

Отсюда вытекаетъ, что, когда ξ приближается къ точкѣ M контура C, то одна изъ точекъ (6) $\eta_k^{(1)}$ приближается къ той же точкѣ M, остальныя же точки лежатъ на конечныхъ разстояніяхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы предположимъ, что нѣсколько корней (6) приближаются къ точкѣ M, количество ξ будетъ кратнымъ корнемъ уравненія (2); откуда будетъ слѣдовать, что

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

или наконецъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

такъ что M будетъ особенною точкою контура.

8. Предположимъ, что точка ξ двигается вдоль контура, тогда $\eta_k^{(1)} = \xi$, другія точки $\eta_l^{(1)}$ двигаются вдоль нѣкоторой кривой C, которую мы назовемъ *предѣльною кривою.*

Предѣльная кривая должна содержать всѣ особенныя точки заданнаго контура. Для коническихъ сѣченій предѣльная кривая сама обращается въ коническое сѣченіе.

Уравненіе предѣльной кривой можно найти слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ цѣлую функцію

$$\frac{f\left(\frac{\eta + \dot{\xi}}{2}, \; \frac{\eta - \dot{\xi}}{2i}\right) - f\left(\frac{\xi + \dot{\xi}}{2}, \; \frac{\xi - \dot{\xi}}{2i}\right)}{\eta - \xi} = \Phi(\eta, \; \xi, \; \dot{\xi}).$$

Отдѣляя въ уравненіи $\Phi = 0$ вещественную часть отъ мнимой, получимъ два уравненія

$$\Omega_1(X, \; Y, \; x, \; y) = 0, \quad \Omega_2(X, \; Y, \; x, \; y) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

гдѣ

$$X + iY = \eta, \quad x + iy = \xi, \quad x - iy = \dot{\xi}.$$

Черезъ исключеніе буквъ x, y между тремя уравненіями (1), (7), получаемъ уравненіе между X, Y, дающее искомую предѣльную кривую.

9. Докажемъ слѣдующее предложеніе.

Теорема II. Если точка $N(\xi)$ приближается неопредѣленно къ точкѣ M контура C, причемъ находится на нормали, къ контуру въ этой точкѣ M на разстояніи безконечно маломъ отъ точки M, точка $N_k\,(\eta_k^{(1)})$ будетъ лежать по другую сторону контура на той же нормали въ разстояніи $N_k\,M = NM$.

Въ самомъ дѣлѣ, $\eta_k^{(1)} = x_1 + y_1 i = F(\dot{\xi})$ откуда

$$dx_1 + i dy_1 = F_{\dot{\xi}}'(\dot{\xi})\,(dx - i dy).$$

Здѣсь дифференцированіе производится по какому либо направленію, проходящему черезъ точку $\dot{M}$; но извѣстно, что, когда задана функція $F(\dot{\xi})$ отъ комплексной перемѣнной ξ, то значеніе ея производной $F_{\dot{\xi}}'(\dot{\xi})$, соотвѣтствующее точкѣ M контура, не зависитъ отъ направленія дифференцированія, а потому, мы имѣемъ право написать, что

$$F_{\dot{\xi}}'(\dot{\xi}) = \frac{d\xi}{d\dot{\xi}},$$

гдѣ дифференціалы взяты вдоль по касательной къ заданной кривой (2). По этой причинѣ, дифференцируя уравненіе (2), мы получимъ

$$f_x'\,(d\xi + d\dot{\xi}) + \frac{1}{i}\,(d\xi - d\dot{\xi})\,f_y' = 0,$$

такимъ образомъ, получимъ

$$F_{\dot{\xi}}'(\dot{\xi}) = \frac{f'y - i f_x'}{f_y' + i f_x'}.$$

Въ этой формулѣ значенія частныхъ производныхъ соотвѣтствуютъ точкѣ M контура.

Если точка N_k находится на нормали, то будемъ имѣть

$$dx_1 = \lambda f_x', \quad dy_1 = \lambda f_y'.$$

Подставляя, получимъ

$$dx - i dy = \lambda\,(f_x' + i f_y')\frac{fy' + i f_x'}{f_y' - i f_x'} = -\lambda\,(f_x' - i f_y').$$

Наконецъ, мы получаемъ

$$dx = -\lambda f'_x, \quad dy = -\lambda f_y',$$

или

$$dx = -dx_1, \quad dy = -dy_1,$$

то есть то, что требовалось доказать.

10. Во всемъ послѣдующемъ мы будемъ говорить, что точки ξ, $\eta^{(1)}$, близкія къ точкѣ M контура, образуютъ *пару на контурѣ.*

Будемъ называть точку $\eta_k^{(1)}$ *связанною* съ точкою ξ, другія же точки $\eta_l^{(1)}$ *свободными.*

11. Приложимъ комплексное преобразованіе къ каждой изъ точекъ

$$\eta_1^{(1)},\ \eta_2^{(1)}, \ldots . \eta_n^{(1)}.$$

Мы предположимъ, что области

$$\Gamma_1^{(1)},\ \Gamma_2^{(1)}, \ldots . \Gamma_n^{(1)},$$

которыя соотвѣтствуютъ области Γ для количествъ (6), не заключаютъ критическихъ точекъ уравненія (2).

Каждой точкѣ $\eta_l^{(1)}$ соотвѣтствуютъ, вообще говоря, n точекъ

$$\eta_{1l}^{(2)} = F_1(\dot{\eta}_l^{(1)}),\quad \eta_{2l}^{(2)} = F_2(\dot{\eta}_l^{(1)}), \ldots . \ \eta_{nl}^{(2)} = F_n(\dot{\eta}_l^{(1)}) \ldots (8)$$

По крайней мѣрѣ, одна изъ этихъ точекъ должна совпадать съ ξ, ибо количества (8) суть корни уравненія

$$f\left(\frac{\eta^{(2)} + \dot{\eta}_l^{(1)}}{2},\ \frac{\eta^{(2)} - \dot{\eta}_l^{(1)}}{2i}\right) = 0 \ldots \ldots \ldots . (9)$$

количество же $\eta_l^{(1)}$ есть одинъ изъ корней уравненія

$$f\left(\frac{\eta_l^{(1)} + \dot{\xi}}{2},\ \frac{\eta_l^{(1)} - \dot{\xi}}{2i}\right) = 0 \ldots \ldots \ldots . (10)$$

Измѣняя въ уравненіи (10) $+i$ на $-i$, мы получимъ

$$f\left(\frac{\xi + \dot{\eta}_l^{(1)}}{2},\ \frac{\xi - \dot{\eta}_l^{(1)}}{2i}\right) = 0 \ldots \ldots \ldots . (11)$$

Послѣднее равенство показываетъ, что между корнями $\eta^{(2)}$ уравненія (9) находится по крайней мѣрѣ одинъ равный ξ.

На основаніи того, что сказано объ области Γ, корень $\eta^{(2)} = \xi$ простой.

Итакъ, новое преобразованіе, вообще говоря, даетъ для каждой точки $\eta_l^{(1)}$ точку ξ и $n - 1$ другихъ точекъ.

Мы можемъ такимъ образомъ получить $n(n-1)$ новыхъ точекъ.

12. Легко составить алгебраическое уравненіе, корни котораго соотвѣтствуютъ получаемымъ такимъ образомъ новымъ точкамъ.

Для этой цѣли разсмотримъ цѣлую функцію

$$\Pi_1(\eta^{(2)},\ \xi,\ \dot{\eta}_l^{(1)}) = \frac{f(9) - f(11)}{\eta^{(2)} - \xi},$$

гдѣ $f(9)$, $f(11)$ суть сокращенныя обозначенія первыхъ частей уравненій (9), (11).

Функція Π_1 степени $n - 1$.

Исключая $\dot{\eta}_l^{(1)}$ между уравненіями (9) и $\Pi_1 = 0$, мы получимъ уравненіе

$$\Phi_1(\eta^{(2)},\ \xi) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Это послѣднее уравненіе вообще степени $n(n-1)$ и его корни даютъ $n(n-1)$ точекъ, вводимыхъ излагаемою второю операціею.

Необходимо имѣть въ виду, что корни $\eta^{(1)}$ первой операціи суть функціи ξ, тогда какъ корни $\eta^{(2)}$ второй суть функціи отъ ξ.

13. Разсматривая n точекъ $\eta^{(1)}$ первой операціи, мы видѣли уже, что одна изъ этихъ точекъ образуетъ пару съ точкою ξ.

Пусть будетъ эта точка $\eta_k^{(1)}$. Легко видѣть, что другія $n-1$ точекъ $\eta_l^{(1)}$ образуютъ $n-1$ паръ съ $n-1$ точками второй операціи. Въ самомъ дѣлѣ, если ξ безконечно близокъ къ контуру C, то будетъ имѣть мѣсто равенство

$$\eta_k^{(1)} = \xi + \varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно малая величина.

Отсюда

$$\eta_{lk}^{(2)} = F_l(\dot{\eta}_k^{(1)}) = F_l(\xi) + \delta,$$

гдѣ δ также безконечно малая величина.

Итакъ мы видимъ, что точка $\eta_{lk}^{(2)}$ безконечно близка къ точкѣ $\eta_l^{(1)}$; будемъ говорить, что обѣ эти точки образуютъ *пару*.

Послѣ второй операціи получаются, вообще говоря, n паръ и остаются еще $n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$ точекъ $\eta^{(2)}$ свободными.

14. Переходимъ теперь къ третьей операціи. Для каждой точки $\eta^{(2)}_{lm}$ получаются n соотвѣтственныхъ точекъ

$$\eta^{(3)}_{1lm} = F_1(\dot{\eta}^{(2)}_{lm}), \ldots\ldots \eta^{(3)}_{nlm} = F_n(\dot{\eta}^{(2)}_{lm}).$$

Одна изъ этихъ точекъ принадлежитъ къ числу точекъ первой операціи, $n-1$ другихъ суть, вообще говоря, точки новыя.

Такимъ образомъ мы можемъ получить $n(n-1)^2$ новыхъ точекъ.

15. Можно получить уравненіе алгебраическое, которое даетъ всѣ новыя точки третье операціи при помощи алгебраическихъ исключеній.

Въ самомъ дѣлѣ, измѣнимъ $+i$ на $-i$ въ уравненіи (12)

$$\Phi_1^0(\dot{\eta}^{(2)},\ \dot{\xi})=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

кромѣ того

$$f\left(\frac{\eta^{(3)}+\dot{\eta}^{(2)}}{2},\ \frac{\eta^{(3)}-\dot{\eta}^{(2)}}{2i}\right)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

исключая величину $\dot{\eta}^{(2)}$ между уравненіями (13) и (14), мы получимъ уравненіе

$$\Pi_2(\eta^{(3)},\ \dot{\xi})=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

степени $n^2(n-1)$, корни котораго суть

$$\eta_i^{(1)},\quad \eta^{(3)}{}_{lmk}.$$

При помощи уравненія (10) можно вывести изъ уравненія (15) $n(n-1)$ корней $\eta_i^{(1)}$ и получить такимъ образомъ уравненіе

$$\Phi_2(\eta^{(3)},\ \dot{\xi})=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

степени $n^2(n-1)-n(n-1)=n(n-1)^2$, которое даетъ новыя точки третьей операціи.

16. Легко видѣть, что свободныя точки второй операціи образуютъ пары съ $(n-1)^2$ корнями уравненія (16).

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\eta^{(3)}{}_{lmk}=F_l(\dot{\eta}^{(2)}{}_{mk}),$$

но мы уже видѣли, что

$$\eta^{(2)}{}_{mk}=\eta^{(1)}{}_m+\varepsilon,$$

гдѣ ε безконечно малая величина.

Отсюда

$$\eta^{(3)}{}_{lmk}=F_l(\dot{\eta}^{(1)}{}_m)+\delta=\eta^{(2)}{}_{lm}+\delta,$$

гдѣ δ — безконечно малая величина.

Наконецъ мы видимъ, что послѣ третьей операціи остаются свободными точки въ числѣ:

$$n(n-1)^2-(n-1)^2=(n-1)^3.$$

Число же паръ, образованныхъ тремя операціями, равно

$$1+(n-1)+(n-1)^2.$$

17. Продолжая наши разсужденія далѣе, мы приходимъ къ операціи нѣкотораго порядка p.

Теорія алгебраическихъ исключеній намъ показываетъ, что можно образовать уравненіе $\Phi_{p-1}=0$ степени $n(n-1)^{p-1}$, которое бы давало всѣ новыя точки $\eta^{(p)}$ послѣдней операціи.

Всѣ корни $\eta^{(p)}$ суть функціи отъ ξ, если число p четное, и функціи отъ $\dot{\xi}$, если p нечетное.

Первыя p операцій могутъ дать

$$1+(n-1)+(n-1)^2+\ldots+(n-1)^{p-1}$$

паръ и $(n-1)^p$ свободныхъ точекъ.

18. Въ различныхъ частныхъ случаяхъ наши общія разсужденія могутъ приводить къ различнымъ упрощеніямъ.

Въ самомъ дѣлѣ, степени уравненій $\Phi_i=0$ въ различныхъ частныхъ случаяхъ могутъ понижаться, такъ какъ извѣстные корни могутъ совпадать.

19. Простѣйшій случай представляютъ контуры, для которыхъ операція нѣкотораго порядка не вводитъ болѣе свободныхъ точекъ.

Въ этомъ случаѣ, продолжая операціи, мы приходимъ къ точкамъ, уже полученнымъ изъ предыдущихъ операцій. Получается извѣстное число паръ, которыя образуютъ групу точекъ.

Будемъ говорить, что въ этомъ случаѣ получается *конечная група*.

Въ обратномъ случаѣ послѣдовательныя операціи вводятъ безконечное число точекъ, которыя образуютъ *безконечную групу*.

Если всѣ точки безконечной групы расположены на конечномъ разстояніи отъ нѣкоторой точки контура, то мы будемъ называть такую групу *ограниченною*.

