

Екатеринославское Высшее Горное Училище.

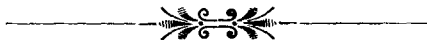
П. Леонтовскій,

Горный Инженеръ,

преподаватель Геодезіи и Маркшейдерскаго Искусства



Маркшейдерскія задачи.



ЕКАТЕРИНОСЛАВЪ.

Типографія Губернскаго Земства.

1905.

Печатано по распоряженію г. Директора Екатеринославскаго Высшаго
Горнаго Училища.

При составленіи этой книги, имѣющей цѣлью служить руководствомъ при практическихъ занятіяхъ студентовъ Высшаго Горнаго Училища, главнымъ руководствомъ служили: соч. профессора Е. Hegemann'a „Übungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung“ etc. и численные матеріалы, собранные авторомъ во время заграничной командировки.

Часть 1-я.

Основные формулы уравнивания наблюдений по способу наименьшихъ квадратовъ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Глава I. Уравнивание непосредственныхъ наблюдений.

Глава II. Уравнивание посредственныхъ наблюдений.

Глава III. Уравнивание условныхъ наблюдений.

ГЛАВА I.

Уравновѣшеніе непосредственныхъ наблюдений.

§ 1.

Основной принципъ способа наименьшихъ квадратовъ.

При всякаго рода измѣреніяхъ ошибки неизбѣжны и истинное значеніе опредѣляемой величины никогда въ точности не можетъ быть извѣстно, а потому рѣшеніе геодезическо-маркшейдерской задачи не можетъ считаться полнымъ, пока не опредѣлены среднія ошибки достигнутыхъ результатовъ, т. е. пока не опредѣлены тѣ наивѣроятные предѣлы, между которыми находится истинное значеніе неизвѣстной.

Вычисленіе среднихъ ошибокъ и опредѣленіе наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ (или „уравновѣшеніе“ результатовъ наблюдений) производится на основаніи общаго основного принципа, по которому сумма квадратовъ наивѣроятныхъ ошибокъ $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ наблюдений (при одинаковыхъ вѣсахъ ихъ), или сумма произведеній изъ квадратовъ этихъ ошибокъ на вѣса $p_1, p_2, \dots, p_n$ соответствующихъ наблюдений должна быть minimum:

$$\begin{aligned}\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 &= \min. \\ p_1 \delta_1^2 + p_2 \delta_2^2 + \dots + p_n \delta_n^2 &= \min.\end{aligned}$$

§ 2.

Условныя обозначенія суммъ.

Гауссъ ввелъ нижеслѣдующіе символы для краткости письма:

1) Алгебраическая сумма однородныхъ величинъ:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = [a].$$

2) Сумма квадратовъ однородныхъ величинъ:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = [aa].$$

3) Сумма произведеній:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = [ab].$$

4) Сумма произведеній:

$$a_1 \cdot b_1^2 + a_2 \cdot b_2^2 + \dots + a_n b_n^2 = [abb] = [a \cdot b^2].$$

Примѣръ 2.

Пять произведеній опредѣлялись, во первыхъ,—прямымъ вычисленіемъ, а во вторыхъ,—счетной линейкой; при этомъ оказались слѣдующіе результаты:

№	Произведенія.	По вычисленію.	По счетной линейкѣ.	δ	δ^2
1	10. 55,5	555	555,3	—0,3	0,09
2	25. 24,5	612,5	612,4	+0,1	0,01
3	30. 20	600	600,3	—0,3	0,09
4	24. 30	720	719,7	+0,3	0,09
5	20. 25	500	500,1	—0,1	0,01
				$[\delta]=0,3$	$[\delta\delta]=0,29$

Средняя ошибка одного вычисления по линейкѣ=

$$m = \pm \sqrt{\frac{0,29}{5}} = \pm 0,24$$

Примѣръ 2'.

Въ треугольникѣ измѣрялись 6 разъ всѣ углы, при чемъ суммы ихъ и разности этихъ суммъ со 180° оказались:

№	Сумма угловъ изъ наблюдений.	Отличіе отъ 180°	δ^2
1	179° 59' 58"	+2"	4
2	179 59 53	+7	49
3	179 59 52	+8	64
4	180 0 1	—1	1
5	180 0 9	—9	81
6	180 0 5	—5	25
Должно быть: 180° 0' 0"		$[\delta] = +2"$	$[\delta\delta] = 224$

Средняя ошибка одного измѣренія суммы угловъ Δ -ка равна:

$$m = \pm \sqrt{\frac{224}{6}} = \pm 6",1$$

$$\left(\frac{[\delta]}{n} = \frac{+2"}{6} = 0",3 \quad \text{близко къ нулю} \right)$$

§ 4.

Вѣроятная ошибка наблюдений.

„Вѣроятная ошибка“ г есть тотъ предѣлъ, ниже котораго лежить столько же ошибокъ меньшихъ, сколько и выше его—большихъ; т. е. для каждаго отдѣльнаго наблюденія есть столько же шансовъ за, сколько и противъ, что ошибка этого наблюденія не превыситъ г.

Вѣроятная ошибка вычисляется по формулѣ:

$$r = \rho \cdot \sqrt{2 \cdot m}$$

гдѣ $\rho = \text{const.} = 0,4769^1$, а m—средняя ошибка одно наблюденія.

$$\text{Приблизительно: } r = \frac{2}{3} m \dots \dots \dots (2)$$

Примѣръ 3.

Для примѣра 2'-го имѣемъ: $r = \pm \frac{2}{3} \cdot 5''$, $i = \pm 3''$, 4.

§ 5.

Точность наблюдений.

За мѣру *точности* наблюдений принимаютъ величину обратную средней ошибкѣ; вычисляютъ ее по формулѣ:

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \dots \dots \dots (3)$$

Примѣръ 4.

Для примѣра 2'-го имѣемъ: $h = \frac{1}{5,1 \cdot \sqrt{2}} = 0,14$.

§ 6.

Вторая формула средней ошибки одного наблюдения.

Если $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ суть разности между *наивѣроятнымъ* значеніемъ x_0 искомой величины, измѣренной съ одинаковой точностью n разъ и каждымъ отдѣльнымъ результатомъ ея измѣренія: $x_1, x_2, \dots x_n$ то *средняя ошибка одного измѣренія* опредѣлится по формулѣ:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}} \dots \dots \dots (4)$$

За *наивѣроятное* значеніе неизвѣстной величины принимается среднее арифметическое:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n} \dots \dots \dots (5)$$

при чемъ должно имѣть мѣсто равенство (какъ контроль):

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = [\delta] = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Примѣръ 5.

Нѣкоторая длина измѣрялась 8 разъ, при чемъ получено:

№	Измѣренія.	δ	δ^2
1	1330,00	—0,69	0,4761
2	1330,0	—0,69	0,4761
3	1330,0	—0,69	0,4761
4	1329,5	—0,19	0,0361
5	1329,0	+0,31	0,0961
6	1329,0	+0,31	0,0961
7	1329,0	+0,31	0,0961
8	1328,0	+1,31	1,7161
$x_0 =$	1329,31	$[\delta] = -0,02$	$[\delta\delta] = 3,3688$

Средняя ошибка одного измѣренія:

$$m = \pm \sqrt{\frac{3,3688}{8-1}} = \pm 0,69$$

при чемъ $[\delta] = -0,02$ близко къ нулю.

§ 7.

Средняя ошибка функции одной непосредственно измеренной величины.

Если определяемая величина X есть функция одной непосредственно измеряемой величины x , т. е. если

$$X=f(x)$$

при чем средняя ошибка измерения x равна $\pm m$, то средняя ошибка въ определении X равна приблизительно:

$$M=\pm \frac{df}{dx}m \dots \dots \dots (7)$$

Примѣчаніе.

Эта формула можетъ быть выведена такъ: ошибка въ определении x есть $\pm m$, слѣдовательно истинное значеніи x колеблется навѣроятно между предѣлами $x+m$ и $x-m$, а чтобы найти соотвѣтствующіе предѣлы M для X , мы разложимъ въ рядъ Тейлора, ограничиваясь первою степенью малой величины m , функцию:

$$X\pm M=f(x\pm m)$$

тогда и найдемъ:

$$X\pm M=f(x)\pm mf'(x)$$

$$M=m \cdot f'(x)=m \frac{df}{dx}$$

Частные случаи.

а) Если $X=a+x$, или $X=a-x$ (или $X=+x$, или $X=-x$), гдѣ x измерено со средней ошибкой m , то средняя ошибка въ X будетъ $\left(\frac{df}{dx}=\pm 1\right)$:

$$M=m.$$

Примѣръ 6.

Пусть уголъ

$$X=180^\circ-x$$

гдѣ $x=32^\circ 52' 33''$ измерено со средней ошибкой $m=\pm 3''$, тогда ошибка въ X будетъ:

$$M=m=\pm 3''$$

$$X=147^\circ 7' 27''\pm 3''$$

б) Если

$$X=ax\pm b, \text{ или } X=a.x$$

гдѣ a и b суть постоянныя, а x — величина, измѣренная со средней ошибкой m , то $\left(\frac{df}{dx}=a\right)$:

$$M=am \dots \dots \dots (8)$$

Примѣръ 7.

Пусть нѣкоторая искомая длина X равна удесятеренной длинѣ 105, саж., измѣренной непосредственно съ ошибкой $\pm 0,06$ саж., тогда искомая длина X и ошибка ея M будутъ:

$$X=1050 \pm M, \text{ гдѣ } M=\pm 10 \cdot 0,06=\pm \underline{0,60} \text{ саж.}$$

с) Если

$$X=\frac{x}{a} \pm b, \text{ или } X=\frac{x}{a}$$

то

$$\left(\frac{df}{dx}=\frac{1}{a}\right)$$

$$X=\frac{1}{a} \cdot m \dots \dots \dots (9)$$

Примѣръ 8.

Пусть

$$X=\frac{x}{3}-100, \text{ или } X=\frac{x}{3}$$

гдѣ $X=405$ саж. $\pm 0,06$ саж., то

$$M=\pm \frac{0,06}{3}=\pm \underline{0,02} \text{ саж.}$$

§ 8.

Средняя ошибка функціи нѣсколькихъ измѣренныхъ непосредственно величинъ.

Если опредѣляемая величина X есть функція нѣсколькихъ величинъ $x_1, x_2, \dots x_n$, непосредственно измѣряемыхъ соотвѣственно съ ошибками $m_1, m_2, \dots m_n$, т. е. если

$$X=f(x_1, x_2, \dots x_n),$$

то средняя ошибка въ X равна

$$M=\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2} \dots (10)$$

Частные случаи:

а) Если

$$X=x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n$$

гдѣ $x_1, x_2, \dots, x_n$ измѣрены съ ошибками: $m_1, m_2, \dots, m_n$, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \pm 1 \dots \dots \right)$$

средняя ошибка въ X будетъ

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2} = \pm \sqrt{[m.m]} \dots (11)$$

Примѣръ 9.

Въ треугольникѣ ABC измѣрены при одинаковыхъ условіяхъ два угла; уголъ A —3 раза и B —4 раза; найти среднюю ошибку угла C ?

№	A	δ	δ^2
1	$50^\circ 27' 10''$	+8	64
2	$50^\circ 27' 20''$	-2	4
3	$50^\circ 27' 24''$	-6	36
ср. ар.	$= 50^\circ 27' 18''$	0	104

Средняя
ошибка угла
 A (по § 6):
 $m_A = \pm \sqrt{\frac{104}{2}} = \pm 7'', 2$

№	B	δ	δ^2
1	$65^\circ 32' 20''$	+6	36
2	$65^\circ 32' 21''$	+5	25
3	$65^\circ 32' 30''$	-4	16
4	$65^\circ 32' 33''$	-7	49
ср. ар.	$= 65^\circ 32' 26''$	0	126

$$m_B = \pm \sqrt{\frac{126}{3}} = \pm 6'', 5.$$

Слѣдовательно уголъ

$$C = 180^\circ - (50^\circ 27' 18'' + 65^\circ 32' 26'') = 64^\circ 0' 16'' \pm m_C$$

при чемъ

$$m_C = \pm \sqrt{7,2^2 + 6,5^2} = \pm 9'', 7$$

Примѣръ 10.

Если длина X равна суммѣ или разности двухъ длинъ: $x_1 = a \pm 0,03$ саж. и $x_2 = b \pm 0,04$ саж., то средняя ошибка результата будетъ:

$$M = \sqrt{0,03^2 + 0,04^2} = \pm 0,05 \text{ саж.}$$

б) Если

$$X = a_0 \pm a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm \dots \pm a_n x_n$$

тогда

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = \pm a_2 \dots \dots \right)$$

средняя ошибка результата:

$$M = \pm \sqrt{a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \dots + a_n^2 m_n^2} = \pm \sqrt{[a^2.m^2]} \dots (12)$$

Примѣръ 11.

Пусть $X = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$ (числа см. въ примѣрѣ 9-мъ), то

$$M = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 7,2^2 + \frac{1}{4} \cdot 6,5^2} = \pm 4",85$$

Примѣръ 12.

Если X слагается изъ учетверенной длины: (a саж. $\pm 0,02$ саж.) и утроенной длины: (b саж. $\pm 0,01$ саж.), то ошибка результата $X = 4a + 3b$ равна:

$$M = \pm \sqrt{4^2 \cdot 0,02^2 + 3^2 \cdot 0,01^2} = \pm 0,086 \text{ саж.}$$

Примѣръ 13.

Если

$$X = 2x_1^2 \frac{2x_1 \cdot x_2}{4} + x_2^2$$

гдѣ x_1 и x_2 измѣрены съ ошибками m_1 и m_2 , то средняя ошибка результата X будетъ:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 - \frac{3x_2}{4}, \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{3x_1}{4} + 2x_2 \right)$$

$$M = \pm \sqrt{\left(4x_1 - \frac{3x_2}{4} \right)^2 m_1^2 + \left(2x_2 - \frac{3x_1}{4} \right)^2 m_2^2}$$

Примѣръ 14.

Если

$$X = 3 \cdot \frac{\sin A}{\sin B}$$

гдѣ углы A и B измѣрены со средними ошибками m_A и m_B , то средняя ошибка результата

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A} = 3 \cdot \frac{\cos A}{\sin B}, \frac{\partial f}{\partial B} = -3 \frac{\sin A \cdot \cos B}{\sin^2 B} \right)$$

$$M = \frac{1}{\rho} \sqrt{\left(3 \cdot \frac{\cos A}{\sin B} \right)^2 m_A^2 + \left(3 \cdot \frac{\sin A \cdot \cos B}{\sin^2 B} \right)^2 m_B^2}$$

гдѣ $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{206265}$ есть длина дуги въ $1''$ (см. примѣръ 21-й).

§ 9.

Средняя ошибка функций нѣсколькихъ равноошибочно-измѣренныхъ величинъ. Средняя ошибка арифметической середины.

Если опредѣляемая величина X есть функция нѣсколькихъ величинъ $x_1, x_2, \dots, x_n$, непосредственно измѣряемыхъ съ одинаковой ошибкой m , то здѣсь ($m_1=m_2=\dots=m_n=m$) для

$$X=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$M=\pm m \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2} \dots \dots \dots (13)$$

Такъ, для случая а) § 8:

$$\underline{M=\pm m \sqrt{n}} \dots \dots \dots (14)$$

т. е. *ошибка алгебраической суммы равноошибочно-измѣренныхъ величинъ пропорциональна корню квадратному изъ ихъ числа.*

Для случая б) § 8:

$$M=\pm m \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \pm m \sqrt{[aa]} \dots (15)$$

Для примѣра 13-го:

$$M=\pm m \sqrt{\left(4x_1 - \frac{3x_2}{4}\right)^2 + \left(2x_2 - \frac{3x_1}{4}\right)^2}$$

и т. д.

Примѣръ 15.

Найти среднюю ошибку арифметической середины:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{[x]}{n}$$

По формулѣ (13), гдѣ $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{1}{n}$ имѣемъ:

$$M=\pm m \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \dots \dots \dots (15')$$

а такъ какъ по § 6

$$m=\pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}$$

то

$$M=\pm \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n(n-1)}} \dots \dots \dots (16)$$

Примѣръ 16.

Нѣкоторый уголъ измѣренъ 9 разъ; найти среднюю ошибку ариѳметической середины?

№	Измѣре- нiя.	δ	δ^2
1	14°35'58,"3	—1,0	1,00
2	57,5	—0,2	0,04
3	57,0	+0,3	0,09
4	60,5	—3,2	10,24
5	55,5	+1,8	3,24
6	57,6	—0,3	0,09
7	56,6	+0,7	0,49
8	57,2	+0,1	0,01
9	55,2	+1,8	3,24
Ср. ар.=14°35'57,"3		$\pm 0,00=[\delta]$	18,44=[$\delta\delta$]

Средняя ошибка ариѳметической середины:

$$M = \pm \sqrt{\frac{18,44}{9.8}} = \pm 0,51$$

или: средняя ошибка одного измѣренiя:

$$m = \pm \sqrt{\frac{18,44}{8}} = \pm 1,53$$

а средняя ошибка ариѳметической середины:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1,53}{\sqrt{9}} = \pm 0,51$$

Примѣръ 17.

При измѣренiи 10 саж. длины шагами оказалась средняя ошибка одного измѣренiя $m = \pm 0,3$ саж. Какова будетъ средняя ошибка одного измѣренiя шагами длины въ 300 саж.?

Здѣсь

$$X = 300 = 10 + 10 + 10 + \dots + 10 = 10 \left(\frac{300}{10} \right)$$

(30 разъ)

слѣдовательно

$$M = \pm 0,3 \sqrt{\frac{300}{10}} = \pm 0,3 \sqrt{30} = \pm 1,65 \text{ саж.}$$

Примѣръ 18.