Мы скажемъ, что безконечная неограниченная група *правильная*, если свободныя точки безпредѣльно удаляются по мѣрѣ увеличенія нумера операціи.

Неправильныя безконечныя групы даютъ безчисленное множество точекъ безконечно близкихъ между собою, которыя могутъ въ извѣстныхъ случаяхъ образовать кривую, или покрывать непрерывнымъ образомъ поверхность.

20. Будемъ классифицировать контуры, дающіе конечныя групы, на *роды* по числу операцій, необходимыхъ и достаточныхъ для полученія всѣхъ точекъ групы, такъ что будемъ называть контуръ C контуромъ n-го рода, если для полученія групы необходимо произвести n операцій.

21. Прямая линія и кругъ суть единственныя алгебраическія линіи перваго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, будемъ искать форму уравненія $f(x, y) = 0$ контура C, дающаго мѣсто однозначному преобразованію.

Уравненіе (2) должно быть первой степени относительно ξ и, слѣдовательно, оно должно имѣть форму

$$\xi\Psi(\dot{\xi}, i) + \Omega(\dot{\xi}, i) = 0 \qquad \qquad (17)$$

гдѣ Ψ и Ω суть цѣлыя функціи относительно $\dot{\xi}$, i и коэффиціентовъ уравненія (1).

Замѣчая, что первая часть уравненія (2) не измѣняется отъ замѣны $+i$ на $-i$, мы можемъ написать уравненіе (17) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\dot{\xi}\Psi(\xi, -i) + \Omega(\xi, -i) = 0 \qquad \qquad (18)$$

Уравненіе (18) показываетъ, что (17) должно быть первой степени относительно $\dot{\xi}$.

Такимъ образомъ мы видимъ, что наиболѣе общая форма уравненія контура перваго рода есть

$$A\xi\dot{\xi} + B\xi + C\dot{\xi} + D = 0 \qquad \qquad (19)$$

Чтобы уравненіе (19) давало вещественный контуръ, необходимо и достаточно, чтобы A и D были числа вещественныя, между тѣмъ какъ количества B и C мнимыя сопряженныя.

Уравненіе (19) даетъ кругъ для A отличнаго отъ нуля и прямую при $A = 0$.

22. Слѣдующій случай должны представлять контуры второго рода, которые даютъ мѣсто двумъ операціямъ.

Нетрудно убѣдиться, что между линіями второго порядка относятся ко второму роду лишь равнобочная гипербола и двѣ прямыя перпендикулярныя между собою.

Изъ линій высшихъ порядковъ относятся ко второму роду, напримѣръ, лемписката Бернулли, или, болѣе общимъ образомъ, кривыя, опредѣляемыя уравненіемъ

$$(x^2 + y^2)^n = b^n \left[(x + iy)^n + (x - iy)^n\right].$$

Достаточно общій классъ контуровъ второго рода даетъ уравненіе

$$\varphi(x + iy, i) \;\; \varphi(x - iy, -i) + (A + Bi) \;\; \varphi(x + iy, \; i) +$$
$$+ (A - Bi) \;\; \varphi(x - iy, -i) + C = 0,$$

гдѣ A, B, C суть числа вещественныя и функція $\varphi(z, \; i)$ произвольная раціональная отъ количествъ z, i съ вещественными коэффиціентами.

23. Къ числу контуровъ съ конечными группами изъ коническихъ сѣченій принадлежатъ лишь гиперболы, уголъ между асимптотами которыхъ соизмѣримъ съ π, а также пересѣкающіяся прямыя, уголъ которыхъ соизмѣримъ съ π.

24. Изложивъ нѣсколько общихъ свойствъ комплекснаго преобразованія фигуръ, мы покажемъ его приложеніе къ рѣшенію задачи Дирихле.

Остановимся сначала на контурахъ съ конечными группами.

Пусть будетъ заданъ контуръ рода λ. Онъ даетъ мѣсто λ послѣдовательнымъ операціямъ комплекснаго преобразованія и мы получаемъ группу $2m$ точекъ

$$\xi, \;\; (\eta^{(1)}, \ldots\ldots), \;\; (\eta^{(2)}, \ldots\ldots), \;\; (\eta^{(\lambda)}, \ldots\ldots).$$

Вещественная часть ω выраженія

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\dfrac{f(s)\,dz}{z-\xi}-\dfrac{1}{2\pi i}\Sigma\int^{(C)}\dfrac{f(s)\,dz}{z-\eta^{(1)}}+\dfrac{1}{2\pi i}\Sigma\int^{(C)}\dfrac{f(s)\,dz}{z-\eta^{(2)}}\\ \ldots\ldots+(-1)^{\lambda}\dfrac{1}{2\pi i}\Sigma\int^{(C)}\dfrac{f(s)\,dz}{z-\eta^{(\lambda)}},\end{array}\right\}\quad . . (20)$$

гдѣ суммы распространены на всѣ точки послѣдовательныхъ операцій, даетъ рѣшеніе задачи Дирихле для контуровъ, удовлетворяющихъ слѣдующимъ условіямъ:

1) для всѣхъ точекъ ξ области, ограниченной контуромъ, ни одна изъ точекъ групы не должна попадать на контуръ;

2) когда ξ приближается къ контуру, то она даетъ единственную пару на контурѣ.

Интегралы, входящіе въ составъ выраженія (20) взяты вдоль по полному обводу заданнаго контура C.

Необходимо замѣтить, что функція $f(s)$ дуги s контура C есть та заданная функція, со значеніями которой должны совпадать значенія искомаго рѣшенія задачи Дирихле для точекъ контура.

Мы будемъ во всемъ дальнѣйшемъ функцію $f(s)$ предполагать вещественною, конечною, непрерывною и однозначною.

Если контуръ замкнутый, то функція $f(s)$ должна быть періодическою съ періодомъ равнымъ S длинѣ всего контура.

Въ случаѣ кривыхъ съ безконечными вѣтвями, контуръ можетъ быть образованъ изъ одной безконечной вѣтви кривой или изъ нѣсколькихъ вѣтвей той же кривой.

Если будетъ задана часть плоскости безконечныхъ размѣровъ между разсматриваемыми вѣтвями алгебраической кривой, то мы обратимъ её въ область, ограниченную полнымъ обводомъ контура черезъ соединеніе удаленныхъ точекъ отдѣльныхъ безконечныхъ вѣтвей дугами круга безконечнаго радіуса.

Во всемъ дальнѣйшемъ мы предположимъ, что искомая функція въ случаѣ контуровъ, образованныхъ при помощи дугъ безконечно-большого круга, правильная для точекъ безконечно далекихъ, то есть, что для всѣхъ точекъ безконечно далекаго круга она принимаетъ постоянное значеніе B, которое совпадаетъ со значеніемъ искомой функціи въ безконечно далекой точкѣ.

Въ случаѣ безконечной вѣтви мы должны нѣкоторую точку M_0 этой вѣтви считать за начало дугъ и эти дуги считать положительными въ одну сторону, отрицательными же въ другую.

Для безконечной точки мы положимъ

$$f(-\infty) = f(+\infty) = B.$$

25. Обозначая черезъ θ уголъ, составляемый съ осью x-овъ прямою L, соединяющею точку ζ плоскости съ нѣкоторою точкою z безконечной вѣтви алгебраической кривой, мы замѣчаемъ, что при удаленіи точки z вдоль по безконечной вѣтви алгебраической кривой прямая L стремится къ нѣкоторому опредѣленному положенію, составляющему уголъ θ_0 съ осью x-овъ. Будемъ называть уголъ θ_0 *асимптотическимъ* для даннаго направленія безконечной вѣтви.

Разсматривая дугу безконечнаго круга между двумя вѣтвями даннаго контура съ асимптотическими углами θ_0 и θ_1, мы замѣтимъ, что всякій интегралъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(s)\,dz}{z-t},$$

распространенный на эту дугу будетъ равенъ

$$\pm\frac{1}{2\pi}f(\infty)\,(\theta_1-\theta_0)$$

независимо отъ величины t.

Отсюда слѣдуетъ, что части интеграловъ суммы (20) относящіяся къ дугамъ безконечнаго круга, взаимно сокращаются, ибо въ выраженіи (20) столько же интеграловъ со знакомъ $+$, сколько со знакомъ минусъ.

Итакъ мы видимъ, что дуги безконечнаго круга, вводимыя при доказательствѣ теоремы, не играютъ никакой роли въ окончательномъ результатѣ.

26. Доказательство высказанной теоремы разобьемъ на нѣсколько частей.

Сначала покажемъ, что вещественная часть суммы двухъ интеграловъ

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(s)\,dz}{z-\xi}-\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(s)\,dz}{z-\eta_k^{(1)}},$$

соотвѣтствующихъ двумъ точкамъ ξ и $\eta_k^{(1)}$, дающимъ единственную пару на контурѣ, стремится къ $f(s_0)$ по мѣрѣ приближенія точки ξ къ точкѣ контура M_0, соотвѣтствующей значенію s_0 дуги.

Обозначая черезъ $\mathfrak{R}(J)$ вещественную часть J, разсмотримъ разность

$$\mathfrak{R}(J)-f(s_0).$$

Эта разность равна, очевидно, вещественной части интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}[f(s)-f(s_0)]\frac{\xi-\eta}{(z-\xi)\,(z-\eta)}\,dz.$$

Здѣсь для сокращенія письма написана буква η вмѣсто $\eta_k^{(1)}$.

Предполагая сначала контуръ замкнутымъ, получимъ

$$|\,\mathfrak{R}(J)-f(s_0)\,| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^S |\,f(s)-f(s_0)\,|\;\frac{|\,\xi-\eta\,|}{|\,z-\xi\,|\;|\,z-\eta\,|}\,ds.$$

Вслѣдствіе непрерывности функціи $f(s)$ можно каждому числу δ сопоставить другое положительное число σ, чтобы было при

$$|\,s-s_0\,| \leqq \sigma_0 \quad \text{также} \quad |\,f(s)-f(s_0)\,| < \delta.$$

Поведемъ точку ξ по нормали точки M_0 контура къ точкѣ M_0.

По доказанной уже теоремѣ получаемъ для достаточно близкихъ точекъ ξ и z къ точкѣ M_0 соотношенія

$$|\,\xi-\eta\,| = 2\varepsilon, \quad |\,z-\xi\,| = \sqrt{(s-s_0)^2+\varepsilon^2},$$

$$|\,z-\eta\,| = \sqrt{(s-s_0)^2+\varepsilon^2},$$

гдѣ ε безконечно малая величина.

Отсюда получаемъ

$$|\,\mathfrak{R}(J)-f(s_0)\,| < \frac{1}{2\pi}\int_{s_0+\sigma}^{s_0+S-\sigma} K\frac{2\varepsilon\; ds}{|\,z-\xi\,|\;|\,z-\eta\,|} + \frac{\delta}{\pi}\int_{s_0-\sigma}^{s_0+\sigma}\frac{\varepsilon\, ds}{(s-s_0)^2+\varepsilon^2},$$

гдѣ K нѣкоторое опредѣленное число не меньшее maximum'a maximorum значеній

$$|\,f(s)-f(s_0)\,|\;;$$

отсюда получаемъ

$$|\,\mathfrak{R}(J)-f(s_0)\,| < \frac{K\varepsilon}{\pi}\int_{s_0+\sigma}^{s_0+S-\sigma}\frac{ds}{|\,z-\xi\,|\;|\,z-\eta\,|} + \frac{2\delta}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Каждому числу $\delta_1 > 0$ сопоставляемъ по произволу другое положительное число δ меньшее δ_1.

Возьмемъ число σ, соотвѣтствующее числу δ, и ε достаточно малое для того чтобы было

$$\frac{K\varepsilon}{\pi}\int\limits_{s_0+\sigma}^{s_0+S-\sigma}\frac{ds}{|z-\xi|\,|z-\eta|}<\delta_1-\delta,$$

тогда мы получимъ

$$|\,\mathfrak{R}(J)-f(s_0)\,|<\delta_1,$$

что показываетъ, что

$$\lim\mathfrak{R}(J)=f(s_0).$$

Для контура съ безконечными вѣтвями вмѣсто интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_0+\sigma}^{s_0+S-\sigma}|\,f(s)-f(s_0)\,|\,\frac{2\varepsilon\,ds}{|z-\xi|\,|z-\eta|}$$

надо разсматривать сумму

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{s_0+\sigma}^{+\infty}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{s_0-\sigma}.$$

Не трудно видѣть, что эти интегралы сохраняютъ конечныя значенія и всѣ наши разсужденія приведенныя выше сохраняются.

Что касается до частей интеграловъ, относящихся къ дополнительнымъ дугамъ круга безконечнаго радіуса, то мы замѣчаемъ, что онѣ взаимно сокращаются, ибо, будучи разныхъ знаковъ, имѣютъ общую величину $|\,f(\infty)\,|\,\frac{\gamma}{2\pi}$, гдѣ γ абсолютная величина разности асимптотическихъ угловъ вѣтвей контура, между которыми проведена разсматриваемая дуга.

Нетрудно видѣть, что вещественная часть ω выраженія (20) есть рѣшеніе уравненія Лапласа, ибо всѣ $\eta^{(2p)}$ суть функціи отъ ξ, тогда какъ $\eta^{(2p+1)}$ отъ $\dot{\xi}$.

27. Можно показать, что всѣ интегралы конечны, откуда будетъ слѣдовать, что функція ω также конечна. Подобнымъ же образомъ необходимо показать, что всѣ производныя функціи ω первыхъ двухъ порядковъ будутъ конечныя.

Возьмемъ число α, чтобы имѣли мѣсто неравенства

$$|\,z-\xi\,|>\alpha,\quad |\,z-\eta^{(1)}\,|>\alpha,\;|\,z-\eta^{(2)}\,|>\alpha,\ldots\;|\,z-\eta^{(\lambda)}\,|>\alpha$$

для всѣхъ точекъ групы и всѣхъ точекъ контура.

Полагая

$$z-\xi=\rho e^{i\theta},\quad z-\eta^{(1)}=\rho_{(1)}e^{i\psi_{(1)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z-\eta^{(\lambda)}=\rho_{(\lambda)}e^{i\psi(\lambda)},$$

мы получимъ

$$\left.\begin{aligned}\omega(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int^{(C)}f(s)\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\Sigma\int^{(C)}f(s)\,d\psi^{(1)}+\ldots\\ \ldots+(-1)^{\lambda}\frac{1}{2\pi}\Sigma\int^{(C)}f(s)\,d\psi^{(\lambda)}\end{aligned}\right\}\ldots(21)$$

Это выраженіе показываетъ, что функція ω конечна.

Дифференцируя получимъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^n\omega(x,\ y)}{\partial x^e\,\partial y^j}=A_0\int^{(C)}f(s)\,d\left(\frac{\sin n\theta}{\rho^n}\right)+B_0\int^{(C)}f(s)\,d\left(\frac{\cos n\theta}{\rho^n}\right)-\\ -\sum_{k=0}^{k=n-1}\sum^{\eta^{(1)}}\left\{\mathfrak{A}_k^{(1)}\int^{(C)}f(s)\,d\,\frac{\sin(n-k)\psi^{(1)}}{\rho_{(1)}{}^{n-k}}+\mathfrak{B}_k^{(1)}\int^{(C)}f(s)\,d\,\frac{\cos(n-k)\psi^{(1)}}{\rho_{(1)}{}^{n-k}}\right\}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{(\lambda)}\sum_{k=0}^{k=n-1}\sum^{\eta^{(\lambda)}}\left\{\mathfrak{A}_k^{(\lambda)}\int^{(C)}f(s)\,d\,\frac{\sin(n-k)\psi^{(\lambda)}}{\rho_{(\lambda)}{}^{n-k}}+\mathfrak{B}_k^{(\lambda)}\int^{(C)}f(s)\,d\,\frac{\sin(n-k)\psi^{(\lambda)}}{\rho_{(\lambda)}{}^{n-k}}\right\}\end{aligned}\right\}(22)$$

гдѣ A_0 и B_0 суть числа постоянныя, а $\mathfrak{A}_k^{(l)}$, $\mathfrak{B}_k^{(l)}$ нѣкоторыя функціи отъ x и y.

Въ интегралахъ, входящихъ въ выраженія (21), (22), независимая перемѣнная есть дуга s, которая измѣняется вдоль по контуру. Чтобы показать конечность выраженій (21), (22), для контуровъ съ безконечными вѣтвями, введемъ новыя независимыя перемѣнныя

$$\theta,\ \psi^{(p)},\ \frac{\sin n\theta}{\rho^n},\ \frac{\cos n\theta}{\rho^n},\ \frac{\sin n\psi^{(p)}}{\rho^n{}_{(p)}},\ \frac{\cos n\psi^{(p)}}{\rho^n{}_{(p)}}\ldots\ldots\ldots(23)$$

Нетрудно видѣть, что части контура, состоящія изъ дугъ безконечнаго круга, не вліяютъ на выраженія (21), (22).

При удаленіи точки s вдоль по каждой изъ безконечныхъ вѣтвей дифференціалы перемѣнныхъ (23) мѣняютъ свой знакъ конечное число разъ. Принимая это въ соображеніе, а также то, что величины (23) на основаніи приведенныхъ выше неравенствъ, сохраняютъ конечныя значенія, мы замѣчаемъ, что выраженія (21), (22), приводятся къ конечному числу интеграловъ, взятыхъ отъ конечной функціи въ конечныхъ предѣлахъ, откуда будетъ слѣдовать, что

$$\omega, \quad \frac{\partial^n \omega}{\partial x^e\, \partial y^j}$$

конечны и опредѣленны для всѣхъ точекъ внутри контура, дающихъ для коэффиціентовъ $\mathfrak{A}_k^{(l)}$, $\mathfrak{B}_k^{(l)}$ числа конечныя и опредѣленныя. Точки внутри контура, обращающія въ безконечность или неопредѣленность указанныя коэффиціенты подлежатъ особому разсмотрѣнію.

28. Функція ω однозначна, какъ симметрическая функція корней всѣхъ операцій.

29. На основаніи доказаннаго въ параграфѣ 26 мы видимъ, что при приближеніи ξ къ точкѣ $M_0\,(s_0)$ контура вещественная часть суммы двухъ интеграловъ

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f\,(s)\,dz}{z-\xi}-\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f\,(s)\,dz}{z-\eta_k^{(1)}}$$

приближается къ числу $f\,(s_0)$.

Нетрудно видѣть, что сумма всѣхъ остальныхъ интеграловъ стремится къ нулю, ибо остальныя точки сближаются попарно и отстоятъ на конечномъ разстояніи отъ контура и, слѣдовательно, соотвѣтственные интегралы, оставаясь конечными, попарно сокращаются, будучи разныхъ знаковъ.

Итакъ мы видимъ, что функція $\omega\,(x,\ y)$ дѣйствительно принимаетъ заданныя значенія $f\,(s)$ на контурѣ.

30. Сопоставляя все сказанное, мы видимъ, что рѣшеніе для контура, удовлетворяющаго предписаннымъ условіямъ, выражается по формулѣ

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f\,(s)\,D_z \lg\Omega\,dz\right)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(24)$$

гдѣ

$$\Omega=(z-\xi)\,\Phi_1^{-1}\,\Phi_2\,\Phi_3^{-1}\ldots\,\Phi_\lambda^{(-1)^\lambda}.$$

Функція Φ_p цѣлая, представляющая первую часть уравненія

$$\Phi_p\left(z,\ \frac{1+(-1)^p}{2}\,\xi+\frac{1-(-1)^p}{2}\,\dot{\xi}\right)=0,$$

дающаго новыя точки операціи порядка p.

31. Приложимъ наши общія разсужденія къ нѣсколькимъ примѣрамъ, причемъ начнемъ со случаевъ простѣйшихъ: прямой линіи и круга.

Пусть заданный контуръ прямолинейный и примемъ его за ось x-овъ.

Уравненіе контура имѣетъ видъ:

$$y=0$$

откуда получаемъ

$$\frac{\xi-\dot{\xi}}{2i}=0,$$

или

$$\eta=\dot{\xi}=x-iy.$$

Рѣшеніе задачи имѣетъ видъ:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,ds}{s-\xi}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,ds}{s-\dot{\xi}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(s)\,y\,ds}{(s-x)^2+y^2}.$$

32. Въ случаѣ круга основная теорема даетъ рѣшеніе задачи, какъ для внутренней части круга, такъ и для внѣшней.

Въ обоихъ случаяхъ мы получимъ формулу

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(s)\,(\xi-\eta)\,dz}{(z-\xi)\,(z-\eta)}\right).$$

Уравненіе круга есть $x^2+y^2=r^2$, что даетъ $\xi\dot{\xi}=r^2$, откуда

$$\eta=\frac{r^2}{\xi}.$$

Употребляя обозначенія $\xi=\rho e^{i\theta}$, $z=re^{i\psi}$, мы получимъ послѣ простыхъ преобразованій извѣстный интегралъ Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi)\,(r^2-\rho^2)\,d\psi}{r^2-2r\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}.$$

Для внѣшней части направленіе контура мѣняется и мы получаемъ интегралъ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi)(\rho^2-r^2)\,d\psi}{r^2-2r\rho\,\cos(\theta-\psi)+\rho^2}.$$

Легко видѣть, что логариѳмическій потенціалъ внѣшнихъ точекъ равенъ значеніямъ потенціала внутреннихъ, причемъ соотвѣтствіе точекъ устанавливается на основаніи преобразованія при помощи обратныхъ радіусовъ векторовъ.

33. Обращаясь къ болѣе сложнымъ контурамъ, дающимъ конечныя групы, разсмотримъ равностороннюю гиперболу:

$$x^2-y^2=a^2.$$

Вводя комплексныя величины, будемъ имѣть $\xi^2+\dot{\xi}^2=2a^2$. Уравненіе $\Phi_1(\eta^{(1)},\ \dot{\xi})=0$, которое даетъ новыя точки первой операціи, пишется такъ:

$$\eta^{(1)2}+\dot{\xi}^2-2a^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (25)$$

сдѣлаемъ вторую операцію

$$\eta^{(2)2}+\dot{\eta}^{(1)2}-2a^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (26)$$

Перемѣняя въ уравненіи (25) $+i$ на $-i$, получимъ

$$\dot{\eta}^{(1)2}+\xi^2-2a^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (27)$$

Вычитая изъ уравненія (26) уравненіе (27), мы получимъ

$$(\eta^{(2)}-\xi)(\eta^{(2)}+\xi)=0.$$

Уравненіе $\Phi_2(\eta^{(2)},\ \xi)=0$, дающее новыя точки второй операціи, получаетъ видъ:

$$\eta^{(2)}+\xi=0.$$

Это уравненіе даетъ точку $-\xi$, образующую пару съ одною изъ точекъ $\eta^{(1)}$.

Третья операція воспроизводитъ точки первой и мы получаемъ группу четырехъ точекъ, образующихъ двѣ пары

$$(\xi,\ \eta_1^{(1)}),\ (-\xi,\ \eta_2^{(1)})$$

гдѣ

$$\eta_2^{(1)} = -\eta_1^{(1)}.$$

Въ этомъ случаѣ

$$\Omega = \frac{z^2 - \xi^2}{z^2 + \dot{\xi}^2 - 2a^2},$$

откуда получается рѣшеніе задачи Дирихле для части плоскости, содержащей одинъ изъ фокусовъ гиперболы и ограниченной вѣтвью гиперболы и дугою безконечнаго круга.

Это рѣшеніе выражается слѣдующимъ образомъ:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\pi i}\int^{(C)}\frac{f(s)\,[\xi^2 + \dot{\xi}^2 - 2a^2]\,s\,ds}{(s^2 - \xi^2)\,(s^2 + \dot{\xi}^2 - 2a^2)}\right).$$

34. Разсмотримъ еще лемнискату Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Вводя количества комплексныя, получимъ

$$2\xi^2\,\dot{\xi}^2 - a^2(\xi^2 + \dot{\xi}^2) = 0.$$

Уравненіе первой операціи будетъ имѣть видъ:

$$2\eta^{(1)2}\,\dot{\xi}^2 - a^2(\eta^{(1)2} + \dot{\xi}^2) = 0. \qquad (28)$$

Вторая операція даетъ

$$2\eta^{(2)2}\,\dot{\eta}^{(1)2} - a^2(\eta^{(2)2} + \dot{\eta}^{(1)2}) = 0 \qquad (29)$$

Измѣняя въ (28) уравненіи $+i$ на $-i$, получимъ

$$2\dot{\eta}^{(1)2}\,\xi^2 - a^2(\dot{\eta}^{(1)2} + \xi^2) = 0. \qquad (30)$$

Вычитая уравненіе (29) изъ уравненія (30), получимъ

$$(2\dot{\eta}^{(1)2} - a^2)\,(\eta^{(2)2} - \xi^2) = 0,$$

откуда

$$\eta^{(2)2} - \xi^2 = 0.$$

Этою второю операціею исчерпывается группа точекъ.

Такимъ образомъ мы видимъ, что для внутренней части одного изъ листковъ лемнискаты будемъ имѣть

$$\Omega = \frac{z^2 - \xi^2}{2z^2 \dot{\xi}^2 - a^2 (z^2 + \dot{\xi}^2)}.$$

Рѣшеніе задачи принимаетъ видъ:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\pi i}\int^{(C)} \frac{f(s)\,[2\xi^2 \dot{\xi}^2 - a^2(\xi^2 + \dot{\xi}^2)]\,z\,dz}{(z^2 - \xi^2)\,(2z^2 \dot{\xi}^2 - a^2 z^2 - a^2 \dot{\xi}^2)}\right).$$

35. Рѣшеніе для лемнискаты должно получаться изъ рѣшенія для гиперболы при помощи преобразованія по способу обратныхъ радіусовъ векторовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, прилагая формулы преобразованія

$$zt = a^2, \quad \xi\tau = a^2, \quad \dot{\xi}\dot{\tau} = a^2,$$

получимъ, что формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(s)\, R(z, \xi)\, dz + \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(s)\, Q(z, \dot{\xi})\, dz$$

преобразовывается въ слѣдующую:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(\gamma)} f(s)\, R\left(\frac{a^2}{t}, \frac{a^2}{\tau}\right)\frac{a^2\,dt}{t^2} - \frac{1}{2\pi i}\int^{(\gamma)} f(s)\, Q\left(\frac{a^2}{t}, \frac{a^2}{\dot{\tau}}\right)\frac{a^2\,dt}{t^2},$$

гдѣ контуръ γ есть преобразованіе контура C.

36. Какъ примѣръ на случай контура третьяго рода, разсмотримъ квадрантъ круга.

Будемъ разсматривать часть плоскости, расположенную въ положительномъ углѣ между осями координатъ внутри круга

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Въ этомъ случаѣ уравненіе контура имѣетъ видъ:

$$xy\,(x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Вводя комплексныя величины, получимъ

$$(\xi^2 - \dot{\xi}^2)\,(\xi\dot{\xi} - a^2) = 0.$$

Точки первой операціи даются корнями уравненія

$$(\eta^{(1)2} - \xi^2)\,(\eta^{(1)}\xi - a^2) = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Производя вторую операцію, мы получимъ

$$(\eta^{(2)2} - \dot{\eta}^{(1)2})\,(\eta^{(2)}\dot{\eta}^{(1)} - a^2) = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Перемѣняя въ уравненіи (31) $+i$ на $-i$, получимъ

$$(\dot{\eta}^{(1)2} - \xi^2)\,(\dot{\eta}^{(1)}\xi - a^2) = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Исключая количество $\dot{\eta}^{(1)}$ между уравненіями (32) и (33), получимъ точки второй операціи.