Если при разстоянiи рейки отъ нивелира, равному $z = 20$ саж., мы дѣлаемъ среднюю ошибку въ опредѣленiи разности высотъ $m_H = \pm 0,004$ саж., то какова будетъ средняя ошибка m_H въ опредѣленiи

разности высотъ при тѣхъ же условіяхъ, если вся линія нивеллирнаго хода требуетъ $n=25$ установокъ нивеллира (т. е. если длина ея равна приблизительно $L=20 \cdot 25 \cdot 2=1000$ саж.) [„Нивелированіе изъ середины“]?

Здѣсь

$$m_n = \pm m_h \sqrt{2 \cdot n} = \pm m_h \sqrt{\frac{L}{z}} = \pm 0,004 \sqrt{\frac{1000}{20}} = \pm 0,028 \text{ саж.},$$

т. е. средняя ошибка нивелированія, при постоянномъ разстояніи между рейкой и инструментомъ, пропорціонально корню квадратному изъ длины нивеллирнаго хода.

Примѣръ 19.

Уголъ S опредѣляется какъ сумма угловъ $A+B+C$; уголъ A опредѣленъ изъ 9 измѣреній, уголъ B —изъ 16, а уголъ C —изъ 25; какова средняя ошибка угла S , если каждая установка теодолита обусловливаетъ среднюю ошибку измѣряемаго угла $\pm 15''$?

Если средняя ошибка одного измѣренія равна $m = \pm 15''$, то средняя ошибка ариѳметической середины изъ 9 такихъ измѣреній равна:

$$M_A = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \frac{15}{\sqrt{9}} = \pm 5'', 0.$$

изъ 16 измѣреній:

$$M_B = \pm \frac{15}{\sqrt{16}} = \pm 3'', 75,$$

а изъ 24 измѣреній:

$$M_C = \pm \frac{15}{\sqrt{25}} = \pm 3'', 0.$$

Ошибка въ опредѣленіи угла $S=A+B+C$ будетъ по § 8, а:

$$M_S = \pm \sqrt{M_A^2 + M_B^2 + M_C^2} = \pm \sqrt{48} = \pm 7''.$$

Примѣръ 20.

Найти среднюю ошибку M_S въ опредѣленіи площади S участка трапециoidalной формы, если нижнее и верхнее основанія его имѣютъ размѣры: $b_1=412,53$ саж. $\pm 0,21$ саж. и $b_2=110,32$ саж. $\pm 0,11$ саж., а высота $h=84,51$ саж. $\pm 0,08$ саж.

Искомая площадь:

$$S = \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) \cdot h \pm M_S$$

Для опредѣленія M_S составляемъ:

$$\frac{\partial s}{\partial b_1} = \frac{1}{2}h; \frac{\partial s}{\partial b_2} = \frac{1}{2}h; \frac{\partial s}{\partial h} = \frac{b_1 + b_2}{2}$$

слѣдовательно

$$M_S = \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 m^2_{b_1} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 m^2_{b_2} + \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 m^2_h}$$

$$M_S = \pm \sqrt{\left(\frac{84,51}{2}\right)^2 (0,21^2 + 0,11^2) + \left(\frac{412,53 + 110,32}{2}\right)^2 \cdot 0,08^2} = \pm 23,2 \text{ к. с.}$$

Примѣръ 21.

Вычислить ошибку въ опредѣленіи высоты пункта $h = d \cdot \operatorname{tg} \alpha$, гдѣ горизонтальное разстояніе отъ точки стоянія до проекціи его $d = 124\text{м}$, $18 \pm 0\text{м},03$, а уголъ линіи визированія на него съ горизонтомъ $\alpha = 19^\circ 41' 30'' \pm 10''$?

Здѣсь

$$\frac{\partial h}{\partial d} = \operatorname{tg} \alpha; \frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{d}{\operatorname{cs}^2 \alpha}; m_d = \pm 0\text{м},03; m_\alpha = \pm 10''$$

слѣдовательно:

$$M_h = \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot 0\text{м},03^2 + \left(\frac{d}{\operatorname{cs}^2 \alpha}\right)^2 \cdot (10'')^2}$$

Но такъ какъ подъ корнемъ—величины разнаго наименованія, то мы должны перевести дуговую мѣру ($10''$) въ линейную: при радиусѣ 1 ед. длина дуги въ $1''$ равна $\frac{1}{206265}$, слѣдовательно

$$m_\alpha = \pm 10 \cdot \frac{1}{206265} = \pm 0,000048 \text{ ед.}$$

$$M_h = \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 19^\circ 41' 30'' \cdot 0,03^2 + \left(\frac{124,18}{\operatorname{cs}^2 19^\circ 41' 30''}\right)^2 \cdot 0,000048^2} = \pm 0\text{м},013$$

Примѣръ 22.

Въ треугольникѣ ABC измѣрена сторона $AC = 317\text{м},18 \pm 0\text{м},04$ и углы $B = 60^\circ 8' 14'' \pm 15''$ и $C = 51^\circ 18' 23'' \pm 15''$. Вычислить ошибку въ опредѣленіи по этимъ даннымъ стороны AB?

Здѣсь

$$X = AB = \frac{AC \cdot \sin B}{\sin C}$$

$$\frac{\partial X}{\partial AC} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{\partial X}{\partial B} = \frac{AC \cdot \cos B}{\sin C}, \quad \frac{\partial X}{\partial C} = -\frac{AC \cdot \sin B}{\sin^2 C}$$

$$m_{AC} = \pm 0^m,04; \quad m_B = m_C = \pm 15'' = \frac{\pm 15}{206265} \text{ ед. дл.}$$

$$M_{AB} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)^2 m_{AC}^2 + \left(\frac{AC \cdot \cos B}{\sin C}\right)^2 m_B^2 + \left(\frac{AC \cdot \sin B}{\sin^2 C}\right)^2 m_C^2} = \pm 0^m,041$$

Примѣръ 23.

Въ $\triangle$ -кѣ ABC дана сторона $a = 716^m,15$; съ какою ошибкою могутъ быть измѣрены углы A и B, если опредѣленіе стороны b должно быть произведено съ ошибкой не большей $\pm 0^m,05$?

При этомъ извѣстно, что приблизительно: $A = 50^\circ$, $B = 60^\circ$.

Рѣшая этотъ вопросъ согласно примѣру 22-му, гдѣ $M_{AB} = \pm 0^m,05$ и опредѣляя $m_B = m_A$, найдемъ:

$$m_B = m_A = \pm 12'',5.$$

Примѣръ 24.

Въ $\triangle$ -кѣ ABC измѣрена сторона $a = 514^m,18 \pm 0^m,05$; углы B и C измѣрены 16 разъ и получено въ среднемъ: $B = 57^\circ 8' 16''$, $C = 65^\circ 28' 30''$.

Опредѣлить среднюю ошибку вычисленія стороны b, если средняя ошибка при одномъ измѣреніи угла равна $\pm 14''$?

Если средняя ошибка одного измѣренія угла равна $\pm 14''$, то средняя ошибка ариѳметической середины изъ 16 измѣреній равна:

$$M = m_B = m_C = \pm \frac{14}{\sqrt{16}} = \pm 3'',5.$$

Рѣшая далѣе по примѣру 22-му, найдемъ

$$m_B = \pm 0^m,048.$$

Примѣръ 25.

Найти среднюю ошибку опредѣленія одного направленія при 9-кратномъ измѣреніи одного угла теодолитомъ, даннымъ въ примѣрѣ 16?

Такъ какъ для измѣренія угла нужно опредѣлить 2 направле-
нія, то средняя ошибка одного направленія (см. § 9, (14):

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{0,51}{1,41} = \pm 0,36$$

В. Наблюденія не равнаго вѣса.

§ 10.

Вѣса наблюденій.

Если при совершенно одинаковыхъ условіяхъ значеніе искомой величины получено сперва изъ p_1 , а потомъ изъ p_2 ея измѣреній, то говорятъ: вѣсъ перваго результата относится къ вѣсу втораго результата, какъ $p_1 : p_2$. Если какая нибудь величина опредѣлена изъ p наблюденій, то среднее арифметическое имѣетъ вѣсъ въ p разъ болѣе, чѣмъ вѣсъ каждаго отдѣльнаго измѣренія; или, если здѣсь вѣсъ одного измѣренія мы примемъ за 1 ед., то вѣсъ средняго арифметическаго будетъ равенъ p . Поэтому, если m есть средняя ошибка одного измѣренія, а M_p средняя ошибка арифметической середины, то эта послѣдняя (см. примѣръ 15-й) можетъ быть выражена такъ:

$$M_p = \pm \frac{m}{\sqrt{p}},$$

откуда

$$p = \frac{m^2}{M_p^2} \dots \dots \dots (17)$$

Если бы было всего не p , а q измѣреній такого-же достоинства, то

$$q = \frac{m^2}{M_q^2}$$

и т. д. т. е. вообще *вѣсъ наблюденія обратно пропорціоналенъ квадрату его средней ошибки:*

$$p = \text{вѣсъ} = \frac{\text{const}}{M^2} \dots \dots \dots (18)$$

§ 11.

Вѣсъ функціи одной непосредственно измѣренной величины.

Пусть $X = f(x)$.

Если вѣсъ величины x есть p , то, назвавъ вѣсъ X черезъ P , имѣемъ (аналогично § 7):

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \cdot \frac{1}{p} \dots \dots \dots (19)$$

а если вѣсь x принять за 1 ед., то

$$P = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

Частные случаи.

а) Если

$$X = a \cdot x$$

гдѣ x имѣетъ вѣсь 1 ед., то $\frac{df}{dx} = a$ и

$$P = \frac{1}{a^2} \dots \dots \dots (20)$$

Примѣръ 26.

Если

$$X = 3x,$$

то вѣсь его

$$P = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

по сравненію съ вѣсомъ x .

б) Если

$$X = \frac{x}{a}$$

то

$$P = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = a^2 \dots \dots \dots (21)$$

Примѣръ 27.

Если

$$X = \frac{x}{3},$$

то вѣсь X :

$$P = 3^2 = 9 \text{ по сравненію съ вѣсомъ } x.$$

§ 12.

Вѣсь функціи нѣсколькихъ непосредственно измѣренныхъ величинъ.

Пусть

$$X = f(x_1, x_2, \dots \dots x_n)$$

Если вѣса $x_1, x_2, \dots, x_n$ суть: $p_1, p_2, \dots, p_n$, а P —вѣсъ результата X , то аналогично § 8 найдемъ:

$$\frac{1}{P} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{p_n}$$

откуда:

$$P = \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \frac{1}{p_2} + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 \frac{1}{p_n}} \dots \dots \dots (22)$$

Частные случаи.

а) Если

$$X = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \dots \dots \dots \pm x_n$$

то вѣсъ результата:

$$P = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}} \dots \dots \dots (23)$$

Если $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, то

$$P = \frac{1}{n} \cdot p \dots \dots \dots (24)$$

Примѣръ 28.

Пусть длина X равна суммѣ длинъ $x_1 + x_2 + x_3$, имѣющихъ каждая вѣсъ $p=1$ ед.; вѣсъ результата

$$P = \frac{1}{3}$$

б) Если

$$X = a (x_1 \pm x_2 \pm \dots \dots \dots \pm x_n)$$

то вѣсъ результата:

$$P = \frac{1}{a^2 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)} \dots \dots \dots (25)$$

и если $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, то

$$P = \frac{1}{n \cdot a^2} \dots \dots \dots (26)$$

Примѣръ 29.

Пусть уголъ $X=2 (\alpha+\beta+\gamma)$, гдѣ углы α , β и γ измѣрены съ одинаковой ошибкой m , т. е. и съ одинаковымъ вѣсомъ $=1$ ед.: тогда вѣсь результата:

$$P = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}$$

с) Если

$$X = a_1 x_1 \pm a_2 x_2 \pm \dots \pm a_n x_n$$

то

$$P = \frac{1}{a_1^2 \cdot \frac{1}{p_1} + a_2^2 \cdot \frac{1}{p_2} + \dots + a_n^2 \cdot \frac{1}{p_n}} \dots \dots \dots (27)$$

и если $p_1 = p_2 = \dots = p_n$, то

$$P = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \frac{1}{[aa]} \dots \dots \dots (28)$$

Примѣръ 30.

Пусть нѣкоторая длина

$$X = 3 \cdot x_1 - 2 x_2 + x_3$$

тогда вѣсь результата (если вѣса x_1 , x_2 и x_3 равны 1 ед.) будетъ:

$$P = \frac{1}{9 + 4 + 1} = \frac{1}{14}$$

Примѣръ 31.

Пусть

$$X = 3 \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)$$

причемъ ошибки въ x_1 , $x_2 \dots x_n$ суть: $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, тогда

$$P = \frac{1}{\left(\frac{3}{n} \right)^2 n} = \frac{n}{9}$$

Примѣръ 32.

Пусть

$$X = 2 \sin (A+B) + \frac{1}{3} C$$

гдѣ А, В и С измѣрены съ ошибками m_A, m_B, m_C ; тогда по формулѣ (22):

$$\frac{1}{P} = \left[2 \cdot \cos(A+B) \right]^2 \cdot \frac{1}{P_A} + \left[2 \cdot \sin(A+B) \right]^2 \cdot \frac{1}{P_B} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \frac{1}{P_C}$$

откуда

$$P = \frac{1}{4 \cdot \cos^2(A+B) \cdot \left[\frac{1}{P_A} + \frac{1}{P_B} \right] + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{P_C}} = \frac{1}{4 \cos^2(A+B) \cdot (m_A^2 + m_B^2) + \frac{1}{9} m_C^2}$$

Примѣръ 33.

Вѣсь измѣренія угла X принять за 1 ед.; найти вѣсь одного направленія?

Такъ какъ уголь составляется изъ двухъ направленій, напри-
мѣръ:

$$X = R_1 \pm R_2$$

то вѣсь X:

$$P = 1 = \frac{1}{\frac{1}{P} + \frac{1}{P}}$$

откуда

$$\underline{p = 2.}$$

Примѣръ 34.

Уголь $X = A_1 + A_2 + A_3$; $A_1 = 22^\circ 20' 3''$ измѣренъ 9 разъ теодолитомъ, дающимъ среднюю ошибку одного измѣренія $m_1 = \pm 15''$; $A_2 = 40^\circ 30' 4''$ измѣренъ 16 разъ теодолитомъ, дающимъ среднюю ошибку одного измѣренія $m_2 = \pm 30''$; и уголь $A_3 = 35^\circ 50' 2''$ измѣренъ 4 раза теодолитомъ, дающимъ среднюю ошибку одного измѣренія $m_3 = \pm 20''$. Определить вѣсь величины X, принимая однократное измѣреніе первымъ теодолитомъ за 1 ед. вѣса?

Здѣсь средняя ошибка M_1 величины A_1 , какъ средняя ошибка ариѳметической середины изъ 9 наблюдений, равна (см. примѣръ 15-й):

$$M_1 = \pm \frac{15}{\sqrt{9}} = \pm 5''.$$

для A_2 точно также:

$$M_2 = \pm \frac{30}{\sqrt{16}} = \pm 7'', 5$$

а для A_3 :

$$M_3 = \pm \frac{20}{\sqrt{4}} = \pm 10''.$$

Вѣсь одного измѣренія угла A_1 равенъ по условію:

$$p = \frac{\text{Const}}{m^2_1} = \frac{\text{Const}}{225} = 1.$$

откуда

$$\text{Const} = 225$$

Вѣсь окончательнаго (изъ 9—кратнаго измѣренія) результата величины A_1 равенъ:

$$p_1 = \frac{\text{Const}}{M^2_1} = \frac{225}{25} = 9.$$

Точно также для A_2 :

$$p_2 = \frac{\text{Const}}{M^2_2} = \frac{225}{7,5^2} = \infty 4^*)$$

и для A_3 :

$$p_3 = \frac{\text{Const}}{M^2_3} = \frac{225}{100} = 2 \frac{1}{4}$$

Вѣсь величины X будетъ:

$$P = \frac{1}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}} = \infty 1 \text{ ед.}$$

Примѣръ 35.

Въ треугольникѣ измѣрены два угла A и B съ вѣсомъ $= 1$ ед. Найти вѣсь угла $C = 180 - (A + B)$?

Рѣшеніе:

$$p_c = \frac{\text{Const}}{m^2_c} = \frac{\text{Const}}{m^2_A + m^2_B} = \frac{\text{Const}}{\frac{\text{Const}}{p_A} + \frac{\text{Const}}{p_B}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

или сразу по § 12, а:

$$p_c = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

*) Символь ∞ замѣняетъ слово: „приблизительно“.

Примѣръ 36.

Принимая вѣсь однократнаго измѣренія длины $x=100$ саж. за 1 ед., опредѣлить, сколько разъ нужно измѣрить длину $X=2420$ саж., чтобы вѣсь результата былъ не меньше $\frac{1}{3}$?

Пусть для этого требуется X измѣрить n разъ; пусть средняя ошибка одного измѣренія x равна m ; тогда ошибка одного измѣренія X будетъ $m \sqrt{\frac{2420}{100}}$ (см. примѣръ 17-й,) а средняя ошибка X будетъ:

$$M = \frac{m \sqrt{24,20}}{\sqrt{n}}$$

вѣсь же ея:

$$P = \frac{1}{3} = \frac{m^2}{M^2} = \frac{m^2 \cdot n}{m^2 \cdot 24,20}$$

откуда

$$n = \infty 8 \text{ разъ.}$$

Примѣръ 37.

Уголъ A треугольника ABC измѣренъ 16 разъ однимъ теодолитомъ, дающимъ среднюю ошибку однократнаго измѣренія $= \pm 15''$. Сколько разъ должны быть измѣрены углы B и C другимъ теодолитомъ, дающимъ среднюю ошибку одного измѣренія $= \pm 30''$, чтобы результаты измѣренія всѣхъ угловъ были одинаковаго вѣса?

Пусть требуется измѣрить ихъ n разъ.