Новыя точки даются уравненіемъ

$$(\eta^{(2)} + \xi)\,(\eta^{(2)}\xi - a^2)\,(\eta^{(2)}\xi + a^2) = 0.$$

Третья операція даетъ одну только новую точку

$$\eta^{(3)}\xi + a^2 = 0.$$

Четвертая операція не вводитъ болѣе новыхъ точекъ.

Итакъ, въ случаѣ квадранта функція Ω получаетъ видъ:

$$\frac{(z^2 - \xi^2)\,(z^2\xi^2 - a^4)}{(z^2 - \dot{\xi}^2)\,(z^2\dot{\xi}^2 - a^4)}.$$

37. Обращаясь къ разсмотрѣнію контуровъ, дающихъ безконечныя групы, оставимъ въ сторонѣ контуры съ неправильными групами и обратимся къ контурамъ съ правильными групами.

Можно показать справедливость слѣдующаго предложенія.

Если контуръ, имѣющій правильную групу, удовлетворяетъ условіямъ:

1) для всѣхъ точекъ ξ области, ограниченной контуромъ, ни одна изъ точекъ групы не должна попадать на контуръ;

2) когда ξ приближается къ контуру, то она даетъ единственную пару на контурѣ, то для такого контура рѣшеніе задачи Дирихле дается вещественною частью ω безконечнаго ряда

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z - \xi} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\,\Sigma\int^{(C)}\frac{f(z)\,dz}{z - \eta^{(n)}} \,\ldots\ldots (34)$$

если этотъ рядъ абсолютно сходящійся. Здѣсь внутренняя сумма распространяется на всѣ корни $\eta^{(n)}$ операціи порядка n.

Доказательство то же, что и для групъ конечныхъ.

Выраженіе (34) будучи функціей отъ ξ и $\dot{\xi}$, даетъ своею вещественною частью рѣшеніе уравненія Лапласа, конечное для всѣхъ значеній ξ разсматриваемой области. Функція ω обращается въ $f(s)$ для точекъ M контура, ибо

$$\lim \left| \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(s)\, dz}{z-\xi} - \frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(s)\, dz}{z-\eta_k^{(\prime)}} \right|_{\xi = z \text{ для точки } M} = f(s).$$

Что касается интеграловъ, соотвѣтствующихъ другимъ парамъ, то они попарно уничтожаются, будучи разныхъ знаковъ, при сближеніи точекъ.

Безконечность числа паръ не мѣшаетъ доказательству, ибо мы предполагаемъ рядъ (34) абсолютно сходящимся и, слѣдовательно, сумма всѣхъ интеграловъ одного знака конечная.

Однозначность функціи (34) слѣдуетъ изъ симметричности относительно корней каждой изъ операцій.

Для того, чтобы получалось дѣйствительно рѣшеніе задачи Дирихле, надо убѣдиться въ конечности частныхъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

38. Что касается контуровъ съ правильными групами, для которыхъ рядъ (34) не абсолютно сходящійся, то относительно ихъ замѣтимъ, что въ большинствѣ случаевъ приходится разсматривать предѣлъ величины

$$\Re \left(\frac{1}{2\pi i} \int^{(C)} \frac{f(s)\, ds}{z-\xi} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{n=k} (-1)^n \Sigma \int^{(C)} \frac{f(s)\, dz}{z-\eta^{(n)}} \right) \ldots\ldots (35)$$

при возрастаніи k до безконечности и для каждаго частнаго случая доказывать, что этотъ предѣлъ удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ, требуемымъ отъ рѣшенія задачи Дирихле.

Выраженіе (35) конечно можно представить въ видѣ:

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(s)\, D_z\, lg\, \Omega_k^{*} dz\right),$$

гдѣ

$$\Omega_k = (z-\xi)\, \Phi_1^{-1}\, \Phi_2\, \Phi_3^{-1} \ldots \Phi_k^{(-1)k}.$$

Если мы можемъ выразить предѣлъ

$$\lim\, [\Omega_k\, A_k]_{k=\infty} = \Omega,$$

гдѣ A_k нѣкоторая функція отъ ξ и $\underset{,}{\xi}$, независимая отъ z, черезъ функціи извѣстныя, то вопросъ приводится къ разсмотрѣнію выраженія

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(s)\, D_z\, lg\, \Omega\, dz\right).$$

39. Приложимъ общія соображенія относительно контуровъ съ правильными групами къ нѣсколькимъ примѣрамъ.

Изъ коническихъ сѣченій правильныя групы даютъ эллипсъ, парабола и система двухъ параллельныхъ прямыхъ.

Можно разсматривать случаи параболы и системы двухъ прямыхъ, какъ предѣльные для случая эллипса.

40. Возьмемъ уравненіе эллипса въ видѣ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{гдѣ} \quad a > b.$$

Вводя количества комплексныя, получимъ

$$\xi^2 + \underset{,}{\xi}^2 - 2\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,\xi\underset{,}{\xi} + \frac{4a^2 b^2}{a^2-b^2} = 0.$$

Будемъ употреблять слѣдующія обозначенія

$$c^2 = a^2 - b^2; \quad a_k = \frac{(a+b)^k + (a-b)^k}{2c^{k-1}}$$

$$b_k = \frac{(a+b)^k - (a-b)^k}{2c^{k-1}}.$$

Очевидно, что будемъ имѣть

$$a_k^2 - b_k^2 = c^2, \quad a_k^2 + b_k^2 = c a_{2k}$$

кромѣ того

$$a_k a_l + b_k b_l = a_{k+l} c, \quad a_k b_l + b_k a_l = b_{k+l} c$$

$$a_k a_l - b_k b_l = a_{k-l} c \quad (k > l)$$

$$a_k b_l - b_k a_l = b_{l-k} c \quad (l > k).$$

На основаніи этихъ соотношеній уравненіе первой операціи принимаетъ видъ:

$$\eta^{(1)2} + \xi^2 - 2\,\frac{a_2}{c}\,\eta^{(1)}\,\xi + b_2{}^2 = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Если точка ξ лежитъ внутри эллипса, то точки $\eta^{(1)}$ (36) будутъ внѣ его.

Новыя точки операціи порядка k получатся изъ уравненія

$$\eta^{(k)2} + \zeta^2 - 2\,\frac{a_{2k}}{c}\,\eta^{(k)}\,\zeta + b_2{}^2{}_k = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

гдѣ $\zeta = \xi$, если k четное и $\zeta = \dot{\xi}$, если k нечетное.

Нетрудно видѣть, что точки (37) $\eta^{(k)}$ операціи порядка k совпадаютъ съ точками первой операціи, произведенной надъ ξ по отношенію къ эллипсу, полуоси котораго суть

$$a_k, \quad b_k,$$

отсюда получается, что эти точки находятся внѣ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2{}_k} + \frac{y^2}{b^2{}_k} = 1,$$

потому что ξ находится внутри его, ибо

$$a_k > a, \quad b_k > b.$$

Числа a_k, b_k безгранично возрастаютъ по мѣрѣ увеличенія значка k и мы видимъ, что свободная точка операціи порядка k неопредѣленно удаляется; поэтому група будетъ правильная.

Всѣ точки групы расположены парами на гиперболѣ софокусной съ даннымъ эллипсомъ и только одна пара лежитъ на контурѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе задачи **Дирихле** можетъ быть дано рѣшеніемъ

$$\mathfrak{R}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\frac{f(s)\,dz}{z-\xi}+\frac{1}{\pi i}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\int^{(C)}\frac{f(s)\left[z-\frac{a_{2n}}{c}\zeta\right]dz}{z^2+\zeta^2-2\frac{a_{2n}}{c}z\zeta+b^2_{2n}}\right\}\ldots(38)$$

гдѣ $\zeta=\xi$ для n четнаго и $\zeta=\dot{\xi}$ для n нечетнаго.

Выраженіе (38) можетъ быть представлено въ видѣ

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)}\left(f(s)\,D_z\,lg\,\Omega\,dz\right)\right),$$

гдѣ

$$\Omega=C(z-\xi)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(z^2+\zeta^2-2\frac{a_{2n}}{c}z\zeta+b^2_{2n}\right)^{(-1)^n}$$

причемъ C не зависитъ отъ z.

41. Остается убѣдиться, что рядъ (28) абсолютно сходящійся для всѣхъ значеній ξ внутри эллипса.

Въ самомъ дѣлѣ, можно показать, что точки $\eta^{(k)}$ находятся внѣ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2_{2k-1}}+\frac{y^2}{b^2_{2k-1}}=1\,.$$

Отсюда получается, что

$$|\,z-\eta^{(k)}\,|>a_{2k-1}-a\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

и рядъ модулей

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\pi}\left|\int^{(C)}\frac{f(s)\left[z-\frac{a_{2n}}{c}\zeta\right]dz}{z^2+\zeta^2-2\frac{a_{2n}}{c}z\zeta+b^2_{2n}}\right|\ldots\ldots\ldots(40)$$

сходящійся.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\left|\int_{(n)}^{(C)}\right|<\frac{1}{2}\int_0^S\frac{|\,f(s)\,|\,ds}{|\,z-\eta_1^{(n)}\,|}+\frac{1}{2}\int_0^S\frac{|\,f(s)\,|\,ds}{|\,z-\eta_2^{(n)}\,|},$$

гдѣ S окружность эллипса, а $\eta_1^{(n)}$, $\eta_2^{(n)}$ точки операціи порядка n.

На основаніи неравенствъ (39) мы получимъ

$$\int_0^S\frac{|\,f(s)\,|\,ds}{|\,z-\eta^{(n)}\,|}<\frac{\int_0^S|\,f(s)\,|\,ds}{a_{2n-1}-a}.$$

Принимая во вниманіе неравенство $|f(s)| < A$, мы получимъ, что члены ряда (40), начиная съ $n = 2$, будутъ меньше членовъ сходящагося ряда

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{AS}{\pi} \frac{1}{a_{2n-1} - a}$$

откуда мы и замѣчаемъ, что рядъ (38) абсолютно сходящійся.

Подобнымъ же образомъ докажется конечность частныхъ производныхъ.

42. Не трудно видѣть, что можно суммировать рядъ (38) при помощи эллиптическихъ функцій; получается выраженіе, къ которому можно придти изъ замѣчательныхъ соображеній Шварца *) объ изображеніи поверхности эллипса на поверхности круга. Вслѣдствіе сложности окончательнаго выраженія, удобнѣе на практикѣ вычислять непосредственно по ряду (38), который хорошо сходится.

43. Переходя къ предѣльнымъ случаямъ, возьмемъ параболу. Уравненіе параболы можетъ быть написано такъ

$$y^2 = p^2 - 2px.$$

Отсюда

$$(\xi - \dot{\xi})^2 + 4p^2 - 4p(\xi + \dot{\xi}) = 0.$$

Точки первой операціи получаются изъ уравненій

$$\eta^{(1)2} - 2\eta^{(1)}\dot{\xi} + \dot{\xi}^2 + 4p^2 - 4p\eta^{(1)} - 4p\dot{\xi} = 0 \ldots\ldots (41)$$

Легко видѣть, что, прилагая нашу методу, мы получимъ точки операціи порядка k при помощи уравненія

$$\eta^{(k)2} - 2\eta^{(k)}[\zeta + 2k^2 p] + [\zeta - 2k^2 p]^2 = 0,$$

гдѣ $\zeta = \xi$ при k четномъ и $\zeta = \dot{\xi}$ при k нечетномъ.

Рѣшеніе задачи выражается по формулѣ

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} f(s)\, D_z\, lg\, \Omega\, dz\right)$$

---

*) **Schwarz**. Rappresentazione di un'ellisse sopra un circolo. Annali di Mathematica pura ed applicata. Serie II. Tomo III.

гдѣ

$$D_z\, lg\,\Omega = \frac{1}{z-\xi} + 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{z-\xi-2(2k)^2 p}{z^2-2z\,[\xi+2(2k)^2 p]+[\xi-2(2k)^2 p]^2}$$

$$-2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{z-\xi-2(2k+1)^2 p}{z^2-2z\,[\xi+2(2k+1)^2 p]+[\xi-2(2k+1)^2 p]^2} =$$

$$= \frac{\delta\cos^2(\delta\sqrt{\xi})\ \mathrm{tg}(\delta\sqrt{z})}{\sqrt{z}\ \sin[\delta(\sqrt{z}+\sqrt{\xi})]\sin[\delta(\sqrt{z}-\sqrt{\xi})]} +$$

$$+ \frac{\delta\sin^2(\delta\sqrt{\xi})\ \mathrm{tg}(\delta\sqrt{z})}{\sqrt{z}\ \cos[\delta(\sqrt{z}+\sqrt{\xi})]\cos[\delta(\sqrt{z}-\sqrt{\xi})]},$$

гдѣ

$$\delta = \frac{\pi}{2\sqrt{2p}}.$$

Это рѣшеніе прилагается къ части плоскости заключающей фокусъ.

44. Мы закончимъ разсмотрѣніе коническихъ сѣченій разборомъ случая двухъ параллельныхъ прямыхъ, какъ предѣльнаго для эллипса.

Увеличимъ большую полуось a эллипса до безконечности, оставляя другую полуось b безъ измѣненія.

Мы будемъ имѣть

$$\lim\frac{a_k}{c} = 1,\quad \lim b_k = kb.$$

Формулы для эллипса дадутъ

$$\Omega = C\,(z-\xi)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left[(z-\zeta)^2+(2nb)^2\right]^{(-1)^n}.$$

Давая величинѣ C приличную форму, получимъ

$$\Omega = \frac{\frac{\pi}{4bi}(z-\xi)\prod\limits_{m=1}^{m=\infty}\left\{1-\frac{\left[\frac{\pi}{4bi}(z-\xi)\right]^2}{m^2\pi^2}\right\}}{\prod\limits_{m=0}^{m=\infty}\left\{1-\frac{4\left[\frac{\pi}{4bi}(z-\xi)\right]^2}{(2m+1)^2\pi^2}\right\}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4bi}(z-\xi)}{\cos\frac{\pi}{4bi}(z-\xi)}.$$

45. Какъ примѣръ контуровъ высшаго порядка разсмотримъ случай прямоугольника.

Контуръ заданъ четырьмя прямыми

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \omega, \quad y = \omega'.$$

Уравненіе ихъ совокупности будетъ

$$xy\,(x - \omega)\,(y - \omega') = 0.$$

Вводя величины комплексныя, мы получимъ

$$(\xi + \dot{\xi})\,(\xi - \dot{\xi})\,(\xi + \dot{\xi} - 2\omega)\,(\xi - \dot{\xi} - 2\omega' i) = 0.$$

Уравненіе первой операціи будетъ

$$(\eta^{(1)} + \dot{\xi})\,(\eta^{(1)} - \dot{\xi})\,(\eta^{(1)} + \dot{\xi} - 2\omega)\,(\eta^{(1)} - \dot{\xi} - 2\omega' i) = 0 \ldots (42)$$

Мы получаемъ четыре точки

$$\dot{\xi}, \quad -\dot{\xi}, \quad -\dot{\xi} + 2\omega, \quad \dot{\xi} + 2\omega' i.$$

Эти четыре точки суть зеркальныя изображенія (Spiegelungen) точки ξ въ заданныхъ прямыхъ.

Произведемъ вторую операцію

$$(\eta^{(2)} + \dot{\eta}^{(1)})\,(\eta^{(2)} - \dot{\eta}^{(1)})\,(\eta^{(2)} + \dot{\eta}^{(1)} - 2\omega)\,(\eta^{(2)} - \dot{\eta}^{(1)} - 2\omega' i) = 0 \ldots (43)$$

Измѣняя въ уравненіи (42) $+i$ на $-i$, получимъ

$$(\dot{\eta}^{(1)} + \xi)\,(\dot{\eta}^{(1)} - \xi)\,(\dot{\eta}^{(1)} + \xi - 2\omega)\,(\dot{\eta}^{(1)} - \xi + 2\omega' i) = 0 \ldots (44)$$

Исключая величину $\dot{\eta}^{(1)}$ между уравненіями (43) и (44), получимъ слѣдующее приведенное уравненіе, освобожденное отъ кратныхъ корней

$$(\eta^{(2)} - \xi)\,(\eta^{(2)} + \xi)\,(\eta^{(2)} + \xi - 2\omega)\,(\eta^{(2)} - \xi - 2\omega)\,(\eta^{(2)} - \xi + 2\omega)$$

$$(\eta^{(3)} + \xi - 2\omega' i)\,(\eta^{(2)} - \xi - 2\omega' i)\,(\eta^{(2)} - \xi + 2\omega' i)$$

$$(\eta^{(2)} + \xi - 2\omega - 2\omega' i) = 0.$$

Отсюда получается 8 новыхъ точекъ второй операціи

$$-\xi,\ \ \xi+2\omega,\ \ -\xi+2\omega,\ \ \xi-2\omega,\ \ -\xi+2\omega' i$$

$$\xi+2\omega' i,\ \ \xi-2\omega' i,\ \ -\xi+2\omega+2\omega' i.$$

Продолжая далѣе послѣдовательныя операціи, мы приходимъ къ слѣдующему заключенію.

Точки, образуемыя всѣми операціями нечетнаго порядка до операціи порядка $2k+1$ включительно опредѣляются корнями уравненія

$$\Phi_k(\eta)=\prod_{l,\,m}(\eta-\xi-2l\omega-2ml\omega' i)\prod_{\lambda,\,\mu}(\eta+\xi-2\lambda\omega-2\mu\omega' i)=0,$$

гдѣ

$$|\,l\,|+|\,m\,|\leqq k+1,\quad |\,\lambda\,|+|\,\mu\,|\leqq k+1,$$

причемъ равенство имѣетъ мѣсто при условіи

$$m>0,\quad \lambda>0.$$

Операціи четнаго порядка до порядка $2k$ включительно даютъ совокупность точекъ опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$\Psi_k(\eta)=\prod_{l,\,m}(\eta-\xi-2l\omega-2m\omega' i)\prod_{\lambda,\,\mu}(\eta+\xi-2\lambda\omega-2\mu\omega' i)=0$$

гдѣ

$$|\,l\,|+|\,m\,|\leqq k;\quad |\,\lambda\,|+|\,\mu\,|\leqq k+1,$$

причемъ равенство имѣетъ мѣсто при $\lambda>0$ и $\mu>0$, а равенство $|\,\lambda\,|+|\,\mu\,|=k$ при $\lambda>0$ или $\mu>0$.

Оказывается, что рѣшеніе задачи Дирихле имѣетъ мѣсто при функціи *)

$$\Omega=\lim\left\{\frac{\Psi_k(z)}{\Phi_k(z)}\right\}_{k=\infty}.$$

Введемъ въ разсмотрѣніе слѣдующія эллиптическія функціи

$$\Theta(x)=1-2q\cos\frac{\pi x}{\omega}+2q^4\cos\frac{2\pi x}{\omega}-2q^9\cos\frac{3\pi x}{\omega}+\dots$$

$$\mathrm{H}(x)=2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi x}{2\omega}-2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi x}{2\omega}+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi x}{2\omega}-\dots$$

$$\Theta_1(x)=\Theta(x+\omega),\quad \mathrm{H}_1(x)=\mathrm{H}(x+\omega)$$

---

*) **Cayley**. Mémoire sur les fonctions doublement périodiques. Tom. X Journal de Lionville, pag. 385.

гдѣ

$$q = e^{-\pi\frac{\omega'}{\omega}}$$

обозначимъ

$$\sqrt{k} = \frac{\mathrm{H}_1(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + \ldots}$$

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}$$

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}$$

$$\operatorname{dn} x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Получаемъ

$$\Omega = \frac{\mathrm{H}(z - \xi)\,\mathrm{H}(z + \xi)}{\mathrm{H}(z - \dot{\xi})\,\mathrm{H}(z + \dot{\xi})}.$$

Для приложеній этой формулы удобнѣе помѣстить начало координатъ въ центръ прямоугольника, тогда

$$z = z_1 + \frac{\omega + i\omega'}{2}$$

$$\xi = \xi_1 + \frac{\omega + i\omega'}{2}$$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_1 + \frac{\omega - i\omega'}{2}.$$

Отсюда

$$z - \xi = z_1 - \xi_1$$

$$z + \xi = z_1 + \xi_1 + \omega + i\omega'$$

$$z - \dot{\xi} = z_1 - \dot{\xi}_1 + i\omega$$

$$z + \dot{\xi} = z_1 + \dot{\xi}_1 + \omega.$$

Такъ какъ въ рѣшеніе задачи входитъ логариѳмическая производная функціи Ω, то мы можемъ замѣнить функцію

$$\frac{\mathrm{H}(z_1 - \xi_1)\,\mathrm{H}(z_1 + \xi_1 + \omega + i\omega')}{\mathrm{H}(z_1 - \dot{\xi}_1 + \omega' i)\,\mathrm{H}(z_1 + \dot{\xi}_1 + \omega)}$$

слѣдующею

$$\frac{\mathrm{H}(z - \xi)\,\Theta_1(z + \xi)}{\Theta(z - \dot{\xi})\,\mathrm{H}_1(z + \dot{\xi})}.$$

ГЛАВА IV.

О проекціяхъ Чебышева.

1. Основнымъ вопросомъ картографіи является построеніе выгоднѣйшихъ проекцій. Если изображаемая поверхность развертывается на плоскость, тогда возможна совершенная карта, сохраняющая полное подобіе конечныхъ фигуръ, причемъ всѣ длины карты пропорціональны соотвѣтственнымъ длинамъ изображаемой поверхности. Если поверхность не можетъ развертываться на плоскости, какъ это имѣетъ мѣсто въ самомъ важномъ для практики случаѣ изображенія земной поверхности, тогда приходится изъ безчисленнаго множества возможныхъ способовъ изображенія, искажающихъ по необходимости длины, выбирать выгоднѣйшіе въ томъ или другомъ отношеніи.

2. Уже съ давнихъ временъ получили преимущественное употребленіе карты съ подобіемъ въ безконечно малыхъ частяхъ, ибо эти проекціи сохраняютъ углы. Требованіе подобія безконечно малыхъ частей оставляетъ много произвола, ибо формулы, дающія проекціи, заключаютъ произвольныя функціи, а потому кромѣ этого основного требованія можно поставить еще другія. Такъ напримѣръ, Л а г р а н ж ъ поставилъ требованіе, чтобы *меридіаны и параллели изображались кругами*, т. е. такими линіями, которыя просто вычерчиваются.

Это добавочное требованіе, ограничивая произвольныя функціи, оставляетъ еще нѣкоторый произволъ въ видѣ постоянныхъ параметровъ карты.

Во второмъ изъ мемуаровъ о картахъ Лагранжъ показываетъ, что постоянными произвольными можно распорядиться такъ, чтобы сдѣлать уклоненіе масштаба отъ постоянства для разныхъ точекъ страны по возможности малымъ. Онъ показываетъ, что при всякомъ выборѣ постоянныхъ существуетъ въ его проекціяхъ нѣкоторая точка, около которой масштабъ измѣняется мало. Эта точка соотвѣтствуетъ minimum'у масштаба. Лагранжъ предлагаетъ подбирать постоянныя произвольныя такъ, чтобы эта точка пришлась въ центрѣ изображаемой страны. Разсужденія Лагранжа, какъ основанныя на разложеніяхъ въ ряды, имѣютъ мѣсто, очевидно, лишь для странъ небольшихъ.

3. Тиссо *) предлагаетъ свою теорію построенія выгоднѣйшихъ проекцій, основанную на слѣдующихъ положеніяхъ: 1) углы могутъ не сохраняться, но они должны искажаться на достаточно малыя количества, чтобы каждый листъ карты могъ представлять настоящій топографическій планъ; 2) масштабъ будетъ мѣняться, конечно, отъ листа къ листу; нужно сдѣлать это измѣненіе по возможности малымъ; 3) формулы, дающія прямоугольныя координаты карты въ функціяхъ отъ долготы и широты, должны быть по возможности просты, для облегченія возможности вычисленія положенія большаго числа мѣстъ на картѣ.

Для того чтобы удовлетворить этимъ требованіямъ, Тиссо исходитъ изъ разложенія прямоугольныхъ координатъ въ ряды, расположенные по степенямъ разности долготъ и широтъ; его разсужденія аналогичны съ разсужденіями Лагранжа и приложимы для странъ малаго протяженія. Необходимо имѣть въ виду, что получаются хорошія карты, если изображаемая страна не велика, по какой бы изъ проекцій, сохраняющихъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ её не изображать.

4. Искаженія изображеній дѣлаются чувствительными лишь при изображеніи странъ болѣе значительныхъ размѣровъ, и тогда является весьма важный вопросъ сдѣлать искаженія по возможности малыми для всѣхъ точекъ внутри контура изображаемой страны.

---

*) Tissot. Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques 1879. Nouvelles Annales de Mathématiques t. XVIII.

Этотъ вопросъ неопределенный самъ по себѣ, ибо наименьшее искаженіе на всей поверхности данной страны можно понимать различно.

5. Наиболѣе распространенный способъ разсмотрѣнія подобнаго рода вопросовъ состоитъ въ примѣненіи способа наименьшихъ квадратовъ. Такъ напримѣръ этотъ способъ употребилъ астрономъ Эри при вычисленіи центральной проекціи, названной имъ projection by balance of errors *).

Въ первой главѣ мы видѣли, что центральная проекція заключаетъ одну произвольную функцію: радіусъ альмикантаратовъ на картѣ. Эри дѣлаетъ minimum сумму квадратовъ ошибокъ распространенную на цѣлую площадь одного изъ альмикантаратовъ. Приходится разсмотрѣть minimum интеграла

$$\iint \left[\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+(ab-1)^2\right] dx\, dy \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ a, b суть полуоси эллипса искаженія, а за ошибку каждой точки принимается функція

$$+\sqrt{\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+(ab-1)^2}\,.$$

Такимъ способомъ разсужденія Эри желаетъ получить проекцію, которая бы мало уклонялась отъ сохраненія площадей и сохраненія подобія въ безконечно малыхъ частяхъ.

Задача приводится къ выбору искомой функціи, дающей радіусъ альмикантаратовъ такъ, чтобы опредѣленный интегралъ (1) былъ minimum и, слѣдовательно, приводится къ очень простому вопросу обыкновеннаго варіаціоннаго исчисленія. Еще проще вопросъ, разсматриваемый полковникомъ Генри Джемсомъ и капитаномъ Кларкомъ **). Они ищутъ выгоднѣйшую центральную перспективную проекцію, при чемъ положеніе точки глаза опредѣляется выборомъ одной постоянной произвольной, такъ чтобы интегралъ (1) былъ minimum. Въ этомъ случаѣ интегралъ есть вполнѣ опредѣленная функція отъ разстоянія точки глаза до центра шара и, слѣдовательно, нахожденіе ея minimum'а представляетъ элементарную задачу дифференціальнаго исчисленія.

*) G. B. Airy. Explanation of a projection by Balance of Errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface. Philos. Transact. Dec. 1861, p. 409—421.

**) Col. H. James and Cap. A. R. Clarke. On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface. Philos. Mag. 1862, p. 306—312.

Въ этомъ же направленіи произведены изслѣдованія Веберомъ *) и Эйзенлоромъ **). Эти авторы берутъ проекціи съ сохраненіемъ подобія въ безконечно малыхъ частяхъ и подбираютъ произвольныя функціи, такъ чтобы двойной интегралъ отъ нѣкоторой функціи масштаба, распространенный на площадь изображаемой страны былъ minimum, то есть приводятъ задачу къ варіаціонному исчисленію.

6. Гораздо большій теоретическій интересъ представляютъ попытки приложенія къ вопросу о нахожденіи выгоднѣйшихъ проекцій теоріи функцій наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

Эта теорія, получившая извѣстность послѣ работъ Чебышева, примѣнялась на практикѣ уже давно, хотя Чебышевъ первый её окончательно формулировалъ и показалъ наиболѣе важныя приложенія.