Среднія ошибки окончательнаго опредѣленія угловъ A , B и C суть (см. примѣръ 15):

$$m_A = \pm \frac{15''}{\sqrt{16}}; \quad m_B = \pm \frac{30''}{\sqrt{n}} = m_C$$

Вѣса ихъ:

$$P_A = \frac{\text{Const}}{m_A^2} = \frac{\text{Const. } 16}{225}$$

$$P_B = P_C = \frac{\text{Const}}{m_B^2 = m_C^2} = \frac{\text{Const. } n}{900}$$

Слѣдовательно должно имѣть мѣсто равенство:

$$\frac{\text{Const. } 16}{225} = \frac{\text{Const. } n}{900}$$

откуда

$$n = \infty 64 \text{ разъ.}$$

§ 13.

Общая арифметическая средина.

Если непосредственные измѣренія $x_1, x_2, \dots, x_n$ одной и той же величины не равнаго достоинства, т. е. имѣють разные вѣса: $p_1, p_2, \dots, p_n$, то невѣроятное значеніе неизвѣстной будетъ:

$$X = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[xp]}{[p]} \dots \dots \dots (29)$$

(Это—„общая арифметическая средина“).

Назвавъ разности:

$$\left. \begin{array}{l} X - x_1 = \delta_1 \\ X - x_2 = \delta_2 \\ \dots \dots \dots \\ X - x_n = \delta_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Причемъ должно быть:} \\ [xp] = 0 \text{ (контроль)} \dots \dots \dots \end{array} \quad (30)$$

среднюю ошибку одного наблюденія съ вѣсомъ=1 ед. вычисляють по формулѣ

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p \delta^2]}{n-1}} \dots \dots \dots (31)$$

а средняя ошибка общей арифметической средины, т. е. полученнаго наивѣроятнаго значенія неизвѣстной, будетъ:

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p. \delta \delta]}{[p] (n-1)}} \dots \dots \dots (32).$$

Вѣсъ общей арифметической средины равенъ суммѣ вѣсовъ отдѣльныхъ измѣреній:

$$P = p_1 + p_2 + \dots + p_n \dots \dots \dots (32').$$

При вычисленіи X по (29) для упрощенія, конечно, нужно умножить на p_i не всю x_i , а только ту ея часть, которая различна во вѣсахъ x_i .

Если даны не вѣса p_i , а числа q_i —повтореній одного и того же результата измѣреній, то q_i можно считать пропорціональными вѣсамъ p_i .

Примѣръ 38.

Найти найвѣроятное значеніе угла и среднюю ошибку результата изъ слѣдующихъ измѣреній:

№	Измѣренія х.	Число повтореній $q=r$.	δ	$p. \delta = q. \delta$.	δ^2 .	$p. \delta^2$.
1	121° 27' 3"	11	+5	+55	25	275
2	10	6	—2	—12	4	24
3	15	6	—7	—42	49	294
4	8	10	0	0	0	0
	$X = 121^\circ 27' 8''$	33	—	+1	—	593

Наивѣроятное значеніе

$$X = 121^\circ 27' 3'' + \frac{0'' \cdot 12 + 7'' \cdot 6 + 12'' \cdot 6 + 5'' \cdot 10}{11 + 6 + 6 + 10} = \underline{\underline{121^\circ 27' 8''}}.$$

Средняя ошибка одного наблюденія:

$$m = \pm \sqrt{\frac{593}{4-1}} = \pm 14''.$$

Средняя ошибка окончательнаго результата:

$$M = \pm \frac{14}{\sqrt{33}} = \pm 2'',5.$$

Примѣръ 39.

Двумя разными инструментами измѣрялся нѣсколько разъ одинъ и тотъ же уголъ. Найти наивѣроятное значеніе и его среднюю ошибку?

№	Измѣренія 1-мъ INSTR.	δ	δ^2
1	150° 20' 56''	—6	36
2	48	+2	4
3	46	+4	16
4	43	+7	49
5	52	—2	4
6	55	—5	25
6	150° 20' 50'',0	0,0	124

$$\text{Среднее ариом.} = x_1 = 150^\circ 20' 50'',0$$

$$[\delta] = 0; [\delta\delta] = 124$$

$$\begin{aligned} \text{Средн. ош. результата} = M_1 &= \pm \sqrt{\frac{124}{6.5}} = \\ &= \pm 2'',03 \end{aligned}$$

№	Измѣренія 2-мъ инстр.	δ	δ^2
1	150° 20' 34''	+14	169
2	36	+11	121
3	48	— 1	1
4	60	—13	169
5	57	—10	100
5	150° 20' 47'',0	0,0	550

$$\text{Среднее арием.} = x_2 = 150^\circ 20' 47'',0$$

$$[\delta] = 0, 0; [\delta\delta] = 550$$

$$\text{Средн. ош. результата} = M_2 = \pm \sqrt{\frac{550}{5.4}} = \pm 5'',24$$

$$x_1 \text{ имѣеть вѣсь } p_1 = \frac{\text{const.}}{M_1^2}; \text{ примемъ его } = 1 \text{ ед., т. е.}$$

$$\text{const} = M_1^2$$

$$x_2 \text{ имѣеть вѣсь } p_2 = \frac{\text{const}}{M_2^2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{4,13}{27,50} = 0,15$$

Слѣдовательно общая ариѳметическая середина, т. е. наибѣроятное значеніе измѣряемаго угла:

$$X = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2}{p_1 + p_2} = 150^\circ 20' + \frac{50'' \cdot 1 + 47'' \cdot 0,15}{1 + 0,15} = \underline{\underline{150^\circ 20' 49'',6}}$$

Его средняя ошибка найдется такъ:

№	x_1 и x_2	δ	δ^2	p	$p\delta$	$p\delta^2$
1	150° 20' 50''	—0,4	0,16	1,00	—0,4	0,16
2	150 20 47''	+2,6	6,76	0,15	+0,4	0,01
2	52° 31' 49'',6	—	—	1,15	0,0	1,17

$$[p\delta] = 0, 0; [p \cdot \delta\delta] = 1,17$$

$$M = \pm \sqrt{\frac{1,17}{1,15 \cdot (2-1)}}$$

$$\underline{\underline{M = \pm 1'',0}}$$

А вѣсь его:

$$P = p_1 + p_2 = 1 + 0,15 = 1,15$$

Примѣръ 40.

Тремя разными приборами измѣрена одна и та же длина. Найти наивѣроятное значеніе длины и ея среднюю ошибку по слѣдующимъ даннымъ:

Измѣрительный приборъ.	Результатъ.	Число измѣреній.	Сред. ошибка 1-го измѣренія.
Стальная 50м лента	1220м,54	4	$\pm 0,35$
„ 10м „	1220м,80	3	$\pm 0,50$
Цѣпь 10м	1220м,92	3	$\pm 0м,83$

Вычисляемъ: среднія ошибки результата измѣреній для каждого прибора:

$$M_1 = \pm \frac{0,35}{\sqrt{4}}; \quad M_2 = \pm \frac{0,50}{\sqrt{3}}; \quad M_3 = \pm \frac{0,83}{\sqrt{3}}$$

Принимая вѣсь результата измѣренія цѣпью за 1 ед. вѣса, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} p_3 &= \frac{\text{const}}{M_3^2} = \frac{\text{const}}{0,7056} \cdot 3 = 1; \quad \text{const} = 0,235 \\ p_1 &= \frac{\text{const}}{M_1^2} = \frac{0,235}{0,1225} \cdot 4 = \infty 8 \\ p_2 &= \frac{\text{const}}{M_2^2} = \frac{0,235}{0,25} \cdot 3 = \infty 3 \end{aligned} \right\}$$

Наивѣроятное значеніе искомой длины:

$$X = 1220м,54 + \frac{(0,00 \times 8) + (0,26 \times 3) + (0,38 \times 1)}{8 + 3 + 1} + 1220м,637$$

А его средняя ошибка опредѣлится такъ:

№ измѣр.	Измѣренія.	δ	δ^2	p	p. δ	p. δ^2
I	1220м,54	$+0,097$	0,0094	8	$+0,776$	0,0752
II	1220,80	$-0,163$	0,0266	3	$-0,489$	0,0798
III	1220,92	$-0,283$	0,0801	1	$-0,283$	0,0801
	1220,637	—	—	12	$+0,004$	0,2351

$$M = \pm \sqrt{\frac{0,2351}{(3-1) \cdot 12}} = \pm 0,0098$$

Вѣсь X равенъ:

$$P = 8 + 3 + 1 = 12$$

Примѣръ 41.

5 нивеллирныхъ ходовъ длиною Si пересѣкаются въ одной точкѣ А, причемъ получены нижеприводимыя значенія высоты точки А; опредѣлить ея наивѣроятную высоту, среднюю ошибку результата и среднюю ошибку нивеллированія при Si=1 ?.

№	Высоты точки А.	Длина Si
1	112 ^m ,814	2,5 kilom.
2	112 ,807	4,0
3	112 ,802	5,0
4	112 ,817	0,5
5	112 ,816	1,0

Предполагая, что установка нивелира происходитъ черезъ приблизительно равныя разстоянія, мы можемъ считать вѣса обратно пропорціональными длинамъ Si (см. примѣръ 18-й) тогда, принимая вѣсъ перваго хода за 1 ед., имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 1 \text{ ед.} = \frac{\text{const}}{2,5}; \text{const} = 2,5 \\ p_2 &= \frac{\text{const}}{4,0} = \frac{2,5}{4,0} = \infty 0,6 \\ p_3 &= \frac{\text{const}}{5,0} = \frac{2,5}{5,0} = \infty 0,5 \\ p_4 &= \frac{\text{const}}{0,5} = \frac{2,5}{0,5} = 5,0 \\ p_5 &= \frac{\text{const}}{1,0} = \frac{2,5}{1,0} = 2,5 \end{aligned} \right\}$$

Наивѣроятное значеніе высоты:

$$X = 112^m,802 + \frac{12.1 + 5.0,6 + 0.0,5 + 15.5 + 14.2,5}{1 + 0,6 + 0,5 + 5,0 + 2,5}$$

$$X = 112^m,802 + 0,013 = \underline{\underline{112^m,815}}$$

Средняя ошибка этого результата опредѣляется такъ:

№	Высоты	δ	δ²	p	pδ	pδ²
1	112 ^m ,814	+ 1	1	1,0	+1,0	1,0
2	112 ,807	+ 8	64	0,6	+4,8	38,4
3	112 ,802	+13	169	0,5	+6,5	84,5
4	112 ,817	— 2	4	5,0	—10,0	20,0
5	112 ,816	— 1	1	2,5	—2,5	2,5
5	112 ^m ,815	—	—	9,6	—0,2	146,4

$$M = \pm \sqrt{\frac{146,40}{9,6 \cdot (5-1)}} = \underline{\underline{2,0 \text{ mm} = \pm 0^m,0020}}$$

Средняя ошибка нивелирования на 1 килом. равна $\pm 3,9\text{мм}$ (средняя ошибка нивелирования расстояния въ 2,5 килом. равна 6,1мм, откуда

$$m_1 = \pm \frac{6,1}{\sqrt{2,5}} = \pm 3,9\text{мм}.$$

§ 14.

Вычисленіе средней ошибки изъ разностей наблюденій.

Если измѣренія п величинъ повторены при одинаковыхъ условіяхъ, причемъ получены разности:

$$d_1, d_2, . . . d_n,$$

то средняя ошибка одного измѣренія, если вѣса наблюденій равны, будетъ:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{2n}} (33)$$

Если же вѣса различны и равны: $p_1, p_2 p_n$, то

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p \cdot dd]}{2n}} (34)$$

Примѣръ 42.

15 угловъ были измѣрены съ равнымъ вѣсомъ теодолитомъ сперва при одномъ положеніи трубы, а потомъ—при другомъ. Найти среднюю ошибку одного измѣренія угла и одного направленія?

№	1 измѣ- реніе.	2 измѣ- реніе.	d.	d ² .
1	6° 11' 47",5	6° 11' 43",5	+4,0	16,00
2	20 40 52,5	20 40 57,6	—5,1	26,01
3	26 52 38,5	26 52 34,7	+3,9	14,44
4	8 45 9,5	8 45 8,7	+0,8	0,64
5	3 24 44,7	3 24 42,7	+2,0	4,00
6	12 9 54,0	12 9 50,6	+3,4	11,56
7	36 40 23,3	36 40 23,2	+0,1	0,01
8	29 23 16,4	29 23 15,3	+1,1	1,21
9	66 3 38,9	66 3 37,1	+1,8	3,24
10	3 2 43,5	3 2 40,6	+2,9	8,41
11	0 47 17,0	0 47 16,9	+0,1	0,01
12	3 50 3,3	3 49 58,1	+5,2	27,04
13	43 8 6,0	43 8 9,0	—3,0	9,00
14	38 22 10,4	38 22 13,7	—3,3	10,89
15	14 53 47,7	14 53 45,6	+2,1	4,41

$$[dd] = 136,87$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{136,87}{2 \cdot 15}} = \pm 2",14$$

а средняя ошибка одного направленія равна:

$$m_R = \pm \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2,14}{1,42} = \pm 1",51$$

§ 15.

Средняя ошибка одного направленія и одного угла при визированіи съ одной точки стоянія на нѣсколько пунктовъ (по способу приѣмовъ).

Вычисленіе этой ошибки производится по формулѣ:

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[VV]}{(s-1)(G-1)}} \dots \dots \dots (35)$$

гдѣ

$$[VV] = [vv] - \frac{1}{s} [v][v] \dots \dots \dots (36)$$

при чемъ:

G=число приѣмовъ

s=число направленій визирования

v=отклоненія каждаго направленія при каждомъ приѣмѣ отъ окончательнаго средняго.

Примѣръ 43.

При нѣкоторой триангуляціи съ точки стоянія А производились по горизонтальному кругу теодолита отсчеты направленій на пункты: М, К, G, С, В, Н, при чемъ получено при 4-хъ приѣмахъ:

Точка стоянія А.

Точка визирова- нія.	1-е положеніе трубы.		2-е положеніе трубы.		Простое среднее.	Приведен- ное средн.
	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Нониусъ А.	Нониусъ В.		
1	2	3	4	5	6	7
<i>Первый приѣмъ.</i>						
М	0° 3' 40"	180° 3' 20"	180° 3' 20"	0° 3' 40"	0° 3' 30"	0° 0' 0"
К	84 46 40	264 46 20	264 46 20	84 46 60	84 46 35	84 43 5
G	90 53 60	270 53 40	270 53 40	90 54 20	90 53 55	90 50 25
С	116 57 40	296 57 40	296 57 40	116 57 40	116 57 40	116 54 10
В	156 59 20	336 59 20	336 59 20	156 59 20	156 59 20	156 55 50
Н	187 24 0	7 24 0	7 24 20	187 24 20	187 24 10	187 20 40

Точка визиро- ванія.	1-е положеніе трубы.		2-е положеніе трубы.		Простое среднее.	Приведен- ное средн.
	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Нониусъ А.	Нониусъ В.		
1	2	3	4	5	6	7

Второй приемъ.

М	45 3 0	225 3 20	225 3 0	45 3 40	43 3 15	0 0 0
К	129 46 0	309 46 20	309 46 0	129 46 20	129 46 10	84 42 55
Г	135 53 20	315 53 40	315 53 20	135 54 0	135 53 35	90 50 20
С	161 57 0	341 57 20	341 57 0	161 57 40	161 57 15	116 54 0
В	201 59 0	21 59 0	21 59 0	201 59 0	201 59 0	156 55 45
Н	232 23 40	52 23 40	41 24 0	232 23 45	232 23 45	187 20 30

Третій приемъ.

М	90 5 40	180 5 40	180 5 40	90 5 40	90 5 4	0 0 0
К	174 48 40	354 48 40	354 48 40	174 48 40	174 48 40	84 43 0
Г	180 56 0	360 56 0	360 56 0	180 56 0	180 56 0	90 50 20
С	206 59 40	26 59 40	26 59 40	206 59 40	206 59 40	116 54 0
В	247 1 20	67 1 20	67 1 20	247 1 40	247 1 25	156 55 45
Н	277 26 20	97 26 20	97 26 0	277 26 20	277 26 15	187 20 35

Четвертый приемъ.

М	135 3 40	215 3 40	215 3 20	135 3 40	135 3 35	0 0 0
К	219 46 40	39 47 0	39 46 40	219 46 40	219 46 45	84 43 10
Г	225 54 0	45 54 0	45 54 0	225 54 0	225 54 50	90 50 25
С	251 57 40	71 58 0	71 57 40	251 57 40	251 57 45	116 54 10
В	291 59 20	111 59 40	111 59 20	291 59 20	291 59 25	156 55 50
Н	322 24 20	142 24 20	142 24 0	322 24 20	322 24 15	187 20 40

Отсюда находимъ „среднее изъ всѣхъ“:

Точка стоянія	Точка визиро- ванія	Направленіе
А	М	0° 0' 0",0
	К	84 43 2,5
	G	90 50 22,5
	С	116 54 5,0
	В	156 55 47,5
	Н	187 20 36,2

Вычитывая отсюда соотвѣтственно числа послѣдней графы предыдущей таблицы, находимъ: ($v_1=0$ всегда), v_2, v_3, v_4, v_5 и v_6 ; складывая ихъ, находимъ $[v]$; потомъ вычисляемъ $[v]^2$ и $[v] \cdot [v]$:

Приемъ	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	$[v]$	$[v]^2$
I	0	-2,5	-2,5	-5	-2,5	-3,8	-16,3	265,69
II	0	+7,5	+2,5	+5	+2,5	+6,2	+23,7	561,69
III	0	+2,5	+2,5	+5	+2,5	+1,2	+13,7	187,69
IV	0	-7,5	-2,5	-5	-2,5	-3,8	-21,3	453,69
Сумма (кон- троль)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	-0,2	-0,2	<u>1468,76</u> = $[v] \cdot [v]$

Затѣмъ, возведя каждое v въ квадратъ и складывая, получимъ $[vv]$:

Приемъ	v_1^2	v_2^2	v_3^2	v_4^2	v_5^2	v_6^2
I	0	6,25	6,25	25,0	6,25	14,44
II	0	56,25	6,25	25,0	6,25	38,44
III	0	6,25	6,25	25,0	6,25	1,44
IV	0	56,25	6,25	25,0	6,25	14,44
Сумма	0	126,00	25,00	100,0	25,00	68,76

Сумма = $[vv] = \underline{\underline{344,76}}$

Въ данномъ случаѣ $s=6$ и $G=4$, ибо съ точки стоянія А визи-
рованія производились по 6 направленіямъ при каждомъ изъ 4 пріе-
мовъ; слѣдовательно:

$$\frac{1}{s} \left[[v] \cdot [v] \right] = \frac{1468,76}{6} = 244,80$$

$$[vv] = 344,76$$

$$[VV] = 99,96$$

и, наконецъ, средняя ошибка одного направленія:

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{99,96}{(6-1) \cdot (4-1)}} = \pm \underline{\underline{2'',60}}$$

а средняя ошибка одного угла, т. к. онъ складывается изъ 2 направленій
(см. примѣръ 25):

$$m_w = m_r \cdot \sqrt{2} = \pm \underline{\underline{3'',67}}.$$

ГЛАВА II.

Уравновѣшиваніе посредственныхъ наблюденій.

§ 1.

Уравненія погрѣшностей при наблюденіяхъ равнаго вѣса.

Часто случается, что m величинъ $x, y, z, \dots$ на примѣръ—коор-
динаты точекъ могутъ быть опредѣлены на практикѣ только
посредствомъ измѣренія другихъ величинъ $L_1, L_2, \dots, L_n$ (напри-
мѣръ—угловъ) находящимися въ извѣстныхъ, вообще нелинейныхъ,
зависимостяхъ съ $x, y, z, \dots$:

$$L_i = f_i(x, y, z, \dots) \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ индексъ i имѣетъ различныя значенія: $i=1, 2, 3, \dots, n$.

Если число уравненій (1), т. е. число измѣряемыхъ на практикѣ
величинъ L равно числу неизвѣстныхъ $x, y, z, \dots$, т. е. если $m=n$, то

$x, y, z \dots$ найдутся простымъ алгебраическимъ рѣшеніемъ n уравненій съ n неизвѣстными.

Если же $n > m$, то необходимо умѣть найти *наибѣрзятныя* значенія неизвѣстныхъ, истинныя же ихъ значенія никогда не могутъ быть найдены, т. е. никакими значеніями неизвѣстныхъ всѣ уравненія одновременно не могутъ быть удовлетворены, ибо измѣренія $L_1, L_2, \dots$ на практикѣ всегда заключаютъ въ себѣ ошибки $v_1, v_2, \dots, v_n$, и потому вмѣсто уравненій (1) въ дѣйствительности стараются рѣшить уравненія вида:

$$L_i + v_i = f_i(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, \dots) \dots \dots (2)$$

гдѣ $x_0, y_0, z_0 \dots$ суть *приближенныя* значенія неизвѣстныхъ $x, y, z \dots$, а $\delta x, \delta y, \delta z \dots$ суть тѣ малыя *поправки*, которыя нужно придать къ $x_0, y_0, z_0 \dots$, чтобы получить *наибѣрзятныя* значенія неизвѣстныхъ.

Разлагая (2) въ рядъ Тейлора и ограничиваясь первыми степенями малыхъ величинъ $\delta x, \delta y, \delta z \dots$, получимъ (беремъ для простоты случай только 3 неизвѣстныхъ):

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -l_1 + a_1 \delta x + b_1 \delta y + c_1 \delta z \\ v_2 &= -l_2 + a_2 \delta x + b_2 \delta y + c_2 \delta z \\ &\dots \dots \dots \\ v_n &= -l_n + a_n \delta x + b_n \delta y + c_n \delta z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ обозначено для краткости:

$$\left. \begin{aligned} -l_i &= f_i \left[x_0, y_0, z_0 \dots \right] - L_i \\ a_i &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)_0, \quad b_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y} \right)_0, \quad c_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z} \right)_0 \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

т. е. всѣ $a_i, b_i, c_i \dots$ суть значенія частныхъ производныхъ данныхъ функций при подстановкѣ въ нихъ приближенныхъ значеній неизвѣстныхъ $x_0, y_0, z_0 \dots$. Уравненія (3) суть приведенныя къ линейной формѣ *уравненія погрѣшностей*.

§ 2.

Составленіе нормальныхъ уравненій при наблюденіяхъ равнаго вѣса.

Способъ наименьшихъ квадратовъ требуетъ, чтобы:

$$[vv] = \text{minimum},$$

при чемъ должны имѣть мѣсто равенства:

$$[a.v] = 0, \quad [b.v] = 0, \quad [c.v] = 0,$$

а также частныя производныя должны обращаться въ нуль:

$$\frac{\partial [v.v]}{\partial \delta x} = 0; \quad \frac{\partial [v.v]}{\partial \delta y}, \quad \frac{\partial [v.v]}{\partial \delta z} = 0. \quad (5)$$

Выполнивъ дифференцированіе (5), мы получимъ „нормальныя уравненія“, число которыхъ уже равно числу неизвѣстныхъ:

$$\left. \begin{aligned} [aa]\delta x + [ab]\delta y + [ac]\delta z - [al] &= 0 \\ [ab]\delta x + [bb]\delta y + [bc]\delta z - [bl] &= 0 \\ [ac]\delta x + [bc]\delta y + [cc]\delta z - [cl] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Изъ этихъ уравненій и опредѣляются поправки δx , δy , δz .

Для контроля правильности вычисленій коэффициентовъ нормальныхъ уравненій вводятъ обозначенія суммъ:

$$a_i + b_i + c_i = s_i$$

тогда сумма уравненій (6) должна быть тождественна съ уравненіемъ:

$$[as].\delta x + [bs]\delta y + [cs]\delta z - [ls] = 0 \quad (6')$$

§ 3.

Рѣшеніе нормальныхъ уравненій при наблюденіяхъ равнаго вѣса.

Трудность рѣшенія уравненій (6) состоитъ только въ сложности числовыхъ выкладокъ; Гауссъ предложилъ способъ послѣдовательнаго исключенія неизвѣстныхъ, которое производится по схемѣ въ видѣ таблицъ (см. § 8, а также примѣръ ориентированія по шахт-

*) См. гл. I, § 2.

нымъ отвѣсамъ и др.). Исключая 1 неизвѣстное, напр. δx , изъ (6) по общему правилу алгебры, мы получимъ „разъ приведенныя“ нормальныя уравненія:

$$\left. \begin{aligned} [bb.1] \delta y + [bc.1] \delta z - [bl.1] &= 0 \\ [bc.1] \delta y + [cc.1] \delta z - [cl.1] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

и контрольное равенство:

$$[bs.1] \delta y + [cs.1] \delta z - [ls.1] = 0. \dots \dots \dots (7')$$

т. е. сумма уравненій (7) должна быть тождественна съ (7'), гдѣ для краткости введены Гауссомъ обозначенія:

$$\left. \begin{aligned} [bb.1] &= [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab] \\ [bc.1] &= [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ac] \\ [cc.1] &= [cc] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [ac] \\ [bl.1] &= [bl] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab] \\ [cl.1] &= [cl] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [al] \\ [bs.1] &= [bs] - \frac{[as]}{[aa]} \cdot [ab] \\ [cs.1] &= [cs] - \frac{[as]}{[aa]} \cdot [ac] \\ [ls.1] &= [ls] - \frac{[as]}{[aa]} \cdot [al] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Исключая δy изъ (7), получимъ:

$$[cc.2] \delta z - [cl.2] = 0 \dots \dots \dots (9)$$

и для контроля:

$$[cs.2] \delta z - [ls.2] = 0 \dots \dots \dots (9')$$

гдѣ для краткости обозначены:

$$\left. \begin{aligned} [cc.2] &= [cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot [bc.1] \\ [cs.2] &= [cs.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]} \cdot [bc.1] \\ [cl.2] &= [cl.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot [bl.1] \\ [ls.2] &= [ls.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]} \cdot [bl.1] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Изъ (9), (7) и (6) обратной подстановкой неизвѣстныхъ находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \delta z &= \frac{[cl.2]}{[cc.2]} \\ \delta y &= \frac{[bl.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \delta z \\ \delta x &= \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} \delta y - \frac{[ac]}{[aa]} \delta z \end{aligned} \right\} (11)$$

Если при этомъ контрольное равенство (6') удовлетворяется, то нормальныя уравненія были рѣшены вѣрно.

Искомыя наивѣроятныя значенія неизвѣстныхъ будутъ:

$$x = x_0 + \delta x$$

$$y = y_0 + \delta y$$

$$z = z_0 + \delta z$$

§ 4.

Опредѣленіе вѣсовъ найденныхъ наивѣроятныхъ значеній x, y, z .

Замѣнивъ въ (6) постоянныя члены соответственно: сперва — черезъ 1, 0, 0, потомъ черезъ 0, 1, 0, наконецъ — черезъ 0, 0, 1, мы получимъ систему уравненій, конечно, съ новыми неизвѣстными: *)

$$\left. \begin{aligned} [aa] \xi_1' + [ab] \xi_1'' + [ac] \xi_1''' &= 1 \\ [ab] \xi_1' + [bb] \xi_1'' + [bc] \xi_1''' &= 0 \\ [ac] \xi_1' + [bc] \xi_1'' + [cc] \xi_1''' &= 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} [aa] \xi_2' + [ab] \xi_2'' + [ac] \xi_2''' &= 0 \\ [ab] \xi_2' + [bb] \xi_2'' + [bc] \xi_2''' &= 1 \\ [ac] \xi_2' + [bc] \xi_2'' + [cc] \xi_2''' &= 0 \end{aligned} \right\} (13)$$

*) Объясненіе см. въ любомъ учебникѣ способа наименьшихъ квадратовъ.

$$\left. \begin{aligned} [aa] \xi'_3 + [ab] \xi''_3 + [ac] \xi'''_3 &= 0 \\ [ab] \xi'_3 + [bb] \xi''_3 + [bc] \xi'''_3 &= 0 \\ [ac] \xi'_3 + [bb] \xi''_3 + [cc] \xi'''_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Опредѣливъ изъ этихъ уравненій (рѣшеніе которыхъ также производится по схемѣ Гаусса) только 3 неизвѣстныхъ: ξ'_1 , ξ''_2 и ξ'''_3 , мы получимъ всѣ найденныхъ поправокъ δx , δy , δz , или что все равно, всѣ наивѣроятныхъ значеній x , y , z , ибо ξ'_3 , ξ''_3 и ξ'''_3 *обратны* *всѣмъ*. Такъ какъ $\xi''_1 = \xi'_2$, $\xi'''_1 = \xi'_3$, $\xi''_2 = \xi'''_3$, то (13) и (14) сводятся (по исключеніи изъ нихъ ξ'_2 , ξ'_3 и ξ'''_3) къ:

$$\left. \begin{aligned} [bb.1] \xi''_2 + [bc.1] \xi'''_2 &= 1 \\ [bc.1] \xi''_2 + [cc.1] \xi'''_2 &= 0 \\ [cc.2] \xi'''_3 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Отсюда опредѣляемъ ξ'''_3 и ξ'_2 , а изъ (12) — ξ'_1 .

§ 5.

Среднія ошибки найденныхъ наивѣроятныхъ значеній x , y , z
(или δx , δy , δz).

Сперва вычисляемъ сумму квадратовъ $[vv]$ по формулѣ:

$$[vv] = [III] - \frac{[a1]^2}{[aa]} - \frac{[b1.1]^2}{[bb.1]} - \frac{[c1.2]^2}{[cc.2]} \quad (16)$$

Тогда средняя ошибка одного наблюденія:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}} \quad (17)$$

гдѣ n = число уравненій, m = число неизвѣстныхъ.

Послѣ этого вычисляемъ среднія ошибки наивѣроятныхъ значеній x , y , z :

$$\left. \begin{aligned} \mu_x &= \pm \mu \cdot \sqrt{\xi'_1} \\ \mu_y &= \pm \mu \cdot \sqrt{\xi''_2} \\ \mu_z &= \pm \mu \cdot \sqrt{\xi'''_3} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Примѣчаніе 1.

Если бы уравненія (3) имѣли только 2 неизвѣстныхъ, то, какъ легко убѣдиться, вмѣсто равенствъ (15) будутъ:

$$\xi''_2 = \frac{1}{[bb.1]}; \quad \xi'_1 = \frac{[bb]}{[aa]} \xi''_2 \quad (19)$$

§ 6.

Особый случай уравнений погрѣшностей.

Если одно изъ неизвѣстныхъ, напр. δz , имѣетъ во всѣхъ уравненіяхъ погрѣшностей (3) коэффициенты $c_i = 1$, то практически сразу исключить это неизвѣстное при помощи послѣдняго изъ уравненій (6); тогда получимъ „приведенныя“ уравненія погрѣшностей вида:

$$v_i = - \left(l_i - c_i \frac{[cl]}{[cc]} \right) + \left(a_i - c_i \frac{[ac]}{[cc]} \right) \delta x + \left(b_i - c_i \frac{[bc]}{[cc]} \right) \delta y \dots \dots (20)$$

или, полагая $c_i = 1$:

$$v_i = - \left(l_i - \frac{[l]}{n} \right) + \left(a_i - \frac{[a]}{n} \right) \delta x + \left(b_i - \frac{[b]}{n} \right) \delta y \dots \dots (21)$$

Обозначивъ здѣсь для краткости:

$$\frac{[l]}{n} = l_0, \quad \frac{[a]}{n} = a_0, \quad \frac{[b]}{n} = b_0; \dots \dots (22)$$

$$l_i - l_0 = L_i; \quad a_i - a_0 = A_i; \quad b_i - b_0 = B_i \dots \dots (23)$$

мы получимъ приведенныя уравненія погрѣшностей въ видѣ:

$$v_i = A_i \delta x + B_i \delta y \dots \dots (24)$$

изъ которыхъ по общему правилу образуемъ приведенныя нормальныя уравненія:

$$\left. \begin{aligned} [AA] \delta x + [AB] \delta y - AL &= 0 \\ [AB] \delta x + [BB] \delta y - BL &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (25)$$

и отсюда окончательно находимъ:

$$\delta x = \frac{[AL.1]}{[AA.1]}, \quad \delta y = \frac{[BL.1]}{[AA.1]} \dots \dots (26)$$

гдѣ:

$$\left. \begin{aligned} [AA.1] &= [AA] - \frac{[AB]}{[BB]} \cdot [AB] \\ [AL.1] &= [AL] - \frac{[AB]}{[BB]} \cdot [BL] \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} [BB.1] &= [BB] - \frac{[AB]}{[AA]} \cdot [AB] \\ [BL.1] &= [BL] - \frac{[AB]}{[AA]} \cdot [AL] \end{aligned} \right\} \dots \dots (27)$$

Чтобы найти третье неизвѣстное δz , мы сложимъ вмѣстѣ всѣ уравненія (3), гдѣ всѣ $c_i = 1$, и раздѣлимъ результатъ на n ; тогда получимъ:

$$[v] = 0 = z + \frac{[a]}{n} \delta x + \frac{[b]}{n} \delta y - \frac{[l]}{n}$$

или:

$$z = \frac{[1]}{n} - (a_0 \delta x + b_0 \delta y) \dots \dots \dots (28)$$

Средняя ошибка одного наблюдения:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}} \dots \dots \dots (29)$$

Среднія ошибки δx и δy :

$$\mu_x = \pm \frac{\mu}{\sqrt{[BB.1]}}; \quad \mu_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{[AA.1]}} \dots \dots \dots (30)$$

Всѣ эти формулы примѣнены въ задачѣ объ опредѣленіи найвѣроятныхъ координатъ точки при помощи обратной засѣчки (см. ниже) на нѣсколько (>3) данныхъ пунктовъ.

§ 7.

Уравниовѣшиваніе посредственныхъ наблюдений неравнаго вѣса.

Если посредственные наблюдения $L_1, L_2 \dots L_n$ — неравнаго вѣса, то „уравненія погрѣшностей“ (3) также будутъ имѣть разные вѣса: $p_1, p_2 \dots p_n$. Разсматривая же вѣсъ величины A , какъ число отдѣльныхъ частныхъ равновѣсныхъ наблюдений, изъ которыхъ полученъ результатъ $=A$, и зная, что точность результата пропорціональна корню квадратному изъ числа равновѣсныхъ наблюдений, мы видимъ, что стоитъ только умножить (3) соотвѣтственно на $\sqrt{p_1} \sqrt{p_2} \dots \sqrt{p_n}$, чтобы свести случай неравновѣсныхъ наблюдений къ равновѣснымъ. Тогда нормальныя уравненія и контролирующая ихъ формула суммы будутъ (для 3-хъ неизвѣстныхъ):

$$\left. \begin{aligned} [aap] \delta x + [abp] \delta y + [acp] \delta z - [alp] &= 0 \\ [bap] \delta x + [bbp] \delta y + [bcp] \delta z - [blp] &= 0 \\ [asp] \delta x + [bsp] \delta y + [csp] \delta z - [clp] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

$$[asp] \delta x + [bsp] \delta y + [csp] \delta z - [lsp] = 0 \dots \dots \dots (31')$$

Дальнѣйшее рѣшеніе—буквально по предыдущему.

Здѣсь:

$$[vvp] = [llp] - \frac{[alp]^2}{[aap]} - \frac{[blp.1]^2}{[bbp.1]} - \frac{[clp.2]^2}{[ccp.2]} \dots \dots \dots (32)$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vvp]}{n-m}} \dots \dots \dots (33)$$

$$\mu_x = \pm \mu \sqrt{\xi''_1}; \quad \mu_y = \pm \mu \sqrt{\xi''_2}; \quad \mu_z = \pm \mu \sqrt{\xi'''_3} \dots \dots \dots (34)$$

§ 8.