Такъ напримѣръ Эйлеръ ***) въ мемуарѣ о проекціи Делиля приводитъ слѣдующія разсужденія.

Разсмотримъ коническую проекцію, опредѣляемую формулами

$$x = (b - u)\cos(kv + l)$$

$$y = (b - u)\sin(kv + l),$$

гдѣ b радіусъ экватора карты, а k, l двѣ другихъ постоянныхъ величины. Постоянную l можно положить равною нулю, что будетъ соотвѣтствовать принятію перваго меридіана карты за ось x-овъ.

Въ нашемъ случаѣ, предполагая изображеніе шара, получимъ

$$e = 1,\quad g = k^2 (b - u)^2,\quad f = 0,$$

$$E = 1,\quad G = \cos^2 u,\quad F = 0,$$

отсюда

$$P = 1,\quad Q = 0,\quad R = \frac{\cos^2 u}{k^2 (b - u)^2}.$$

Итакъ, эллипсъ искаженія имѣетъ уравненіе

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{k^2 (b-u)^2}{\cos^2 u}} = 1.$$

---

*) Weber. Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf eine Ebene. 1867. Journ. v. Crelle, t. LXVII.

**) Eisenlohr. Ueber die Flächenabbildung 1870. Journal von Crelle, t. LXXII.

***) Euler. De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata. Acta Academiae pro Anno MDCCLXXVII, pars prior.

Эйлеръ подбираетъ два коэффиціента k и b такъ, чтобы функція

$$f(x) = k(b - x) - \cos x$$

уклонялась наименѣе отъ нуля въ границахъ

$$0 < \alpha < x < \beta < \frac{\pi}{2}$$

и полагаетъ для этой цѣли

$$f(\alpha) = -f(arc \sin k) = f(\beta).$$

7. Замѣчательный примѣръ рѣшенія подобнаго рода вопросовъ представляютъ проекціи А. Маркова *). Авторъ ставитъ цѣлью разсмотрѣніе коническихъ проекцій

$$\rho = f(u), \quad \theta = kv,$$

гдѣ v долгота, а u разстояніе точки по меридіану отъ полюса (или отъ другой опредѣленной точки).

Предполагая, что радіусъ параллели $R(u)$ представляетъ такую функцію u, которая для изображаемой части поверхности удовлетворяетъ условіямъ

$$R'(u) > 0, \quad R''(u) < 0$$

А. Марковъ ставитъ слѣдующую задачу:

Опредѣлить постоянное k и возрастающую функцію $f(u)$ такъ, чтобы наибольшее численное значеніе логариѳмовъ

$$f'(u) \quad \text{и} \quad \frac{kf(u)}{R(u)}$$

при $u_1 < u < u_2$ достигало своего minimum'a.

Не указывая путь, который во всѣхъ случаяхъ приводилъ бы навѣрно къ рѣшенію подобныхъ задачъ, А. Марковъ даетъ слѣдующее рѣшеніе поставленной имъ задачи.

---

*) А. А. Марковъ. О наивыгоднѣйшихъ изображеніяхъ нѣкоторой части данной поверхности вращенія на плоскости. Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. Т. II, № 3, стр. 177—187.

Наименьшее уклоненіе отъ нуля логариѳмовъ обоихъ масштабовъ даетъ проекція, опредѣляемая условіями

$$\frac{kf(u_1)}{R(u_1)} = \frac{kf(u_2)}{R(u_2)} = 1 + \delta$$

$$f'(u) = 1 + \delta \quad \text{при} \quad u_1 \leqq u \leqq \xi$$

$$\frac{kf(\xi)}{R(\xi)} = \frac{kf(u)}{R(u)} = \frac{kf(\eta)}{R(\eta)} = \frac{1}{1+\delta} \quad \text{при} \quad \xi < u < \eta$$

$$R'(\xi) = k(1+\delta)^2, \quad R'(\eta) = k$$

$$f'(u) = \frac{1}{1+\delta} \quad \text{при} \quad \eta \leqq u \leqq u_2,$$

гдѣ числа ξ и η опредѣляются уравненіями

$$R(u_1)\,R'(\xi) - R(\xi)\,R'(\eta) + R'(\xi)\,R'(\eta)\,(\xi - u_1) = 0,$$

$$R(u_2)\,R'(\xi) - R(\eta)\,R'(\eta) - R'(\eta)\,R'(\eta)\,(u_2 - \eta) = 0.$$

8. Мы перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію теоремы Чебышева о проекціяхъ, составляющихъ подобіе въ безконечно малыхъ частяхъ, представляющей первое замѣчательное приложеніе соображеній изъ теоріи функцій наименѣе уклоняющихся отъ нуля къ уравненіямъ съ частными производными.

Въ засѣданіи 18 Января 1853 года Императорской С.-Петербургской Академіи Наукъ Чебышевъ сдѣлалъ сообщеніе о географическихъ картахъ, въ которомъ приводитъ безъ доказательства слѣдующее предложеніе *):

«По обозначеніямъ Лагранжа масштабъ карты выражается такъ:

$$m = \frac{\sqrt{F'(u+ti)\,F'(u-ti)}}{\frac{2}{e^u + e^{-u}}},$$

что даетъ

$$\lg m = \frac{1}{2}\lg F'(u+ti) + \frac{1}{2}\lg F'(u-ti) - \lg\frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

гдѣ положительная часть, составленная изъ произвольныхъ функцій, есть не что иное, какъ интегралъ уравненія

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial U}{\partial t^2} = 0.$$

---

*) A. Germain. Traité des projections des cartes géographiques.

Слѣдовательно, уклоненія (écarts) масштаба зависятъ отъ измѣненій (déviations) функціи $\lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ и интеграла этого уравненія.

На основаніи замѣчательныхъ свойствъ этого уравненія можно показать (on parvient à reconnaitre), что minimum уклоненія его интеграла отъ функціи $\lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ въ пространствѣ, ограниченномъ какою-нибудь кривою, можетъ имѣть мѣсто лишь въ томъ случаѣ, когда разность

$$U - \lg \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

имѣетъ постоянное значеніе для точекъ этой кривой».

Въ концѣ своей замѣтки Чебышевъ обѣщалъ подробную статью о картахъ, которая къ сожалѣнію не появилась при его жизни, такъ что ни имъ, ни другими авторами не было дано до сихъ поръ доказательства приведеннаго выше замѣчательнаго предложенія.

Работы Вебера и Эйзенлора, аналогичныя по результатамъ, имѣютъ мало общаго по существу съ вопросомъ Чебышева.

Мнѣ удалось найти простое доказательство теоремы Чебышева, что было предметомъ краткаго сообщенія, сдѣланнаго 10 Августа 1894 года на Congrès de l'Association francaise pour l'avancement des sciences въ городѣ Канѣ (Caen) и напечатаннаго затѣмъ въ трудахъ съѣзда.

Доказательству теоремы Чебышева и разсмотрѣнію его проекцій посвящается настоящая глава.

9. *Лемма I.* Если функція $f(x, y)$ конечна, однозначна и непрерывна вмѣстѣ со своими производными для всѣхъ точекъ внутри контура и равна нулю на контурѣ, то существуетъ безчисленное множество точекъ внутри контура, для которыхъ имѣютъ мѣсто неравенства:

$$f(x, y) > 0,\ f''_{xx}(x, y) \leqq 0,\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \geqq 0$$

или

$$f(x, y) < 0,\ f''_{xx}(x, y) \geqq 0,\ f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 \geqq 0,$$

причемъ эти точки заполняютъ одну или нѣсколько площадей конечныхъ размѣровъ.

Предположимъ, что для всѣхъ точекъ внутри контура функція f больше нуля, что всегда возможно, ибо, если бы функція была отрицательная, то мы перемѣнили бы её знакъ, разсматривая $-f(x, y)$.

Если f мѣняетъ знакъ внутри контура, то положительныя значенія функціи отдѣляются отъ отрицательныхъ линіею, по которой значенія функціи равны нулю и, слѣдовательно, существуетъ такой контуръ c, составляющій часть контура C, который обладаетъ желаемымъ свойствомъ.

Возьмемъ касательную къ контуру C

$$\alpha = 0,$$

параллельную направленію, образующему съ осью y-овъ уголъ ω,

$$\alpha = x \cos\omega + y \sin\omega - p$$

и оставляющую весь контуръ C по одну сторону.

Предположимъ, что $\alpha > 0$ со стороны контура. Если контуръ имѣетъ точки перегиба, особенныя точки или прямолинейныя части, тогда проводимъ прямую даннаго направленія такую, которая имѣетъ одну или нѣсколько точекъ общихъ съ контуромъ и весь контуръ лежитъ по одну сторону.

Разсмотримъ разность

$$F = f - \lambda\alpha,$$

гдѣ λ произвольный параметръ.

Относительно функціи F можно замѣтить, что она непрерывна, однозначна и конечна вмѣстѣ со всѣми ея производными внутри контура C. Кромѣ того

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2.$$

Полагая $\lambda = 0$, получимъ, что функція F совпадаетъ съ функціею f и, слѣдовательно, на контурѣ C равна нулю, а внутри положительна.

Будемъ давать λ возрастающія положительныя значенія, начиная съ достаточно малыхъ.

Положимъ, что мы дали λ такое значеніе λ_1, при которомъ остаются еще внутри контура C положительныя значенія функціи F.

Такъ какъ значенія функціи F на контурѣ C будутъ тогда отрицательныя и равныя нулю въ тѣхъ точкахъ, которыя общія контуру и прямой $\alpha = 0$, то положительныя значенія функціи F при этомъ значенія λ_1 заключаются внутри контура C_1, для котораго $F=0$ и который весь заключается внутри контура C.

Очевидно, что при всякомъ значеніи угла ω существуетъ предѣльное значеніе λ, которое будетъ, слѣдовательно, нѣкоторою функціею отъ ω и для котораго F перестаетъ имѣть положительныя значенія внутри контура.

Обозначимъ предѣльное значеніе при данномъ углѣ ω черезъ $\lambda(\omega)$.

Давая углу ω всѣ возможныя значенія отъ 0 до 2π, мы будемъ разсматривать соотвѣтственныя значенія $\lambda(\omega)$; при этомъ замѣтимъ, что $\lambda(\omega)$ имѣетъ наименьшее значеніе отличное отъ нуля. Назовемъ это значеніе λ_0.

Разсматривая уголъ ω и λ, какъ полярныя координаты на плоскости, проведемъ изъ полюса какъ центра кругъ K радіуса λ_0.

Итакъ, положимъ, что у насъ выбраны ω и λ, соотвѣтствующія нѣкоторой точкѣ внутри круга K, тогда функція F обращается въ нуль на нѣкоторомъ контурѣ C_1, лежащемъ внутри контура C и сохраняетъ положительныя значенія внутри этого контура. Отсюда слѣдуетъ, что существуетъ одна или нѣсколько точекъ внутри контура C_1, для которыхъ функція F будетъ maximum.

Аналитически это приводится къ тому, что существуетъ одна или нѣсколько паръ вещественныхъ чиселъ

$$x_1,\ y_1$$

соотвѣтствующихъ точкамъ внутри контура C_1, удовлетворяющихъ слѣдующимъ условіямъ

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}-\lambda\cos\omega=0,\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}-\lambda\sin\omega=0 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y}-\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\geqq 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\leqq 0
\end{array}\right\}(*).$$

Пока точка опредѣляется числами λ и ω, лежащими внутри круга K, существуютъ вещественныя рѣшенія x_1, y_1 системы (*).

Такъ какъ изъ уравненій

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\cos\omega,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\sin\omega$$

нельзя исключить λ и ω, то зависимости между x_1, y_1 никакой не существуетъ и мы можемъ сказать, что x_1, y_1 будутъ перемѣнныя независимыя при измѣненіи внутри нѣкотораго контура конечныхъ размѣровъ, точки внутри котораго соотвѣтствуютъ различнымъ точкамъ внутри круга K.

Итакъ лемма доказана. При доказательствѣ этой теоремы достаточно требовать непрерывности производныхъ только первыхъ двухъ порядковъ.

10. *Лемма II.* Если функція $\varphi(x)$ конечна, непрерывна и однозначна вмѣстѣ со своими производными и такова, что въ границахъ контура ея вторая производная не мѣняетъ знака, то разность

$$u - \varphi(x),$$

будучи нулемъ для точекъ контура, совпадаетъ по знаку съ $\varphi''(x)$ для всѣхъ точекъ внутри контура. Здѣсь u есть, конечно, не что иное, какъ соотвѣтствующее рѣшеніе уравненія $\Delta u = 0$.

Прежде всего замѣчаемъ, что уравненіе $\Delta u = 0$ влечетъ за собою, какъ слѣдствіе, что для всѣхъ точекъ внутри контура имѣетъ мѣсто неравенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \leqq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Положимъ, что $\varphi''(x) < 0$; обозначая разность $u - \varphi(x)$ черезъ v, получимъ

$$u = v + \varphi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Требуется показать, что v не можетъ принимать положительныхъ значеній внутри контура.

Предположимъ обратное. Вслѣдствіе непрерывности функціи u положительныя значенія функціи v должны лежать въ нѣкоторой области, ограниченной однимъ или нѣсколькими контурами, причемъ для точекъ на этихъ контурахъ $v = 0$.