Схема рѣшенія нормальныхъ уравненій (6) для случая 3-хъ неизвѣстныхъ.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ при рѣшеніи нормальныхъ уравненій нужно вмѣсто буквенныхъ символовъ [по формуламъ (6') до (15)] подставить соотвѣтствующія числовыя ихъ значенія. Сперва опредѣляется δz , потомъ δy , наконецъ δx :

	№ уравненія	Коэффициенты при			Свободн. членъ	
		δx	δy	δz		
A	I	[aa]	[ab]	[ac]	— [al]	[al]
	II	[ab]	$-\frac{[bb]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[bc]}{[aa]}[ac]$	$+\frac{[ab]}{[aa]}[al]$	— [ac] . δx
	III	[ac]	[bc]	$-\frac{[cc]}{[aa]}[ac]$	$+\frac{[ac]}{[aa]}[al]$	— [ab] . δy
		[as]	$-\frac{[bs]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[cs]}{[aa]}[ac]$	$+\frac{[as]}{[aa]}[al]$	
B	I'		[bb . 1]	[bc . 1]	— [bl . 1]	$\frac{[bl . 1]}{[bc . 1] . \delta z}$
	II'		[bc . 1]	$-\frac{[cc . 1]}{[bb . 1]}[bc . 1]$	$+\frac{[cl . 1]}{[bb . 1]}[bb . 1]$	Сумма
			[bs . 1]	$-\frac{[cs . 1]}{[bb . 1]}[bc . 1]$	$+\frac{[ls . 1]}{[bb . 1]}[bl . 1]$	$\frac{\delta y}{\xi''_1 \xi''_2}$
C	I''			[cc . 2]	— [cl . 2]	δz
				[cs . 2]	— [ls . 2]	$\frac{\xi'''_1}{\xi'''_2 \xi'''_3}$

Изъ (С) мы получаемъ δz ; изъ (В) вычисляемъ δy , а изъ (А)— δx , послѣ чего по (17) и (18) вычисляемъ μ , μx , μy , μz .

Примѣръ 44.

Найти наибѣроятныя значенія 3 неизвѣстныхъ x , y и z , если для опредѣленія ихъ имѣется 5 уравненій, составленныхъ на основаніи наблюденій равнаго вѣса:

$$1) x - y + z - 8,9 = 0$$

$$2) 2x + y - z + 4,6 = 0$$

$$3) 3x + 2y + 2z - 26,7 = 0$$

$$4) x + y + z - 13,1 = 0$$

$$5) x + 3y - 4z + 30,3 = 0$$

Опредѣливъ 3 неизвѣстныхъ изъ какихъ-нибудь 3 изъ данныхъ 5 уравненій и подставивъ результаты въ любое изъ послѣднихъ, мы увидимъ, что они не удовлетворятся и найти такихъ значеній x , y , z , при которыхъ всѣ данныя уравненія удовлетворились бы, невозможно; можно опредѣлить только ихъ наибѣроятныя значенія.

Для этого мы должны составить нормальныя уравненія, корни которыхъ и будутъ наибѣроятными значеніями неизвѣстныхъ. Выписываемъ коэффициенты данныхъ уравненій и составляемъ по нимъ коэффициенты ур. (6) и (6'):

№ уравн.	a	b	c	l	s	as	bs	cs	ls
1	+1	-1	+1	+8,9	+1	+1	-1	+1	+8,9
2	+2	+1	-1	-4,6	+2	+4	+2	-2	-9,2
3	+3	+2	+2	+26,7	+7	+21	+14	+14	+186,9
4	+1	+1	+1	+13,1	+3	+3	+3	+3	+39,3
5	+1	+3	-4	-30,3	0	0	0	0	0
						+29 = =[as]	+18 = =[bs]	+16 = =[cs]	+225,9 = =[ls]

№ уравн.	aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl
1	+1	-1	+1	+8,9	+1	-1	-8,9	+1	+8,9
2	+4	+2	-2	-9,2	+1	-1	-4,6	+1	+4,6
3	+9	+6	+6	+80,1	+4	+4	+53,4	+4	+53,4
4	+1	+1	+1	+13,1	+1	+1	+13,1	+1	+13,1
5	+1	+3	-4	-30,3	+9	-12	-90,9	+16	+121,2
Сумма	+16= =[aa]	+11= =[ab]	+2= =[ac]	+62,6= =[al]	+16= =[bb]	-9= =[bc]	-37,9= =[bl]	+23= =[cc]	+201,2= =[cl]

Слѣдовательно, нормальныя уравненія будутъ:

$$16.x + 11.y + 2.z - 62,6 = 0$$

$$11.x + 16.y - 9.z + 37,9 = 0$$

$$2.x - 9.y + 23.z - 201,2 = 0$$

$$\text{Сумма: } 29.x + 18.y + 16.z - 225,9 = 0$$

Контрольное равенство (6'), для котораго беремъ коэффициенты изъ только что приведенныхъ таблицъ:

$$29x + 18y + 16z - 225,9 = 0 \dots \dots \dots \text{вѣрно!}$$

Рѣшая нормальныя уравненія обычнымъ способомъ, мы получимъ, умножая (3) на 8 и вычитая изъ (1):

$$83y - 182z + 1547,0 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

умножая-же (2) на 2, а третье на 11 и вычитывая, получимъ:

$$1349.z = 12670$$

откуда искомое наивѣроятное значеніе z будетъ:

$$\underline{\underline{z = 9,39}}$$

Подставляя это значеніе въ (5), найдемъ:

$$\underline{y=1,95}$$

и наконецъ:

$$\underline{x=1,38.}$$

Отсюда мы видимъ, что даже при самыхъ простыхъ коэффициентахъ въ данныхъ уравненіяхъ, вычисленія наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ сопровождается весьма утомительными выкладками; если-же, какъ обыкновенно бываетъ при геодезическихъ и маркшейдерскихъ работахъ, эти коэффициенты представлены многозначными числами, то рѣшеніе нормальныхъ уравненій обычнымъ алгебраическимъ способомъ было-бы чрезвычайно утомительно. Вотъ почему Гауссъ и предложилъ свой способъ исключенія неизвѣстныхъ, изложенный выше и который мы пояснимъ на нижеслѣдующемъ примѣрѣ; здѣсь же мы покажемъ практически еще способъ опредѣленія *вѣсовъ* полученныхъ наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ. Для опредѣленія вѣса величины x нужно замѣнить свободные члены нормальныхъ уравненій $[a]$, $[b]$, $[c]$, а y насъ—числа:

$$+62,6 ; -37,9 ; +201,2$$

соотвѣтственно черезъ

$$1 ; 0 ; 0,$$

такъ что получимъ новыя уравненія (конечно, съ новыми неизвѣстными):

$$16\xi'_1 + 11\xi''_1 + 2\xi'''_1 - 1 = 0$$

$$11\xi'_1 + 16\xi''_1 - 9\xi'''_1 = 0$$

$$2\xi'_1 - 9\xi''_1 + 23\xi'''_1 = 0$$

Отсюда мы находимъ величину, обратную вѣсу x :

$$(\xi'''_1 = \infty 0,1; \xi''_1 = \infty 0,22); \xi'_1 = \frac{1}{p_x} = \infty \frac{3}{10}$$

слѣдовательно вѣсъ величины x равенъ:

$$p_x = \frac{10}{3} = \infty 3,3.$$

Для нахождения вѣса величины y , мы должны замѣнить свободные члены нормальныхъ уравненій соотвѣтственно черезъ:

$$0, \quad 1, \quad 0$$

и рѣшить относительно ξ''_2 систему уравненій:

$$16\xi'_2 + 11\xi''_2 + 2\xi'''_2 = 0$$

$$11\xi'_2 + 16\xi''_2 - 9\xi'''_2 = 1$$

$$2\xi'_2 - 9\xi''_2 + 23\xi'''_2 = 0$$

отсюда мы найдемъ

$$(\xi'''_2 = \infty 0,125) \quad \xi''_2 = \infty \frac{28}{100} = \frac{1}{p_y}$$

а слѣдовательно вѣсь величины у

$$p_y = \frac{100}{28} = \infty 3,6$$

Наконецъ, подставляя

$$0, 0, 1$$

и рѣшая систему уравненій

$$16\xi'_3 + 11\xi''_3 + 2\xi'''_3 = 0$$

$$11\xi'_3 + 16\xi''_3 - 9\xi'''_3 = 0$$

$$2\xi'_3 - 9\xi''_3 + 23\xi'''_3 = 1$$

найдемъ

$$\xi'''_3 = \infty \frac{78}{100}$$

слѣдовательно, вѣсь величины z равенъ

$$p_z = \frac{100}{78} = \infty 1,28$$

[тѣ же величины ξ_i быстрѣе опредѣлились бы по ур. (15)].

Теперь найдемъ *среднюю ошибку одного наблюденія*:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}}$$

гдѣ

n = числу данныхъ уравненій, т. е. у насъ $n=5$

m = числу неизвѣстныхъ; у насъ $m=3$

v = результатъ подстановки въ каждое изъ данныхъ уравненій наивѣроятныхъ значений неизвѣстныхъ.

Подставляя вышенайденныя наивѣроятныя значенія неизвѣстныхъ въ данныя 5 уравненій, мы получимъ слѣдующія величины v и v^2 :

№ уравненія	v	v^2
1	—0,09	0,0081
2	—0,10	0,0100
3	+0,09	0,0081
4	—0,39	0,1521
5	+0,31	0,0961
Сумма= $[vv]=0,2744$		

Слѣдовательно средняя ошибка одного наблюденія:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{0,2744}{5-3}} = \pm 0,37$$

Наконецъ, найдемъ и среднія ошибки вышенайденныхъ наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ по формуламъ:

$$\mu_x = \pm \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm \frac{0,37}{\sqrt{3,3}} = \pm \infty 0,2$$

$$\mu_y = \pm \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm \frac{0,37}{\sqrt{3,6}} = \pm \infty 0,2$$

$$\mu_z = \pm \frac{m}{\sqrt{p_z}} = \pm \frac{0,37}{\sqrt{1,3}} = \pm \infty 0,3$$

Примѣръ 45.

Покажемъ теперь практически способъ нахождения наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ, пользуясь формулами исключенія неизвѣстныхъ, данными Гауссомъ и выше уже приведенными; при этомъ возьмемъ случай наблюденій *не равнаго вѣса*.

Возьмемъ систему 5 уравненій съ 3 неизвѣстными:

	Вѣса.	Пропорц. числа
1) $0,25x - 0,25y - 0,25z - 2,225 = 0$	16	64
2) $2,00x + 1,00y - 1,00z + 4,600 = 0$	1	4
3) $2,00x + 1,33y - 1,(3)z - 17,800 = 0$	$2\frac{1}{4}$	9
4) $1,00x + 1,00y + 1,00z - 13,100 = 0$	1	4
5) $0,50x + 1,50y - 2,00z + 15,150 = 0$	4	16

Умноживъ всѣ числа вѣсовъ на 4, т. е. на такое число, чтобы всѣ вѣса стали цѣлыми числами, мы говоримъ: числа вѣсовъ равносильны тому, что первое уравненіе составлено на основаніи 64 наблюдений равнаго вѣса, второе на основаніи 4 наблюдений такого же вѣса и т. д., а такъ какъ точность результата многихъ измѣреній одной и той же величины пропорціональна корню квадратному изъ числа ея измѣреній, то чтобы привести систему данныхъ уравненій разнаго вѣса къ системѣ уравненій одинаковаго вѣса, мы должны каждое изъ нихъ помножить на корень квадратный изъ его вѣса; послѣ этого получимъ:

$$1) \quad x - y + z - 8,9 = 0$$

$$2) \quad 2x + y - z + 4,6 = 0$$

$$3) \quad 3x + 2y + 2z - 26,7 = 0$$

$$4) \quad x + y + z - 13,1 = 0$$

$$5) \quad x + 3y - 4z + 30,3 = 0$$

Выписываемъ коэффициенты этихъ уравненій и составляемъ по нимъ коэффициенты нормальныхъ уравненій въ видѣ слѣдующихъ таблицъ:

Урав- ненія.	a	b	c	l	s	as	bs	cs	ls
1	+1	-1	+1	+ 8,9	+1	+ 1	- 1	+ 1	+ 8,9
2	+2	+1	-1	- 4,6	+2	+ 4	+ 2	- 2	- 9,2
3	+3	+2	+2	+26,7	+7	+21	+14	+14	+186,9
4	+1	+1	+1	+13,1	+3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 39,3
5	+1	+3	-4	-30,3	0	0	0	0	0
+29=[as] +18=[bs] +16=[cs] +225,9=[ls]									

Урав- ненія.	aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl
1	+1	-1	+1	+ 8,9	+1	- 1	- 8,9	+ 1	+ 8,9
2	+4	+2	-2	- 9,2	+1	- 1	- 4,6	+ 1	+ 4,6
3	+9	+6	+6	+80,1	+4	+ 4	+53,4	+ 4	+ 53,4
4	+1	+1	+1	+13,1	+1	+ 1	+13,1	+ 1	+ 13,1
5	+1	+3	-4	-30,3	+9	-12	-90,9	+16	+121,2
	+16= =[aa]	+11= =[ab]	+2= =[ac]	+62,6= =[al]	+16= =[bb]	-9= =[bc]	-37,9= =[bl]	+23= =[cc]	+201,2= =[cl]

Такъ что нормальныя уравненія будутъ:

$$16x + 11y + 2z - 62,6 = 0$$

$$11x + 16y - 9z + 37,9 = 0$$

$$2x - 9y + 23z - 201,2 = 0$$

$$\text{Контроль: } 29x + 18y + 16z - 225,9 = 0 \dots \text{вѣрно!}$$

Рѣшимъ ихъ по формуламъ § 3, для чего составляемъ производныя коэффициенты:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab] = + 16 - \frac{11}{16} \cdot 11 = + 8,44$$

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ac] = - 9 - \frac{11}{16} \cdot 2 = - 10,375$$

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [al] = - 37,9 - \frac{11}{16} \cdot 62,6 = - 80,94$$

$$[cc.1] = [cc] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [ac] = + 23,0 - \frac{2}{16} \cdot 2 = + 22,75$$

$$[cl.1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot [al] = + 201,2 - \frac{2}{16} \cdot 62,6 = + 193,38$$

И для контроля по (7'):

$$[bs.1] = [bs] - \frac{[as]}{[aa]} \cdot [ab] = + 18 - \frac{29}{16} \cdot 11 = - 1,935$$

$$[cs.1] = [cs] - \frac{[as]}{[aa]} \cdot [ac] = + 16 - \frac{29}{16} \cdot 2 = + 12,375$$

$$[ls.1] = [ls] - \frac{[as]}{[aa]} \cdot [al] = + 225,9 - \frac{29}{16} \cdot 62,6 = - 112,44$$

такъ что послѣ исключенія перваго неизвѣстнаго x , мы получимъ два „приведенныхъ“ нормальныхъ уравненія:

$$8,44 y - 10,375 z + 80,94 = 0$$

$$-10,375 y + 22,75 z - 193,38 = 0$$

$$\text{Контроль: } -1,935 y + 12,375 z - 112,44 = 0 \dots \text{вѣрно!}$$

Для исключенія отсюда y , вычисляемъ коэффициенты:

$$[cc.2] = [cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot [bc.1] = +22,75 - \frac{10,375}{8,44} \cdot 10,375 = +10,0$$

$$[cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot [bl.1] = +193,38 - \frac{10,375}{8,44} \cdot 80,94 = +93,87$$

и для контроля по (9')

$$\left. \begin{aligned} [cs.2] &= [cs.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]} \cdot [bc.1] = +12,375 - \frac{1,935}{8,44} \cdot 10,375 = +10,0 \\ [ls.2] &= [ls.1] - \frac{[bs.1]}{[bb.1]} \cdot [bl.1] = -112,44 - \frac{1,935}{8,44} \cdot 80,94 = +93,87 \end{aligned} \right\} \text{ верно!}$$

и слѣдовательно наивѣроятныя значенія будутъ:

$$z = \frac{[cl.2]}{[cc.2]} = \frac{93,87}{10,0} = \underline{\underline{9,39}}$$

дальше:

$$y = \frac{[bl.1]}{[bb.1]} = \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot z = \left(\frac{-80,90}{+8,44} \right) - \left(\frac{-10,375}{+8,44} \right) \cdot 9,39 = \underline{\underline{1,95}}$$

наконецъ:

$$x = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot y - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot z = \left(\frac{+62,6}{+16} \right) - \left(\frac{+11}{+16} \right) \cdot 1,95 - \left(\frac{+2}{+16} \right) \cdot 9,39 = \underline{\underline{1,39}}$$

Подстановка этихъ значеній въ любое изъ нормальныхъ уравненій удовлетворяетъ ихъ, и потому вычисленіе сдѣлано правильно. Ниже, въ примѣрахъ рѣшенія по способу наименьшихъ квадратовъ различныхъ маркшейдерскихъ задачъ, читатели могутъ, ознакомившись съ только что данными объясненіями, легко разобратъся въ приводимыхъ тамъ вычисленіяхъ при помощи табличной формы ихъ (см. задачу о шахтныхъ отвѣсахъ, о встрѣчныхъ забояхъ и др.).

Примѣръ 46.

Если бы намъ были даны нелинейныя уравненія равнаго вѣса, на примѣръ:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 5 &= 0 = f_1^*); \quad L_1 = +5 \\ 2x - y^2 + 2,21 &= 0 = f_2^*); \quad L_2 = -2,21 \\ 3x^2 + y - 6,52 &= 0 = f_3^*); \quad L_3 = +6,52 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{свободные чле-} \\ \text{ны данныхъ} \\ \text{уравненій} \\ \text{[ср. § 1, ур. (3)]} \end{array}$$

*) f_1, f_2, f_3 обозначаютъ лѣвыя части данныхъ уравненій безъ свободного члена.