На основаніи леммы I мы замѣчаемъ, что внутри этихъ контуровъ существуетъ безчисленное множество точекъ, заполняющихъ одну или нѣсколько площадей конечныхъ размѣровъ, для которыхъ будутъ имѣть мѣсто неравенства

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right) \geqq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

На основаніи равенства (3) получаемъ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2+\varphi''(x)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

но вслѣдствіе неравенствъ (4) получаемъ

$$0\geqq\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2\geqq\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)^2\geqq 0$$

справедливыя для безчисленнаго множества точекъ, заполняющихъ площадь конечныхъ размѣровъ γ внутри контура C. Послѣднія неравенства показываютъ, что для всѣхъ точекъ внутри контура γ должно быть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0,$$

отсюда и изъ уравненія $\Delta u=0$ выходитъ, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Такъ какъ частныя производныя $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ будучи сами рѣшеніями уравненія $\Delta u=0$ не могутъ равняться нулю внутри контура γ, не обращаясь въ нуль для всѣхъ точекъ внутри контура C, то выходитъ, что для всѣхъ точекъ внутри контура C функція u совпадаетъ съ

$$Ax+By+C,$$

гдѣ A, B, C числа постоянныя.

Отсюда вытекаетъ, что уравненіе контура имѣетъ видъ:

$$Ax+By+C-\varphi(x)=0,$$

что невозможно, ибо контуръ долженъ быть замкнутый, такъ что одному значенію координаты x должны соотвѣтствовать по крайней мѣрѣ два значенія для y.

Итакъ, предложеніе доказано для случая $\varphi''<0$. Подобнымъ же образомъ покажемъ, что v не можетъ быть отрицательнымъ для точекъ внутри контура. Очевидно, что наши разсужденія требуютъ конечности производныхъ функціи u до четвертаго порядка.

11. На основаніи приведенныхъ теоремъ уже не трудно доказать теорему Чебышева.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\varphi(x) = \lg \frac{2}{e^x + e^{-x}},$$

то

$$\varphi''(x) = -\left[\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right]^2 < 0.$$

По слѣдствію 4 теоремы 1 третьей главы получается, что существуетъ единственное рѣшеніе u_0 уравненія $\Delta u = 0$, для котораго разность

$$v_0 = u_0 - \lg \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

на контурѣ равна нулю.

По леммѣ II функція v_0 отрицательная внутри контура.

Обозначая черезъ D_0 maximum maximorum абсолютной величины функціи v_0 внутри контура, мы замѣчаемъ, что D_0 есть то самое уклоненіе функціи v_0, которое необходимо разсматривать въ Чебышевскомъ вопросѣ.

Я покажу, что для всякаго другого рѣшенія u_1 уравненія $\Delta u = 0$ разность

$$v_1 = u_1 - \lg \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

будетъ имѣть большее уклоненіе; другими словами покажемъ, что разность D_1 между наибольшимъ и наименьшимъ изъ значеній функціи v_1 въ границахъ контура больше D_0, каково бы ни было рѣшеніе u_1, отличное отъ u_0. Значенія v_1 на контурѣ не могутъ равняться нулю, ибо u_1 не совпадаетъ по предположенію съ u_0.

Разсмотримъ наибольшее значеніе функціи v_1 на контурѣ. Пусть оно будетъ a.

Разсматривая функцію $v_1 - a$, соотвѣтствующую $u_1 - a$, мы замѣчаемъ, что она имѣетъ то же уклоненіе D_1, что и функція v_1, между тѣмъ какъ для точекъ на контурѣ принимаетъ значенія отрицательныя и обращается въ нуль лишь въ тѣхъ точкахъ контура, въ которыхъ v_1 имѣетъ значеніе a.

Функцію $v_1 - a$ можно разсматривать, какъ получающуюся отъ прибавленія къ функціи v_0 рѣшенія

$$u_1 - a - u_0$$

уравненія $\Delta u = 0$. Это рѣшеніе имѣетъ на контурѣ тѣ же значенія, что и функція $v_1 - a$.

По слѣдствію 2 теоремы I третьей главы всѣ значенія функціи

$u_1 - a - u_0$ внутри контура отрицательныя и не равны нулю; слѣдовательно, отъ прибавленія такого рѣшенія разность v_0 на контурѣ не перестаетъ имѣть значеніе равное нулю въ тѣхъ точкахъ, гдѣ функція $v_1 - a$ равна нулю, между тѣмъ какъ maximum maximorum абсолютной величины функціи v_0 долженъ увеличиться, ибо прибавляется къ нему нѣкоторое положительное число, такъ что

$$D_1 > D_0,$$

что и требовалось доказать.

12. Доказавъ теорему Чебышева для случая изображенія поверхности шара на плоскости, то есть въ томъ видѣ, какъ эта теорема формулирована самимъ авторомъ, мы можемъ замѣтить, что она имѣетъ мѣсто для любой поверхности вращенія подъ однимъ лишь условіемъ, чтобы вторая производная

$$\varphi''(u)$$

не мѣняла своего знака въ границахъ разсматриваемаго контура.

Здѣсь функція φ обозначаетъ

$$\varphi(u) = \lg \lambda = \lg r = \lg \omega_{-1}(u) \text{ (см. 1 глава § 14).}$$

Такъ напримѣръ, эллипсоидъ вращенія представляетъ примѣръ такой поверхности вращенія, для которой теорема Чебышева не претерпѣваетъ исключенія.

Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли уже, что

$$\omega_{-1}(u) = \frac{a \sin \xi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \xi}} \text{ (см. I гл. § 14)}$$

причемъ дополненіе широты ξ связано съ перемѣнною u соотношеніемъ

$$u = (1 - \varepsilon^2) \int \frac{d\xi}{\sin \xi \, (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \xi)}$$

$$\varphi'(u) = \left[\frac{\cos \xi}{\sin \xi} - \frac{\varepsilon^2 \cos \xi \sin \xi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \xi}\right] \frac{d\xi}{du} = \cos \xi$$

$$\varphi''(u) = -\sin \xi \frac{d\xi}{du} = -\sin^2 \xi \, \frac{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \xi}{1 - \varepsilon^2};$$

принимаемъ въ соображеніе, что $\varepsilon^2 < 1$, и замѣчаемъ, что $\varphi''(u)$ не мѣняетъ своего знака. Подобнымъ же образомъ покажемъ, что $\varphi''(u)$ не мѣняетъ знака въ случаѣ $b > a$.

13. Замѣтимъ, что распространеніе теоремы Чебышева на случай поверхностей, для которыхъ $\varphi''(u)$ мѣняетъ свой знакъ въ границахъ контура, можетъ претерпѣвать исключеніе.

14. Чтобы приложить теорему Чебышева къ изображенію данной страны можно воспользоваться соображеніями третьей главы. Взявъ картографическія координаты u и v за прямоугольныя координаты на плоскости, строимъ вспомогательную карту данной страны. Изображаемая на этой картѣ страна имѣетъ нѣкоторый контуръ C. Подбираемъ такой контуръ C_1, который достаточно близокъ къ контуру C, и относительно котораго умѣемъ рѣшить задачу **Дирихле**.

Относительно этого послѣдняго контура C_1 мы и рѣшаемъ задачу объ изображеніи страны съ наименьшимъ отклоненіемъ масштаба.

При выборѣ контура можно руководствоваться сочиненіемъ **Гольцъ-Мюллера**: Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen. Leipzig.

15. Прилагая теорему Чебышева къ случаю изображенія страны, ограниченной дугою нѣкотораго малаго круга на шарѣ, мы приходимъ къ стереографической проекціи.

Очевидно, что стереографическая проекція на плоскости, проходящей черезъ разсматриваемый контуръ, удовлетворяетъ условію теоремы; такъ какъ кромѣ того уже извѣстно, что задача допускаетъ лишь одно рѣшеніе, то, слѣдовательно, стереографическая проекція въ этомъ случаѣ рѣшаетъ задачу Чебышева.

Возьмемъ центръ перспективы въ южномъ полюсѣ и постараемся изобразить въ стереографической проекціи мѣстности, окружающія сѣверный полюсъ до нѣкоторой широты u_0.

Обозначая дополненіе широты черезъ ξ, получимъ формулы, выражающія проекцію въ такомъ видѣ:

$$x = 2\cos^2\frac{\xi_0}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\xi}{2}\cos v$$

$$y = 2\cos^2\frac{\xi_0}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\xi}{2}\sin v$$

гдѣ ξ_0 соотвѣтствуетъ u_0.

Масштабъ равенъ

$$m = \frac{\cos^2\frac{\xi_0}{2}}{\cos^2\frac{\xi}{2}},$$

Итакъ мы видимъ, что уклоненіе масштаба равно

$$\sin^2\frac{\xi_0}{2}.$$

16. Разсмотримъ теперь поясъ шара между двумя параллелями. Взявъ на плоскости картографическія координаты u и v, какъ прямоугольныя, мы должны будемъ разсматривать полосу между двумя параллельными прямыми

$$u = u_0, \quad u_1 = u_1.$$

Пусть дополненія широтъ заданныхъ параллелей будутъ ξ_0 и ξ_1; тогда полагая

$$u_0 = \lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_0}{2}, \quad u_1 = \lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_1}{2},$$

получимъ

$$\lg m = \frac{1}{2}\lg F'(u+iv) + \frac{1}{2}\lg F'(u-iv) - \lg\sin\xi.$$

Полагая масштабъ m равнымъ единицѣ для заданныхъ двухъ параллелей, получимъ, что искомая функція F должна удовлетворять такимъ двумъ условіямъ:

$$\frac{1}{2}\lg F'(u_0+iv) + \frac{1}{2}\lg F'(u_0-iv) = \lg\sin\xi_0 \quad \ldots\ldots(5)$$

$$\frac{1}{2}\lg F'(u_1+iv) + \frac{1}{2}\lg F'(u_1-iv) = \lg\sin\xi_1 \ldots\ldots(6)$$

Если кромѣ того ничто не ограничиваетъ значеній перемѣнной v, то единственнымъ рѣшеніемъ задачи будетъ, очевидно, функція

$$\lg F'(\rho) = A\rho + B.$$

Подставляя полученную функцію въ условія (5) и (6), получимъ

$$Au_0 + B = \lg\sin\xi_0, \quad Au_1 + B = \lg\sin\xi_1.$$

Рѣшая эти два уравненія относительно A и B, получаемъ

$$A = \frac{\lg\frac{\sin\xi_0}{\sin\xi_1}}{\lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_0}{2} - \lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_1}{2}}$$

$$B = \frac{\lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_0}{2}\lg\sin\xi_1 - \lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_1}{2}\lg\sin\xi_0}{\lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_0}{2} - \lg\,\mathrm{tg}\frac{\xi_1}{2}}.$$

Для большей общности положимъ

$$\mathfrak{A} = A, \quad \mathfrak{B} = B + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная величина.

Отсюда

$$F(\rho) = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}\rho + \mathfrak{B}} + \mathfrak{L}$$

Давая $\mathfrak{L}$ комплексныя значенія вида $x_0 + iy_0$, гдѣ x_0 и y_0 нѣкоторыя вещественныя постоянныя произвольныя величины, получимъ окончательно уравненіе, опредѣляющее проекціи въ такомъ видѣ:

$$x + iy = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}(u + iv) + \mathfrak{B}} + x_0 + iy_0,$$

откуда

$$x - x_0 = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}} \cos \mathfrak{A} v$$

$$y - y_0 = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}} \sin \mathfrak{A} v.$$

Получилась Ламбертова проекція (см. гл. II), которая часто называется Гауссовскою коническою проекціею и принята при изображеніи Россійской Имперіи.

Если мы разсмотримъ уклоненіе масштаба, то для него получимъ

$$1 - \left[\frac{1 - \mathfrak{A}}{1 + \mathfrak{A}}\right]^{\frac{\mathfrak{A}}{2}} \frac{e^{\mathfrak{B}}}{\sqrt{1 - \mathfrak{A}^2}}.$$

17. Не останавливаясь на случаѣ части шара, ограниченной двумя меридіанами *), обратимся къ случаю заданія четыреугольника ограниченнаго двумя меридіанами и двумя параллелями.

Ограничимся разсмотрѣніемъ шара радіуса равнаго единицѣ, ибо разсужденія останутся тѣ же и для случая любой поверхности вращенія, что слѣдуетъ изъ соображеній § 14 первой главы. Для того чтобы воспользоваться обозначеніями третьей главы, будемъ употреблять вмѣсто обозначеній u, v картографическихъ координатъ шара буквы x и y, причемъ пусть будетъ x функція широты, а y разность долготъ.

---

*) Относящіяся къ этому случаю выкладки можно найти въ сочиненіи Эйзенлора (см. стр. 174).

18. Строимъ прямоугольникъ C, представляющій въ Меркаторской проекціи разсматриваемый четыреугольникъ шара между двумя меридіанами и двумя параллелями. Возьмемъ центръ этого прямоугольника за начало координатъ, причемъ ось x-овъ расположимъ по среднему меридіану Меркаторской проекціи, а ось y-овъ по средней широтѣ. Пусть длины сторонъ прямоугольника будутъ ω и ω', такъ что ω' есть разность долготъ крайнихъ меридіановъ, а ω разстояніе между крайними параллелями въ Меркаторской проекціи.

Обозначая черезъ a разстояніе отъ центра прямоугольника до изображенія экватора, приводимъ нашу задачу къ нахожденію рѣшенія Лапласова уравненія, обращающагося на контурѣ C въ функцію

$$\lg \frac{2}{e^{a+x}+e^{-a-x}}.$$

Нетрудно видѣть, что на основаніи § 20 главы III искомое рѣшеніе будетъ выражаться вещественною частью интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \lg \frac{2}{e^{a+x}+e^{-a-x}}\, D_z \lg \frac{\mathrm{H}(z-\xi)\,\Theta_1(z+\xi)}{\Theta(z-\underset{\cdot}{\xi})\,\mathrm{H}_1(z+\underset{\cdot}{\xi})}\,dz,$$

гдѣ

$$\xi = x+iy, \quad \underset{\cdot}{\xi} = x-iy.$$

19. Подвергнемъ предварительно подъинтегральную функцію слѣдующимъ преобразованіямъ.