при чемъ найдены приближенныя значенія неизвѣстныхъ:

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 2$$

то, чтобы найти наивѣроятныя ихъ значенія, составляемъ коэффициенты „уравненій погрѣшностей“:

$$\begin{array}{l|l} a_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_0 = 2x_0 = +2 & b_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)_0 = 2y_0 = +4 \\ a_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_0 = +2 & b_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)_0 = -2y_0 = -4 \\ a_3 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} \right)_0 = 6x_0 = +6 & b_3 = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} \right)_0 = +1 \end{array}$$

$$l_1 = L_1 - f_1 \left(x_0, y_0, z_0 \right) = 0$$

$$l_2 = L_2 - f_2 \left(x_0, y_0, z_0 \right) = -0,21$$

$$l_3 = L_3 - f_3 \left(x_0, y_0, z_0 \right) = +1,52$$

такъ что уравненія погрѣшностей будутъ:

$$v_1 = 2. \delta x + 4 \delta y - 0$$

$$v_2 = 2. \delta x - 4. \delta y + 0,21$$

$$v_3 = 6. \delta x + 1. \delta y - 1,52$$

По нимъ составляемъ коэффициенты нормальныхъ и контрольнаго уравненій:

Уравн.	a	b	aa	ab	bb	l	al	bl	s	as	bs	ls
1	+2	+4	+4	+8	+16	+0	+0	+0	+6	+12	+24	0
2	+2	-4	+4	-8	+16	-0,21	-0,42	+0,84	-2	-4	+8	+0,42
3	+6	+1	+36	+6	+1	+1,52	+9,12	+1,52	+7	+42	+7	+10,64
			+44=	+6=	+33=		+8,7=	+2,36=		+50=	+39=	+11,06
			= [aa]	= [ab]	= [bb]		= [al]	= [bl]		= [as]	= [bs]	= [ls]

слѣдовательно нормальныя уравненія будутъ:

$$44.\delta x + 6.\delta y - 8,7 = 0$$

$$6.\delta x + 33.\delta y - 2,36 = 0$$

$$\text{Контроль: } 50.\delta x + 39.\delta y - 11,06 = 0 \text{ — вѣрно!}$$

Для рѣшенія ихъ составляютъ коэффициенты:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] = +33 - \frac{6}{44} \cdot 6 = +32,18$$

$$[bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]} [al] = +2,36 - \frac{6}{44} \cdot 8,7 = +1,18.$$

и для контроля:

$$[bs.1] = [bs] - \frac{[as]}{[aa]} [ab] = +39 - \frac{50}{44} \cdot 6 = +32,18$$

$$[ls.1] = [ls] - \frac{[as]}{[aa]} [al] = +11,06 - \frac{50}{44} \cdot 8,7 = +1,18.$$

Слѣдовательно

$$\delta y = \frac{[bl.1]}{[bb.1]} = + \frac{1,18}{32,18} = +0,037 = \underline{\underline{0,04}}$$

потомъ найдемъ:

$$\delta x = \frac{[al]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot \delta y = + \frac{8,7}{44} - \frac{6}{44} \cdot 0,037 = + \underline{\underline{0,19}}$$

$$\delta x = +0,19.$$

а наивѣроятныя значенія неизвѣстныхъ:

$$x = x_0 + \delta x = 1 + 0,19 = \underline{\underline{1,19}}$$

$$y = y_0 + \delta y = 2 + 0,04 = \underline{\underline{2,04}}$$

Примѣръ 47.

Съ точки стоянія *s* измѣрено 6 угловъ *) съ равнымъ вѣсомъ:

$$s_1 = ASB = 44^\circ 3' 14'',5$$

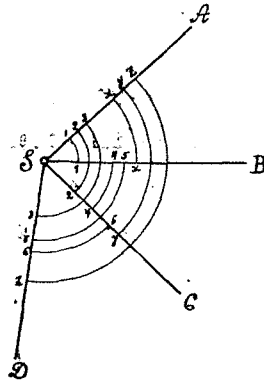
$$s_2 = ASC = 87^\circ 17' 31'',0$$

$$s_3 = ASD = 140^\circ 51' 5'',0$$

$$s_4 = BSC = 43^\circ 14' 20'',0$$

$$s_5 = BSD = 96^\circ 47' 53'',0$$

$$s_6 = CSD = 53^\circ 33' 33'',5$$



Черт. 1.

Предполагая, что дальнѣйшая цѣль этихъ измѣреній—служить средствомъ для вычисленія по нимъ и по даннымъ координатамъ точекъ *A*, *B*, *C* и *D* нѣкоторыхъ длинъ, найти ихъ наивѣроятныя значенія?

Такъ какъ первые 3 угла вполне опредѣляютъ 4 направленія, то остальные 3 угла—избыточны. Разсматривая первые какъ неизвѣстные, назовемъ ихъ черезъ *x*, *y* и *z*, т. е. пусть съ поправками:

$$v_1 + s_1 = x = 44^\circ 3' 14'',5 + \delta x$$

$$v_2 + s_2 = y = 87^\circ 17' 31'',0 + \delta y$$

$$v_3 + s_3 = z = 140^\circ 51' 5'',0 + \delta z$$

Тогда (по черт. 1-му):

$$v_4 + s_4 = x + y = 43^\circ 14' 16'',5 - \delta x + \delta y$$

$$v_5 + s_5 = x + z = 95^\circ 47' 50'',5 - \delta x + \delta z$$

$$v_6 + s_6 = y + z = 53^\circ 33' 34'',0 - \delta y + \delta z$$

Слѣдовательно уравненія погрѣшностей будутъ:

$$v_1 = (44^\circ 3' 14'',5 + \delta x) - 44^\circ 3' 14'',5 = +\delta x$$

$$v_2 = (87^\circ 17' 31'',5 + \delta y) - 87^\circ 17' 31'',5 = +\delta y$$

$$v_3 = (140^\circ 51' 5'',0 + \delta z) - 140^\circ 51' 5'',0 = +\delta z$$

$$v_4 = (43^\circ 14' 16'',5 - \delta x + \delta y) - 43^\circ 14' 20'',0 = -3'',5 - \delta x + \delta y$$

$$v_5 = (95^\circ 47' 50'',5 - \delta x + \delta z) - 96^\circ 47' 53'',0 = -2'',5 - \delta x + \delta z$$

$$v_6 = (53^\circ 33' 34'',0 - \delta y + \delta z) - 53^\circ 33' 33'',5 = +0'',5 - \delta y + \delta z$$

*) См. ч. 2-ю, гл. 1, § 2, примѣчаніе.

или ихъ можно написать такъ [см. (3)]:

$$v_1 = 0 + 1. \delta x + 0. \delta y + 0. \delta z$$

$$v_2 = 0 + 0. \delta x + 1. \delta y + 0. \delta z$$

$$v_3 = 0 + 0. \delta x + 0. \delta y + 1. \delta z$$

$$v_4 = -3,5 - 1. \delta x + 1. \delta y + 0. \delta z$$

$$v_5 = -2,5 - 1. \delta x + 0. \delta y + 1. \delta z$$

$$v_6 = +0,5 + 0. \delta x - 1. \delta y + 1. \delta z$$

По нимъ составляемъ коэффициенты нормальныхъ и контрольных уравнений (6):

№	a	b	c	l	s	as	bs	cs	ls
1	+1	0	0	0	+1	+1	0	0	0
2	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0
3	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0
4	-1	+1	0	+3,5	0	0	0	0	0
5	-1	0	+1	+2,5	0	0	0	0	0
6	0	-1	+1	-0,5	0	0	0	0	0
Сумма	-1= [a]	+1= [b]	+3= [c]	+5,5= [l]		+1 =[as]	+1 =[bs]	+1 =[cs]	0 =[ls]

aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl
+1	0	0	+0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	+1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	+1	0
+1	-1	0	-3,5	+1	0	+3,5	0	0
+1	0	-1	-2,5	0	0	0	+1	+2,5
0	0	0	0	+1	-1	+0,5	+1	-0,5
+3= =[aa]	-1= =[ab]	-1= =[ac]	-6= =[al]	+3= [bb]	-1= =[bc]	+4= =[bl]	+3= =[cc]	+2= =[cl]

Слѣдовательно нормальныя уравненія (6) будутъ:

$$3 \cdot \delta x - 1 \cdot \delta y - 1 \cdot \delta z + 6,0 = 0$$

$$-1 \cdot \delta x + 3 \cdot \delta y - 1 \cdot \delta z - 4,0 = 0$$

$$-1 \cdot \delta x - 1 \cdot \delta y + 3 \cdot \delta z - 2,0 = 0$$

$$\text{Сумма } 1 \cdot \delta x + 1 \cdot \delta y + 1 \cdot \delta z + 0,0 = 0 \quad . \quad . \quad \text{вѣрно!}$$

Рѣшивъ эти уравненія по (7), (7'), (8) и (9), найдемъ:

$$\delta x = -1'',5$$

$$\delta y = +1'',0$$

$$\delta z = +0'',5$$

Слѣдовательно исправленныя уравновѣшеніемъ значенія угловъ x , y , z будутъ:

$$x = 44^\circ 3' 13'',0$$

$$y = 87^\circ 17' 32'',0$$

$$z = 140^\circ 51' 5'',5$$

а исправленныя направленія:

$$(SA) = 0^\circ 0' 0'',0$$

$$(SB) = 44^\circ 3' 13'',0$$

$$(SC) = 87^\circ 17' 32'',0$$

$$(SD) = 140^\circ 51' 5'',5$$

Средняя ошибка одного измѣренія угла.

		v^2
$v_1 = \delta x$	$= -1'',5$	2,25
$v_2 = \delta y$	$= +1'',0$	1,00
$v_3 = \delta z$	$= +0'',5$	0,25
$v_4 = -3,5 - \delta x + \delta y = -1,0$		1,00
$v_5 = -2,5 - \delta x + \delta z = -0,5$		0,25
$v_6 = +0,5 - \delta y + \delta z = 0$		0,00
[vv] =		4,75

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{4,75}{6-3}} = \pm 1'',3$$

Средняя ошибка одного направленія:

$$\mu_x = \mu_y = \mu_z = \frac{\mu}{\sqrt{2}} = \pm 0'',95.$$

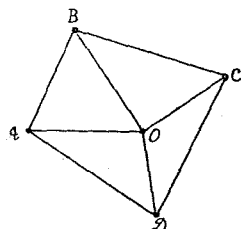
ГЛАВА III.

Уравновѣшеніе условныхъ наблюденій.

§ 1.

Уравненія коррелятъ и нормальныя уравненія въ общемъ случаѣ нелинейныхъ условныхъ уравненій.

„Условными“ называются непосредственныя наблюденія n величинъ, связанныя между собою m уравненіями, гдѣ $m < n$. Напримѣръ, если мы измѣримъ всѣ углы вокругъ точки O (черт. 2) и всѣ углы при вершинахъ A, B, C, D , то здѣсь получимъ $4 + 2 \cdot 4 = 12$ измѣренныхъ величинъ, связанныхъ условіями: 1) что сумма угловъ *) вокругъ точки O должна быть $= 360^\circ$ и 2) что сумма угловъ въ каждомъ треугольникѣ должна быть равна 180° . Истинныя значенія измѣряемыхъ величинъ: $X_1, X_2, X_3, \dots$ удовлетворяютъ условнымъ уравненіямъ:



Черт. 2.

$$\left. \begin{aligned} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ f_m(X_1, X_2, \dots, X_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Но такъ какъ при измѣреніяхъ мы всегда дѣлаемъ ошибки, то вмѣсто $X_1, X_2, \dots, X_n$ у насъ будутъ нѣкоторыя ошибочныя величины: $x_1, x_2, \dots, x_n$, при подстановкѣ которыхъ въ (1) вторыя части не будутъ равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Delta_1 \\ &\dots \dots \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \Delta_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

и поэтому является вопросъ о нахожденіи „наибѣроятныхъ“ значеній измѣренныхъ величинъ.

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ суть вѣса непосредственно наблюденныхъ величинъ, а $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$ суть тѣ поправки, которыя нужно придать къ нимъ, чтобы удовлетворились условныя уравненія, т. е. пусть

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ f_m(x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \dots, x_n + \delta x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

*) Конечно, пренебрегая кривизною земного шара.

складывая результаты съ (6') и приравнивая нулю коэффициенты при всѣхъ $d\delta x_i$, мы получимъ такъ называемыя „уравненія коррелятъ“ (вводя вѣса для обобщенія задачи):

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= \frac{a_1 k_1}{p_1} + \frac{b_1 k_2}{p_1} + \dots + \frac{m_1 k_m}{p_1} \\ \delta x_2 &= \frac{a_2 k_1}{p_2} + \frac{b_2 k_2}{p_2} + \dots + \frac{m_2 k_m}{p_2} \\ &\dots \dots \dots \\ \delta x_n &= \frac{a_n k_1}{p_n} + \frac{b_n k_2}{p_n} + \dots + \frac{m_n k_m}{p_n} \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Величины $k_1, k_2, \dots, k_p$ называются „коррелятами“. Для опредѣленія ихъ подставляютъ (7) въ (4) и получаютъ „нормальныя уравненія“:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{aa}{p} \right] k_1 + \left[\frac{ab}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{am}{p} \right] k_m + w_1 &= 0 \\ \left[\frac{ab}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bb}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{bm}{p} \right] k_m + w_2 &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \left[\frac{am}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bm}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{mm}{p} \right] k_m + w_m &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

Контроль:

$$\left[\frac{as}{p} \right] k_1 + \left[\frac{bs}{p} \right] k_2 + \dots + \left[\frac{ms}{p} \right] k_m + [w] = 0 \dots (8')$$

Способъ рѣшенія ихъ совершенно аналогиченъ выше уже поясненному способу рѣшенія нормальныхъ уравненій при посредственныхъ наблюденіяхъ. Вычисливъ корреляты изъ (8), по (7) легко найдемъ и тѣ поправки, которыя нужно придать къ приближеннымъ значеніямъ неизвѣстныхъ, чтобы получить наивѣроятныя.

Если-бы вѣса непосредственно измѣренныхъ величинъ были равны между собою, то въ (7) и (8) просто не нужно писать буквъ p . Контроль правильности вычисления всѣхъ δx производится по формулѣ:

$$[\delta x \cdot \delta x \cdot p] = -[wk] \dots \dots \dots (9')$$

Средняя ошибка одного наблюденія съ вѣсомъ 1 ед. равна:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\delta x \cdot \delta x \cdot p]}{m}} \dots \dots \dots (10)$$

мы получимъ условныя уравненія въ видѣ:

$$\left. \begin{array}{l} k_1 \quad a_1 \delta x_1 + a_2 \delta x_2 + \dots + a_n \delta x_n + v_1 = 0 \\ k_2 \quad b_1 \delta x_1 + b_2 \delta x_2 + \dots + b_n \delta x_n + w_2 = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ k_m \quad m_1 \delta x_1 + m_2 \delta x_2 + \dots + m_n \delta x_n + w_m = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Теперь, по предыдущему §, для составленія уравненій коррелятъ, мы умножаемъ коэффициенты уравненій (3) соответственно на $k_1, k_2, \dots, k_m$ и по вертикальнымъ столбцамъ составляемъ (для случая равныхъ вѣсовъ):

$$\left. \begin{array}{l} \delta x_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + \dots + m_1 k_m \\ \delta x_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + \dots + m_2 k_m \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \delta x_n = a_n k_1 + b_n k_2 + \dots + m_n k_m \end{array} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

а подставляя (4) въ (3), получимъ нормальныя уравненія:

$$\left. \begin{array}{l} [aa].k_1 + [ab].k_2 + \dots + [am].k_m + w_1 = 0 \\ [bb].k_1 + [bb].k_2 + \dots + [bm].k_m + w_2 = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ [am].k_1 + [bm].k_2 + \dots + [mm].k_m + w_m = 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Рѣшивъ (5), т. е. опредѣливъ всѣ k , мы по (4) найдемъ всѣ искомыя поправки.

Для контроля правильности вычисленія всѣхъ δx пользуемся равенствомъ:

$$[\delta x. \delta x] = -[w. k]. \dots \dots \dots (6)$$

т. е. сумма квадратовъ всѣхъ поправокъ должна быть равна суммѣ произведеній всѣхъ w соответственно на всѣ k съ обратнымъ знакомъ.

Общій контроль правильности всего уравновѣшенія состоитъ въ томъ, что исправленныя измѣренныя величины подставляютъ въ условныя уравненія: они должны тождественно удовлетворяться.

Средняя ошибка одного измѣренія равна

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\delta x. \delta x]}{m}} \dots \dots \dots (7)$$

т. е. равна корню квадратному изъ суммы квадратовъ всѣхъ поправокъ, дѣленной на число условныхъ уравненій.

О составленіи условныхъ уравненій и методѣ рѣшенія.

Разъ имѣются избыточные измѣренія, то передъ вычисленіемъ нужно прежде всего обсудить, сколькимъ независимымъ другъ отъ друга условіямъ подчиняются они и какъ эти условія выразить уравненіями.

Если n есть число всѣхъ измѣреній, а n_1 — число измѣреній необходимыхъ для рѣшенія задачи, то $m = n - n_1$ измѣреній будутъ избыточными и каждое изъ нихъ требуетъ лишняго условнаго уравненія; поэтому число условныхъ уравненій m должно быть равно числу избыточныхъ измѣреній.

Итакъ задача сводится къ тому, чтобы выбравъ n_1 (изъ всѣхъ n) независимыхъ и необходимыхъ для рѣшенія задачи наблюдений, найти соотношенія между ними и остальными ($n - n_1$) измѣреніями.

Если-бы мы ошибочно ввели въ вычисленія такое условное уравненіе, которое является простымъ слѣдствіемъ другихъ условій, то, опредѣляя коррелаты, мы получимъ для нихъ значенія ∞ (неопредѣленность).

Если какое-нибудь условіе было выражено уравненіемъ неправильно, или вовсе упущено изъ виду, то это условіе не удовлетворится окончательными результатами уравновѣшенія.

Если при рѣшеніи какой-нибудь задачи съ равнымъ правомъ могутъ быть примѣнены, какъ методъ уравновѣшенія посредственныхъ, такъ условныхъ наблюдений, то въ такомъ случаѣ избирають тотъ, при которомъ рѣшеніе нормальныхъ уравненій будетъ проще.

При n наблюденияхъ и m условіяхъ между ними нужно рѣшить:

а) при методѣ „посредственныхъ“ наблюдений ($n - m$) нормальныхъ уравненій,

в) при методѣ „условныхъ“ — m нормальныхъ уравненій.