На основаніи извѣстныхъ соотношеній

$$\mathrm{H}(x+a)\,\Theta_1(x-a)\,\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0) = \mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta(x) + \\ + \Theta(a)\,\mathrm{H}_1(a)\,\mathrm{H}(x)\,\Theta_1(x)$$

$$\Theta(x+a)\,\mathrm{H}_1(x-a)\,\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0) = \mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(x)\,\mathrm{H}(x) + \\ + \Theta(a)\,\mathrm{H}_1(a)\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta(x).$$

Получимъ

$$\frac{\mathrm{H}(x+a)\,\Theta_1(x-a)}{\Theta(x+b)\,\mathrm{H}_1(x-b)} = \frac{\mathrm{H}(a)\,\mathrm{H}_1(a)\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} + \Theta(a)\,\mathrm{H}_1(a)\dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}}{\Theta(b)\,\mathrm{H}_1(b)\dfrac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)} + \mathrm{H}(b)\,\Theta(b)\dfrac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}} =$$

$$= \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(b)}\,\frac{\operatorname{sn} a\,\operatorname{dn} a\,\operatorname{cn} x + \operatorname{cn} a\,\operatorname{sn} x\,\operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} b\,\operatorname{cn} x + \operatorname{sn} b\,\operatorname{dn} b\,\operatorname{sn} x\,\operatorname{dn} x}.$$

Замѣняя a на $-\xi$, b на $-\underset{\cdot}{\xi}$, x на z, получимъ подъ знакомъ интеграла

$$D_z \lg \frac{\operatorname{sn} z\,\operatorname{dn} z\,\operatorname{cn}\xi - \operatorname{sn}\xi\,\operatorname{dn}\xi\,\operatorname{cn} z}{\operatorname{cn}\underset{\cdot}{\xi}\,\operatorname{cn} z - \operatorname{sn}\underset{\cdot}{\xi}\,\operatorname{dn}\underset{\cdot}{\xi}\,\operatorname{sn} z\,\operatorname{dn} z}.$$

Для дальнѣйшихъ разсужденій удобно ввести въ разсмотрѣніе функцію

$$\operatorname{tn} z = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{cn} z},$$

тогда получимъ окончательно слѣдующее выраженіе:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \lg \frac{2}{e^{a+x}+e^{-a-x}} D_z \lg \frac{\operatorname{tn} z - \operatorname{tn} \xi}{1-\operatorname{tn} z \operatorname{tn} \xi} dz \ldots\ldots\ldots (8)$$

20. Функція $\operatorname{tn} z$ обладаетъ слѣдующими свойствами:

$$\operatorname{tn}(z+\omega) = -\frac{1}{\operatorname{tn} z}, \quad \operatorname{tn}(z+2\omega) = \operatorname{tn} z$$

$$\operatorname{tn}(z+\omega' i) = \frac{1}{\operatorname{tn} z}, \quad \operatorname{tn}(z+2\omega' i) = \operatorname{tn} z$$

$$\operatorname{tn} z = \frac{\operatorname{sn} 2z}{1+\operatorname{cn} 2z}$$

$$\operatorname{tn}\left(z+\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\operatorname{dn} 2z + k' \operatorname{sn} 2z}{\operatorname{cn} 2z}$$

$$\operatorname{tn}\left(z+\frac{\omega' i}{2}\right) = k \operatorname{sn} 2z + i \operatorname{dn} 2z$$

$$D_z \operatorname{tn} z = \frac{2i \operatorname{dn} 2z}{1+\operatorname{cn} 2z}.$$

Модуль функціи $\operatorname{tn} z$ равенъ единицѣ для всѣхъ точекъ контура C.

Отдѣляя вещественную часть отъ мнимой, получимъ

$$\operatorname{tn} \xi = X(x, y) + i\, Y(x, y)$$

$$\operatorname{tn} \bar{\xi} = X(x, y) - i\, Y(x, y).$$

Слѣдовательно, для всѣхъ точекъ контура получаемъ

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

21. Формула (8) можетъ быть написана въ такомъ видѣ

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}}^{+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}} \lg\frac{2}{e^{a+s}+e^{-a-s}}\,D_z\lg\frac{\operatorname{tn} z-\operatorname{tn}\xi}{1-\operatorname{tn} z\operatorname{tn}\xi}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}}^{+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}} \lg\frac{2}{e^{a+\frac{\omega}{2}}+e^{-a-\frac{\omega}{2}}}\,D_z\lg\frac{\operatorname{tn} z-\operatorname{tn}\xi}{1-\operatorname{tn} z\operatorname{tn}\xi}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}}^{-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}} \lg\frac{2}{e^{a+s}+e^{-a-s}}\,D_z\lg\frac{\operatorname{tn} z-\operatorname{tn}\xi}{1-\operatorname{tn} z\operatorname{tn}\xi}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}}^{-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}} \lg\frac{2}{e^{a-\frac{\omega}{2}}+e^{-a+\frac{\omega}{2}}}\,D_z\lg\frac{\operatorname{tn} z-\operatorname{tn}\xi}{1-\operatorname{tn} z\operatorname{tn}\xi}\,dz.$$

Въ первомъ интегралѣ $z=s-\frac{\omega' i}{2}$, причемъ s принимаетъ всѣ вещественныя значенія между $-\frac{\omega}{2}$ и $+\frac{\omega}{2}$. Во второмъ интегралѣ $z=\frac{\omega}{2}+is$, гдѣ s мѣняется отъ $-\frac{\omega'}{2}$ до $+\frac{\omega'}{2}$. Въ третьемъ $z=s+\frac{\omega' i}{2}$, гдѣ s мѣняется отъ $+\frac{\omega}{2}$ до $-\frac{\omega}{2}$. Въ четвертомъ $z=-\frac{\omega}{2}+is$, s мѣняется отъ $+\frac{\omega'}{2}$ до $-\frac{\omega'}{2}$.

22. Первый и третій интегралы могутъ быть соединены въ одинъ слѣдующій:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}}^{+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}} \lg\frac{2}{e^{a+s}+e^{-a-s}}\,D_z\lg\frac{[\operatorname{tn} z-\operatorname{tn}\xi]\,[1-\operatorname{tn}(z+\omega' i)\operatorname{tn}\xi]}{[1-\operatorname{tn} z\operatorname{tn}\xi]\,[\operatorname{tn}(z+\omega' i)-\operatorname{tn}\xi]}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \lg\frac{2}{e^{a+s}+e^{-a-s}}\,D_s\lg\Pi(s)\,ds$$

гдѣ

$$\Pi(s)=\frac{\left[\operatorname{tn}\left(s-\frac{\omega' i}{2}\right)-\operatorname{tn}\xi\right]\left[\operatorname{tn}\left(s-\frac{\omega' i}{2}\right)-\operatorname{tn}\xi\right]}{\left[1-\operatorname{tn}\xi\operatorname{tn}\left(s-\frac{\omega' i}{2}\right)\right]\left[1-\operatorname{tn}\xi\operatorname{tn}\left(s-\frac{\omega' i}{2}\right)\right]}.$$

Не трудно замѣтить, что вещественная часть выраженія $\lg\Pi(s)$ равна нулю, мнимая же часть равна

$$-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{dn}2s-Y}{k\operatorname{sn}2s-X}-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{dn}2s+Y}{k\operatorname{sn}2s-X}-$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{k\operatorname{sn}2s\,Y+\operatorname{dn}2s\,X}{1-k\operatorname{sn}2s\,X+\operatorname{dn}2s\,Y}-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{dn}2s\,X-k\operatorname{sn}2s\,Y}{1-k\operatorname{sn}2s\,X-\operatorname{dn}2s\,Y}.$$

Дифференцируя по s, получаемъ

$$2\varepsilon k\operatorname{cn}2s\,(1-X^2-Y^2)\left\{\frac{1}{W(2s)}+\frac{1}{W_1(2s)}\right\},$$

гдѣ

$$\varepsilon=\frac{K}{\omega},\quad K=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$W(2s)=X^2+Y^2-2k\operatorname{sn}2s\,X-2\operatorname{dn}2s\,Y+1$$

$$W_1(2s)=X^2+Y^2-2k\operatorname{sn}2s\,X+2\operatorname{dn}2s\,Y+1.$$

23. Второй интегралъ преобразовывается по формулѣ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{+\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}}^{+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}}\lg\frac{2}{e^{a+\frac{\omega}{2}}+e^{-a-\frac{\omega}{2}}}\lg\frac{\operatorname{tn}z-\operatorname{tn}\xi}{1-\operatorname{tn}z\operatorname{tn}\xi}.$$

Приходится разсматривать выраженіе

$$\lg\frac{\left[\operatorname{tn}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}\right)-\operatorname{tn}\xi\right]\left[1-\operatorname{tn}\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}\right)\operatorname{tn}\xi\right]}{\left[1-\operatorname{tn}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}\right)\operatorname{tn}\xi\right]\left[\operatorname{tn}\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\omega' i}{2}\right)-\operatorname{tn}\xi\right]}.$$

Полагая $\operatorname{tn}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\omega' i}{2}\right)=k+k'i$, получимъ

$$\lg\frac{k+k'i-X-iY}{1-(k+k'i)(X-iY)}+\lg\frac{k+k'i-X+iY}{1-(k+k'i)(X+iY)}=$$

$$=i\operatorname{arctg}\frac{k'-Y}{k-X}-i\operatorname{arctg}\frac{kY-k'X}{1-kX-k'Y}+$$

$$+i\operatorname{arctg}\frac{k'+Y}{k-X}+i\operatorname{arctg}\frac{kY+k'X}{1-kX+k'Y}+il\pi=$$

$$=2i\operatorname{arctg}\frac{k'(1-X^2-Y^2)}{k(1+X^2+Y^2)-2X}+il\pi.$$

Отсюда получаемъ

$$\frac{1}{\pi}\lg\frac{2}{e^{a+\frac{\omega}{2}}+e^{-a-\frac{\omega}{2}}}\left\{\frac{l\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{k'(1-X^2-Y^2)}{k(1+X^2+Y)^2-2X)}\right\}.$$

24. Выраженіе четвертаго интеграла получается изъ выраженія для второго черезъ замѣну k, k' на $-k$, $-k'$.

Нетрудно видѣть, что окончательное выраженіе логариѳма масштаба карты, обращающееся въ нуль на границѣ, имѣетъ видъ:

$$\lg\frac{e^{a+x}+e^{-a-x}}{2}+$$

$$+\frac{k\varepsilon(1-X^2-Y^2)}{2\pi}\int\limits_{-\omega}^{+\omega}\left\{\frac{\operatorname{cn} s}{W(s)}+\frac{\operatorname{cn} s}{W_1(s)}\right\}\lg\frac{2}{e^{a+\frac{s}{2}}+e^{-a-\frac{s}{2}}}ds+$$

$$+\lg\frac{2}{e^{a+\frac{\omega}{2}}+e^{-a-\frac{\omega}{2}}}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{k(1+X^2+Y^2)-2X}{k'(1-X^2-Y^2)}\right\}+$$

$$+\lg\frac{2}{e^{a-\frac{\omega}{2}}+e^{-a+\frac{\omega}{2}}}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{k(1+X^2+Y^2)+2X}{k'(1-X^2-Y^2)}\right\}\ldots(9)$$

Нетрудно видѣть, что это выраженіе обладаетъ всѣми свойствами требуемыми условіями задачи.

Въ самомъ дѣлѣ, внутри четыреугольника

$$X^2+Y^2<1;$$

на сторонахъ

$$\frac{\omega}{2}+si,\quad -\frac{\omega}{2}+si$$

$$|X|>k,\quad\text{ибо}\quad X=\mp\frac{\operatorname{dn} 2si}{\operatorname{cn} 2si}.$$

На сторонахъ же

$$s+\frac{\omega' i}{2},\quad s-\frac{\omega' i}{2}$$

$$|X|<k,\quad\text{ибо}\quad X=k\operatorname{sn} 2s.$$

25. Изъ формулы (9) получается выраженіе логариѳма масштаба Гауссовской проекціи при $k=0$.

Тогда $k' = 1$

$$\operatorname{tn} \xi = \operatorname{tg} \lambda \xi = X + iY = \operatorname{tg} \lambda (x + iy)$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Отсюда

$$X = \frac{2 \sin 2\lambda x}{e^{2y\lambda} + e^{-2y\lambda} + 2 \cos 2x\lambda}$$

$$Y = \frac{e^{2y\lambda} - e^{-2y\lambda}}{e^{2\lambda y} + e^{-2y\lambda} + 2 \cos 2x\lambda}.$$

Далѣе

$$1 - X^2 - Y^2 = \frac{4 \cos 2x\lambda}{e^{2y\lambda} + e^{-2y\lambda} + 2 \cos 2x\lambda}.$$

Такъ что получаемъ

$$\operatorname{arctg} \frac{-2X}{1 - X^2 - Y^2} = \operatorname{arctg} (-\operatorname{tg} 2x\lambda) = -2x\lambda,$$

отсюда получается слѣдующая формула логариѳма масштаба Гауссовской проекціи:

$$\lg \frac{e^{a+x} + e^{-a-x}}{2} + \lg \frac{2}{e^{a+\frac{\omega}{2}} + e^{-a-\frac{\omega}{2}}} \left[\frac{1}{2} + \frac{x}{\omega}\right]$$

$$+ \lg \frac{2}{e^{a+\frac{\omega}{2}} + e^{-a+\frac{\omega}{2}}} \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{\omega}\right].$$

26. Формула (9) показываетъ, что изъ всѣхъ значеній масштаба на одной и той же параллели наибольшее по абсолютной величинѣ значеніе соотвѣтствуетъ точкѣ пересѣченія параллели со среднимъ меридіаномъ, принятымъ на Меркаторской проекціи за ось x-овъ. Поэтому, если мы желаемъ сравнить проекцію Чебышева, изображающую четыреугольникъ, ограниченный двумя параллелями, съ Гауссовскою проекціею, дающею одинаковый масштабъ на разсматриваемыхъ двухъ параллеляхъ, необходимо прослѣдить измѣненіе масштаба вдоль по среднему меридіану.

Полагая въ формулѣ (9) $y = 0$, $\xi = \xi = x$, получимъ слѣдую-