Поэтому:

а) если $(n - m) < m$, то примѣняютъ методъ посредственныхъ наблюдений,

б) если $(n - m) > m$, то — методъ условныхъ наблюдений.

Примѣръ 48.

Въ точкѣ стоянія О (черт. 3) измѣрены съ равнымъ вѣсомъ всѣ углы между 4 направлѣніями и найдено:

$$x_1 = 24^\circ \ 9' \ 17'',5$$

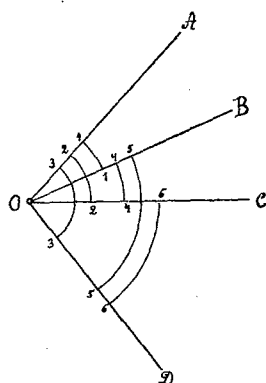
$$x_2 = 48 \ 22 \ 2,5$$

$$x_3 = 100 \ 54 \ 1,0$$

$$x_4 = 24 \ 12 \ 49,0$$

$$x_5 = 76 \ 44 \ 47,2$$

$$x_6 = 52 \ 31 \ 53,5$$



Черт. 3.

Найти ихъ наивѣроятныя значенія?

Такъ какъ для 4 направлѣній достаточно но знать только 3 угла, напр. x_1 , x_2 , x_3 , то остальные 3 измѣренія должны повлечь за собою 3 условныхъ уравненія.

Назвавъ наивѣроятныя поправки каждаго угла соотвѣтственно черезъ

$$\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_4, \delta x_5 \text{ и } \delta x_6$$

приступимъ къ ихъ опредѣленію.

Изъ чертежа очевидны зависимости:

$$(x_1 + \delta x_1) + (x_4 + \delta x_4) - (x_2 + \delta x_2) = 0 \quad . \quad . \quad \text{1-е усл. ур.}$$

$$(x_1 + \delta x_2) + (x_5 + \delta x_5) - (x_3 + \delta x_3) = 0 \quad . \quad . \quad \text{2-е усл. ур.}$$

$$(x_2 + \delta x_2) + (x_6 + \delta x_6) - (x_3 + \delta x_3) = 0 \quad . \quad . \quad \text{3-е усл. ур.}$$

Можно-бы составить еще зависимость:

$$(x_4 - \delta x_4) + (x_6 - \delta x_6) + (x_5 + \delta x_5) = 0$$

Но она является результатомъ предыдущихъ и потому не можетъ считаться за отдѣльное независимое условное уравненіе.

Подставляя сюда данныя измѣренія (которыя мы должны разсматривать какъ приближенныя значенія неизвѣстныхъ), находимъ (сравните ур. (1), (2) и (3) § 2, гл. III) *невязки*:

$x_1=24^{\circ} 9' 17'',5$	$x_1=24^{\circ} 9' 17'',5$	$x_2=48^{\circ} 22' 2'',5$
$x_4=24 12 49,0$	$x_5=76 44 47,2$	$x_6=52 31 53,5$
$x_1+x_4=48 22 6,5$	$x_1+x_5=100 54 4,7$	$x_2+x_6=100 53 56,0$
$-x_2=-48 22 2,5$	$-x_3=-100 54, 1,0$	$-x_3=-100 54 1,0$
Невязка $w_1=+4'',0$	Невязка $w_2=+3'',7$	Невязка $w_3=-5'',0$

Слѣдовательно условныя уравненія будутъ:

$$\delta x_1 + \delta x_4 - \delta x_2 = -4'',0$$

$$\delta x_1 + \delta x_5 - \delta x_3 = -3'',7$$

$$\delta x_2 + \delta x_6 - \delta x_3 = +5,0$$

или:

$$1.\delta x_1 - 1.\delta x_2 + 0.\delta x_3 + 1.\delta x_4 + 0.\delta x_5 + 0.\delta x_6 + 4'',0 = 0$$

$$1.\delta x_1 + 0.\delta x_2 - 1.\delta x_3 + 0.\delta x_4 + 1.\delta x_5 + 0.\delta x_6 + 3,7 = 0$$

$$0.\delta x_1 + 1.\delta x_2 - 1.\delta x_3 + 0.\delta x_4 + 0.\delta x_5 + 1.\delta x_6 - 5,0 = 0$$

Эти условныя уравненія выпишемъ въ видѣ таблицъ ихъ коэффициентовъ (ур. (4) коррелятъ):

Условныя уравненія	Коэф.	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δx_5	δx_6	w
I	a_i	+1	-1	0	+1	0	0	+4'',0
II	b_i	+1	0	-1	0	+1	1	+3'',7
III	c_i	0	+1	-1	0	0	+1	-5'',0
Сумма ..		+2	0	-2	+1	+1	+1	+2,7

(A)

Теперь составляемъ коэффициентъ нормальныхъ уравненій (урав. (5), § 2):

По- правки	a	b	c	Гориз. сумма	as	bs	cs	aa	ab	ac	bb	bc	cc
δk_1	+1	+1	0	+2	+2	+2	0	+1	+1	0	+1	0	0
δk_2	-1	0	+1	0	0	0	0	+1	-1	-1	0	0	+1
δk_3	0	-1	-1	-2	0	+2	+2	0	0	0	+1	+1	+1
δk_4	+1	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0
δk_5	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0
δk_6	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	+1
w	+4,"0	+3,"7	-5,"0	+2,"7	+3= [as]	+5= [bs]	+3= [cs]	+3= [aa]	0= [ab]	-1= [ac]	+3= [bb]	+1= [bc]	+3= [cc]

(B)

Слѣдовательно нормальныя уравненія будутъ:

$$3.k_1 + 1.k_2 - 1.k_3 + 4,0 = 0$$

$$1.k_1 + 3.k_2 + 1.k_3 + 3,7 = 0$$

$$-1.k_1 + 1.k_2 + 3.k_3 - 5,0 = 0$$

Сумма = $+3.k_1 + 5.k_2 + 3.k_3 + 2,7 = 0$ — вѣрно . . (α).

Рѣшивъ обычнымъ способомъ эти уравненія (а если-бы ихъ коэффициенты не были такъ просты,—то по § 3, гл. II), найдемъ коррелаты:

$$k_1 = + 0,175$$

$$k_2 = - 2,100$$

$$k_3 = + 2,425$$

Контролируемъ правильность ихъ вычисленія по (α):

$$3.(0,175) + 5 (-2,100) + 3.2,425 = - 2,7 \dots \dots \text{(вѣрно!)}$$

Теперь (по ур. (4) § 2, гл. III) определяемъ всѣ поправки, пользуясь вертикальными рядами таблицы А или горизонтальными таблицами В, получаемъ:

$$\delta x_1 = + k_1 + k_2 = - 1,93$$

$$\delta x_2 = - k_1 + k_2 = + 2,25$$

$$\delta x_3 = - k_2 - k_3 = - 0,33$$

$$\delta x_4 = + k_1 = + 0,18$$

$$\delta x_5 = + k_2 = - 2,10$$

$$\delta x_6 = + k_3 = + 2,43$$

Вводя эти поправки въ результаты непосредственныхъ измѣреній, мы получаемъ слѣдующія искомыя наивѣроятныя значенія угловъ:

$$X_1 = x_1 + \delta x_1 = 24^\circ 9' 15,6$$

$$X_2 = x_2 + \delta x_2 = 48 22 9,8$$

$$X_3 = x_3 + \delta x_3 = 100 54 0,7$$

$$X_4 = x_4 + \delta x_4 = 24 12 49,2$$

$$X_5 = x_5 + \delta x_5 = 76 44 45,1$$

$$X_6 = x_6 + \delta x_6 = 52 31 55,9$$

Для контроля правильности этихъ значеній мы должны подставить ихъ въ каждое изъ условныхъ уравненій, которыя должны при этомъ тождественно удовлетворяться. Дѣйствительно:

1-е усл. ур.	2-е усл. ур.	3-е усл. ур.
$x_1 = 24^\circ 9' 15,6$ $x_4 = 24 12 49,2$	$x_1 = 24^\circ 9' 15,6$ $x_5 = 76 44 45,1$	$x_4 = 24^\circ 12' 49,2$ $x_6 = 52 31 55,9$
$x_1 + x_4 = 48^\circ 22' 4,8$ $-x_2 = -48 22 4,8$	$x_1 + x_5 = 100^\circ 53' 0,7$ $-x_3 = -100 53 0,7$	$x_4 + x_6 = 76^\circ 44' 45,1$ $-x_5 = -76 44 45,1$
$0 = 0^\circ 0' 0,0$	$0 = 0^\circ 0' 0,0$	$0 = 0^\circ 0' 0,0$

Повѣрка по формулѣ (7), § 2 даетъ:

№	δx	$(\delta x)^2$	№	w	k	w . k
1	—1",93	3,7249	1	+4",0	+0,175	+0,70
2	+2,25	5,0625	2	+3,7	—2,100	—7,77
3	—0,33	0,1089	3	—5,0	+2,425	—12,13
4	+0,18	0,0324	Сумма = [w . k] = —19,20			
5	—2,10	4,4100				
6	+2,43	5,9049				
$\Sigma = [\delta x . \delta x] = 19,24$			т. е. выполнѣ хорошее согласованіе съ $[\delta x . \delta x]$.			

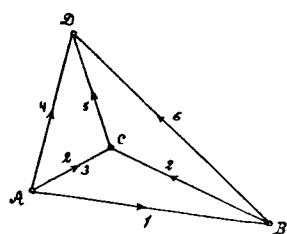
Средняя ошибка одного измѣренія:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{19,24}{3}} = \pm 2''5.$$

Примѣръ 49.

При вертикальной съемкѣ точки А, В, С и Д (черт. 4) связаны (по высотѣ) шестью нивеллирными ходами. При этомъ оказались слѣдующія разности высотъ и разстоянія между точками:

№	Направленія.	Разность вы- сотъ точекъ = x	Разстоянія s
1	(AB)	14m,876	15,0 килом.
2	(BC)	10,847	14,2 "
3	(AC)	25,714	18,7 "
4	(AD)	86,809	34,8 "
5	(CD)	61,074	24,5 "
6	(BD)	71,952	20,4 "



Черт. 4.

Примѣчаніе. Направленіе подъема мѣстности показано стрѣлками.

Требуется найти наибѣроятныя значенія разностей высотъ.

Такъ какъ ошибка въ опредѣленіи разностей высотъ точекъ увеличивается пропорціонально корню квадратному изъ s (см. при-

мѣръ 18, гл. I) и такъ какъ, съ другой стороны, вѣсь наблюденія обратно пропорціоналенъ квадрату средней ошибки (см. § 10, гл. I), то мы можемъ съ достаточнымъ приближеніемъ принять вѣса данныхъ измѣреній равными $\frac{1}{s_i}$.

Выбравъ, напр., точку А за начальную, мы видимъ, что высоты остальныхъ точекъ опредѣляются при помощи 3 какихъ-нибудь измѣреній: x_1 , x_3 и x_4 или x_1 , x_2 и x_5 и т. д., а потому изъ вѣсхъ 6 данныхъ измѣреній 3 являются избыточными и должны сопровождаться тремя условіями.

Принявъ, напр., измѣренія x_1 , x_3 и x_4 за приближенные значенія неизвѣстныхъ, составляемъ слѣдующія условныя уравненія:

$$-(x_1 + \delta x_1) + (x_3 + \delta x_3) - (x_2 + \delta x_2) = 0. \quad . \quad . \quad 1\text{-е усл. ур.}$$

$$(x_4 + \delta x_4) - (x_5 + \delta x_5) - (x_3 + \delta x_3) = 0. \quad . \quad . \quad 2\text{-е усл. ур.}$$

$$(x_2 + \delta x_2) + (x_5 + \delta x_5) - (x_6 + \delta x_6) = 0. \quad . \quad . \quad 3\text{-е усл. ур.}$$

Можно-бы составить еще зависимость:

$$-(x_1 + \delta x_1) + (x_4 + \delta x_4) - (x_6 + \delta x_6) = 0$$

но она есть результатъ предыдущихъ, какъ сумма ихъ.

Подставляя въ условныя уравненія данныя измѣренія, находимъ:

$-x_1 = -14,876$	$+x_4 = +86,809$	$+x_2 = +10,847$
$+x_3 = +25,714$	$-x_5 = -61,074$	$+x_5 = +61,074$
$-x_1 + x_3 = 10,838$	$x_4 - x_5 = +25,735$	$x_2 + x_5 = +71,921$
$-x_2 = -10,847$	$-x_6 = -25,714$	$-x_6 = -71,952$
$-x_1 + x_2 - x_3 = -0,009$	$x_4 - x_5 - x_3 = +0,021$	$x_2 + x_5 - x_6 = -0,031$

слѣдовательно условныя уравненія будутъ:

$$-1.\delta x_1 - 1.\delta x_2 + 1.\delta x_3 + 0.\delta x_4 + 0.\delta x_5 + 0.\delta x_6 - 0,009 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$0.\delta x_1 + 0.\delta x_2 - 1.\delta x_3 + 1.\delta x_4 - 1.\delta x_5 + 0.\delta x_6 + 0,021 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$0.\delta x_1 + 1.\delta x_2 + 0.\delta x_3 + 0.\delta x_4 + 1.\delta x_5 - 1.\delta x_6 - 0,031 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Умножая всё условныя уравненія на 1000, чтобы имѣть дѣло съ малыми числами, выписываемъ ихъ въ видѣ таблицы (ур. (4) § 2 кор- релатъ):

Уравне- нія.	Кoeffи- циенты.	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δx_5	δx_6	w			
Вѣсь=р.	$\frac{1}{p}=s_i=$	15,0	14,2	18,7	34,8	24,5	20,4				
I	$a_i=$	-1	-1	+1	0	0	0	-9			
II	$b_i=$	0	0	-1	+1	-1	0	+21			
III	$c_i=$	0	+1	0	0	+1	-1	-31			
	Сумма=	-1	0	0	+1	0	-1	-19			
Теперь составляемъ коэффициенты и ихъ произведенія:											
Поправ- ка.	a	b	c	Гор. сумма s	aa	ab	ac	bb	bc	cc	$\frac{1}{p}$
δx_1	-1	0	0	-1	+1	0	0	0	0	0	15,0
δx_2	-1	0	+1	0	+1	0	-1	0	0	+1	14,2
δx_3	+1	-1	0	0	+1	-1	0	+1	0	0	18,7
δx_4	0	+1	0	+1	0	0	0	+1	0	0	34,8
δx_5	0	-1	+1	0	0	0	0	+1	-1	+1	24,5
δx_6	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	+1	20,4
w	-9	+21	-31		+3= =[aa]	-1= =[ab]	-1= =[ac]	+3= =[bb]	-1= =[bc]	+3= =[cc]	

и наконецъ составляемъ коэффициенты нормальныхъ уравненій:

$\frac{[aa]}{p}, \frac{[ab]}{p}, \dots$ и т. д. [и одновременно—коэфф. ур. (7), § 1, Гл. III]:

Поправ- ки	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{cc}{p}$	$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{p}$	$\frac{c}{p}$	$\frac{as}{p}$	$\frac{bs}{p}$	$\frac{cs}{p}$
δx_1	15,0	0	0	0	0	0	-15,0	0	0	+15,0	0	0
δx_2	+14,2	0	-14,2	0	0	+14,2	-14,2	0	+14,2	0	0	0
δx_3	+18,7	-18,7	0	+18,7	0	0	+18,7	-18,7	0	0	0	0
δx_4	0	0	0	+34,8	0	0	0	+34,8	0	0	+34,8	0
δx_5	0	0	0	+24,5	-24,5	+24,5	0	-24,5	+24,5	0	0	0
δx_6	0	0	0	0	0	+20,4	0	0	-20,4	0	0	+20,4
Сумма	$+47,9=$ $\frac{[aa]}{p}$	$-18,7=$ $\frac{[ab]}{p}$	$-14,2=$ $\frac{[ac]}{p}$	$+78,0=$ $\frac{[bb]}{p}$	$-24,5=$ $\frac{[bc]}{p}$	$+59,1=$ $\frac{[cc]}{p}$				$+15,0=$ $\frac{[as]}{p}$	$+34,8=$ $\frac{[bs]}{p}$	$+20,4=$ $\frac{[cs]}{p}$

Слѣдовательно нормальныя уравненія будутъ:

$$47,9 k_1 - 18,7 k_2 - 14,2 k_3 - 9 = 0$$

$$-18,7 k_1 + 78,0 k_2 - 24,5 k_3 + 21 = 0$$

$$-14,2 k_1 - 24,5 k_2 + 59,1 k_3 - 31 = 0$$

Сумма: $+15,0 k_1 + 34,8 k_2 + 20,4 k_3 - 19 = 0$ — вѣрно!

Рѣшаемъ ихъ по схемѣ Гаусса (Гл. II, § 3):

	k_1	k_2	k_3	
$[a] = 9,00$	$[aa] = +47,90$	$[ab] = -18,70$	$[ac] = -14,20$	$\frac{[ab]}{[aa]} = \frac{18,7}{47,9} = -0,39$
$[b] = -21,00$ $+3,51$	$[ab] = -18,7$	$[bb] = +78,00$ $-7,29$	$[bc] = -24,50$ $-5,54$	$-\frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab] = -7,29$
$[c] = +31,00$ $-2,70$	$[ac] = -14,2$	$[bc] = -24,5$ $-5,54$	$[cc] = +59,10$ $-4,26$	$-\frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ac] = -5,54$
$[b.1] = -17,49$ $-8,76$		$[bb.1] = +70,71$	$[bc.1] = -30,04$	$-\frac{[ab]}{[aa]} \cdot [al] = +3,51$
$[c.1] = +28,30$ $-3,68$		$[bc.1] = -30,04$	$[cc.1] = +54,84$ $-15,32$	$\frac{[ac]}{[aa]} = -0,30$
				$-\frac{[ac]}{[aa]} \cdot [ac] = -4,26$
$[c.2] = -24,62$			$[cc.2] = +39,52$	$-\frac{[ac]}{[aa]} \cdot [al] = -2,70$
$k_3 = \frac{-[c.2]}{[cc.2]} = +0,6228$				$\frac{[bc.1]}{[bb.1]} = -0,42$
$k_2 = \frac{[b.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot k_3 = +0,0173$				$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot [bc.1] = -12,62$
$k_1 = \frac{[a]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot k_2 - \frac{[ac]}{[aa]} \cdot k_3 = +0,3793$				$\frac{[bc.1]}{[bb.1]} \cdot [b.1] = -3,68$

Зная корреляты по ур. (7) § 1 (гл. III) вычисляемъ *поправки*, пользуясь выше уже найденными коэффициентами:

$$\frac{a_i}{p}, \frac{b_i}{p}, \frac{c_i}{p}.$$

$$\delta x_1 = -15 \quad k_1 + 0 \cdot k_2 + 0 \cdot k_3 = -5,69 \text{ mm}$$

$$\delta x_2 = -14,2 \quad k_1 + 14,2 \quad k_2 + 0 \cdot k_3 = +3,46$$

$$\delta x_3 = +18,7 \quad k_1 - 18,7 \quad k_2 + 0 \cdot k_3 = +6,77$$

$$\delta x_4 = 0 \cdot k_1 + 34,8 \quad k_2 + 0 \cdot k_3 = +0,60$$

$$\delta x_5 = 0 \cdot k_1 - 24,5 \quad k_2 + 24,5 \quad k_3 = +14,83$$

$$\delta x_6 = 0 \cdot k_1 + 0 \quad k_2 - 20,4 \quad k_3 = -12,71$$

Слѣдовательно, наивѣроятныя значенія разностей высотъ:

$$X_1 = x_1 + \delta x_1 = 14,8703$$

$$X_2 = x_2 + \delta x_2 = 10,8505$$

$$X_3 = x_3 + \delta x_3 = 25,7208$$

$$X_4 = x_4 + \delta x_4 = 86,8096$$

$$X_5 = x_5 + \delta x_5 = 61,0888$$

$$X_6 = x_6 + \delta x_6 = 71,9393$$

Контроль правильности вычислений по формулѣ (9), § 1, Гл. III:

$$[\delta x \cdot \delta x \cdot p] = -[w \cdot k]$$

дастъ:

№	δx	δx^2	$\frac{1}{p} = s$	p	$\delta x \cdot \delta x \cdot p$	k	w	kw
1	— 5,69	32,38	15,0	0,067	2,24	+0,3793	— 9	— 3,41
2	+ 3,46	11,97	14,2	0,070	0,84	+0,0173	+21	+ 0,36
3	+ 6,77	45,83	18,7	0,054	2,32	+0,6228	—31	—19,31
4	+ 0,60	0,36	34,8	0,029	0,01	$\text{Сумма} = [kw] = -22,36$ т. е. согласіе вполне удовлетворительное.		
5	+14,83	220,00	24,5	0,041	8,89			
6	—12,71	161,29	20,4	0,049	8,05			
Сумма=0,310					22,35			

Средняя ошибка одного нивелирнаго хода (по (10), § 1, гл. III):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\delta x \cdot \delta x \cdot p]}{[p] \cdot (n-m)}} = \pm \sqrt{\frac{22,35}{0,310 \cdot (6-3)}} = \pm \underline{\underline{4,9^m/m}}$$

Наконецъ средняя ошибка нивелированія разстоянія въ 1 килом. равна $\pm \underline{\underline{2,7''}}$.

Примѣчаніе. Многочисленные примѣры уравниванія условныхъ наблюденій см. въ главѣ о триангуляціи, объ ориентированіи по шахтнымъ отвѣсамъ и въ задачѣ о встрѣчныхъ забояхъ.

Часть 2-я.

Т р і а н г у л я ц і я.

СОДЕРЖАНІЕ:

Глава I. Способы уравниванія триангуляціи малыхъ участковъ. Частые случаи полного и сокращеннаго уравниванія.

Глава II. Первый полный примѣръ триангуляціи по формуламъ Гаусса.

Глава III. Второй полный примѣръ триангуляціи.

ГЛАВА I.

Способы уравнивания триангуляции малыхъ участковъ (не принимающая во вниманіе кривизны земного шара).

§ 1.

Общія замѣчанія.

Здѣсь имѣютъ мѣсто слѣдующія условія:

1) „Условіе горизонта“—сумма угловъ вокругъ одной точки должна быть равна 360° .

2) „Условіе треугольниковъ“—сумма угловъ въ каждомъ треугольнике должна быть равна 180° .

3) „Условіе сторонъ“—какимъ бы порядкомъ ни вычислялись онѣ, всегда долженъ получаться одинъ и тотъ же результатъ.

4) „Условіе базисовъ“—если было непосредственно измѣрено нѣсколько базисовъ, то вычисленная изъ треугольниковъ длина каждого изъ нихъ должна согласоваться съ результатомъ непосредственного измѣренія.

Условіе сторонъ и базисовъ выражается при помощи теоремы синусовъ.

При полномъ уравниваніи составляютъ условныя уравненія и рѣшаютъ ихъ одновременно для всей сѣти (см. ч. 1, гл. III), что требуетъ обыкновенно даже и для малыхъ сѣтей очень сложныхъ ариѳметическихъ вычисленій. Поэтому на практикѣ очень часто довольствуются сокращеннымъ уравниваніемъ.

Сокращенность уравниванія достигается, во первыхъ, тѣмъ, что всю сѣть, состоящую изъ многихъ треугольниковъ, разбиваютъ на отдѣльныя группы треугольниковъ и, произведя уравниваніе одной такой группы, присоединяютъ къ ней слѣдующую и т. д., принимая результаты предыдущей группы уже за окончательные; а во вторыхъ, даже въ этихъ малыхъ группахъ условныя уравненія рѣшаютъ не всѣ вмѣстѣ, а по частямъ, вводя послѣдовательно соотвѣтствующія поправки. Такимъ образомъ для каждой группы приходится вводить лишь весьма малое число уравненій коррелятъ.

Число условныхъ уравнений r равно:

$$r = n - 2p + 4 \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ n = число измѣренныхъ угловъ, а p = число пунктовъ сѣти.

§ 2.

Ходъ полного уравниванія группы Δ -ковъ съ общою вершиною.

Пусть сѣть (черт. 1) между пунктами: А, В, С, D, Е, F есть часть всей триангуляціонной сѣти, состоящая изъ i треугольниковъ обозначенныхъ, нумерами 1, 2, 3, ..., i ; ихъ углы, соотвѣтственно нумерамъ Δ -ковъ, обозначимъ черезъ:

$$A_1 \ B_1 \ C_1; \ A_2 \ B_2 \ C_2, \dots \ A_i \ B_i \ C_i$$

искомыя *поправки* этихъ угловъ черезъ:

$$\alpha_1 \ \beta_1 \ \gamma_1; \ \alpha_2 \ \beta_2 \ \gamma_2; \dots \alpha_i \ \beta_i \ \gamma_i$$

и, наконецъ, *невязки* въ вышеперечисленныхъ условіяхъ (см. § 1) соотвѣтственно черезъ

$$w_s; \ w_1, \ w_2, \dots \ w_i \ w_0.$$

Тогда, обозначивъ еще черезъ a и b начальную и конечную стороны разсматриваемаго участка всей сѣти, мы получимъ для него слѣдующія условныя уравненія:

1) Сумма угловъ при точкѣ А должна быть равна углу σ между данными линиями a и b :

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_i - \sigma = w_s \dots \dots \dots (1)$$

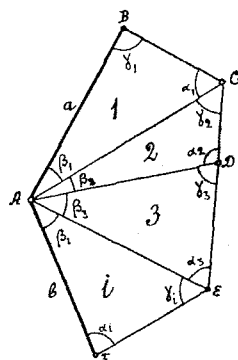
при чемъ уголъ σ опредѣленъ, конечно, независимо отъ угловъ β .

2) Суммы угловъ Δ -ковъ:

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 + C_1 - 180^\circ &= w_1 \\ A_2 + B_2 + C_2 - 180^\circ &= w_2 \\ \dots \dots \dots \\ A_i + B_i + C_i - 180^\circ &= w_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

3) Условіе сторонъ. Если бы не было ошибокъ измѣреній, то:

$$CA = \frac{a \cdot \sin B_1}{\sin C_1}; \quad DA = \frac{a \cdot \sin B_1 \sin B_2}{\sin C_1 \sin C_2} \text{ и т. д.}$$



Черт. 1.

наконецъ, конечная сторона

$$FA=b=\frac{a \cdot \text{Sn } B_1 \cdot \text{Sn } B_2 \cdot \dots \cdot \text{Sn } B_i}{\text{Sn } C_1 \cdot \text{Sn } C_2 \cdot \dots \cdot \text{Sn } C_i}$$

но вслѣдствіе существованія ошибокъ, вмѣсто послѣдняго равенства, мы получимъ:

$$\frac{a \cdot \text{Sn } B_1 \cdot \text{Sn } B_2 \cdot \dots \cdot \text{Sn } B_i}{b \cdot \text{Sn } C_1 \cdot \text{Sn } C_2 \cdot \dots \cdot \text{Sn } C_i} = 1 + w_0 \dots \dots \dots (3)$$

Такъ какъ поправки угловъ должны быть вычислены такъ, чтобы послѣ ихъ введенія невязки во всѣхъ условныхъ уравненіяхъ обратились въ нуль, то:

$$(A_1 + \alpha_1) + (A_2 + \alpha_2) + \dots + (A_i + \alpha_i) = \sigma \dots \dots \dots (1_1)$$

$$\left. \begin{aligned} (A_1 + \alpha_1) + (B_1 + \beta_1) + (C_1 + \gamma_1) &= 180^\circ \\ (A_2 + \alpha_2) + (B_2 + \beta_2) + (C_2 + \gamma_2) &= 180^\circ \\ \dots \dots \dots \\ (A_i + \alpha_i) + (B_i + \beta_i) + (C_i + \gamma_i) &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2_1)$$

$$\frac{a \cdot \text{Sn } (B_1 + \beta_1) \cdot \text{Sn } (B_2 + \beta_2) \cdot \dots \cdot \text{Sn } (B_i + \beta_i)}{b \cdot \text{Sn } (C_1 + \gamma_1) \cdot \text{Sn } (C_2 + \gamma_2) \cdot \dots \cdot \text{Sn } (C_i + \gamma_i)} = 1 \dots \dots \dots (3_1)$$

Вслѣдствіе малости $\alpha_1, \alpha_2, \dots$; $\beta_1, \beta_2, \dots$; $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ мы можемъ считать

$$\lg \text{Sn } (B_j + \beta_j) = \lg B_j + \Delta_j \cdot \beta_j$$

гдѣ Δ_j есть табличная разность $\lg \text{Sn } B_j$ при измѣненіи B_j на $1''$. Поэтому, прологариэмировавъ (3) и (3₁) и вычтя соотвѣтственно (1₁), (2₁) и (3₁) изъ (1), (2) и (3), получимъ слѣдующія уравненія погрѣшностей:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = w_s \dots \dots \dots (I)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + \beta_1 + \gamma_1 &= w_1 \\ a_2 + \beta_2 + \gamma_2 &= w_2 \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_i + \beta_i + \gamma_i &= w_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

$$\begin{aligned} &\lg a + (\Delta'_1 \cdot \beta_1 + \Delta'_2 \beta_2 + \Delta'_3 \cdot \beta_3 + \dots + \Delta'_i \beta_i) - \\ &- \lg b - (\Delta''_1 \cdot \gamma_1 + \Delta''_2 \cdot \gamma_2 + \dots + \Delta''_i \gamma_i) = w_o \dots \dots \dots (III) \end{aligned}$$

Рѣшая эти уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ, какъ изложено въ главѣ III, ч. 1-й (см. также слѣдующій §), мы получимъ

изъ нихъ уравненія коррелятъ, изъ которыхъ составляемъ нормальныя уравненія, а рѣшивъ послѣднія, т. е. опредѣливъ изъ нихъ корреляты, получимъ и всѣ искомыя наивѣроятныя поправки угловъ, придавъ которыя къ результатамъ непосредственнаго измѣренія, мы найдемъ окончательно тѣ наивѣроятныя значенія угловъ даннаго участка сѣти, при которыхъ удовлетворяются всѣ условія.

Это будетъ—**полное** уравновѣшеніе взятаго участка всей сѣти.

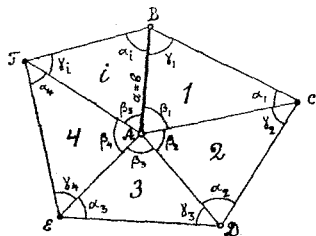
Примѣчаніе. (*Частный случай*). Если-бы выдѣленный участокъ всей сѣти состоялъ изъ Δ -ковъ съ общою вершиною, окруженною всѣми остальными пунктами (черт. 2), то все отличіе отъ предыдущаго состояло-бы только въ томъ, что, во первыхъ,

$$\sigma = 360^\circ \text{ (условіе горизонта)}$$

и, во вторыхъ,—

$$a = b$$

т. е. въ условіяхъ сторонъ (3), (3₁) и (III) вовсе не войдутъ длины начальной и конечной стороны взятаго участка.



Черт. 2.

§ 3.

Ходъ сокращеннаго уравновѣшенія.

Выше (§ 1) мы упомянули, что сокращенность уравновѣшенія, кромѣ разбивки всей сѣти на отдѣльныя малыя группы Δ —ковъ, достигается еще и тѣмъ, что въ такой малой группѣ рѣшаютъ одновременно не всѣ условныя уравненія, а выдѣляютъ сперва условіе сторонъ (III), какъ наиболѣе сложное.

Тогда, вмѣсто полной таблицы всѣхъ условныхъ уравненій, гдѣ цифры: +1, +1, . . . 0, . . . суть коэффициенты ур. (I), (II) и (III):

Корре- даты.	Урав- ненія.	Искомыя поправки угловъ.											Невязка.	Условія:	
		α_1	α_2	...	α_i	β_1	β_2	...	β_i	γ_1	γ_2	...			γ_i
K_1	1	+1	+1	.	+1	0	0	.	.	0	0	.	.	w_B	Суммы уг- ловъ съ вер- шиною А.
K_2	2	+1	0	.	0	+1	0	.	.	+1	0	.	.	w_1	Суммы угловъ Δ —ковъ.
K_3	3	0	+1	.	0	.	+1	.	.	0	+1	.	.	w_2	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
K_{i+2}	$i+2$	0	0	.	0	$+\Delta'_1$	$+\Delta'_2$	.	$+\Delta'_i$	$-\Delta'_2$	$-\Delta''_2$	.	$-\Delta''_i$	$\lg \frac{b}{a} + w_0$	Сторонъ.

между логарифмами синусовъ всѣхъ угловъ пропорціонально ихъ табличнымъ разностямъ; назвавъ-же черезъ $[d]$ алгебраическую сумму всѣхъ табличныхъ разностей числителя и знаменателя на 1", мы найдемъ поправку ,каждаго угла числителя и знаменателя въ секундахъ дуги:

$$c = \frac{w_0}{[d]}$$

Ее нужно придать ко всѣмъ угламъ числителя и вычесть изъ всѣхъ угловъ знаменателя (или наоборотъ—смотря по знаку w_0) такъ, чтобы невязка въ (III) обратилась въ нуль.

Послѣ этихъ новыхъ исправлений угловъ, мы получимъ уже окончательно уравновѣшенные ихъ значенія.

Ниже, въ § 1, гл. II, изложенъ сокращенный способъ уравниванія съ обозначеніями F. Gauss'a, заимствованный изъ его: „Die trigonometrische u. polygonometrische Rechnungen in der Feldmesskunst“.

Замѣчаніе.

При работахъ съ теодолитомъ возможно двоякимъ способомъ измѣрять углы вокругъ одной точки на мѣстности:

1-й способъ состоитъ въ томъ, что ориентируютъ теодолитъ по одному какому-нибудь направленію, которое принимается за $0^\circ 0' 0''$ и затѣмъ визируютъ на всѣ остальные пункты, записывая каждый разъ новое направленіе. Этотъ способъ называется „измѣреніемъ направленій“ (способъ пріемовъ) *).

2-й способъ состоитъ въ томъ, что каждый уголъ измѣряется независимо отъ другихъ угловъ нѣсколько разъ послѣдовательно разными частями лимба, при чемъ въ каждомъ углу одна сторона принимается за начальную; именно, совмѣстивъ нуль нониуса съ нулемъ лимба, наводятъ трубу на лѣвый сигналъ, освобождаютъ алидадный кругъ, наводятъ трубу на правый сигналъ, закрѣпляютъ алидадный кругъ въ этомъ положеніи трубы, освобождаютъ лимбъ и вращеніемъ его наводятъ трубу снова на лѣвый сигналъ, закрѣпляютъ лимбъ, освобождаютъ алидаду и наводятъ трубу на правый сигналъ: тогда отсчетъ по лимбу дастъ удвоенную величину измѣряемаго угла. Такимъ-же образомъ поступаютъ нѣсколько разъ. Этотъ способъ называется „измѣреніемъ угловъ“ („способъ повтореній“) **).

*) Примѣръ „способа пріемовъ“ см. Гл. II, § 3, журналъ триангуляціи.

**) Примѣръ „способа повтореній“ см. въ главѣ о магнитномъ ориентированіи, а также—въ примѣрѣ рудничной теодолитной съемки на Гарцѣ (Кляустваль).

Частные случаи при триангуляции.

а) Случаи съ однимъ условнымъ уравненіемъ.

§ 4.

Уравновѣшеніе нѣсколькихъ равновѣсно измѣренныхъ величинъ, сумма истинныхъ значеній которыхъ заранее извѣстна.

Если непосредственно измѣряемые величины должны дать извѣстную сумму (т. е. подчинены одному только условію):

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = X_0$$

а вслѣдствіе ошибочности измѣреній это равенство не удовлетворяется и вмѣсто него оказывается:

$$X_0 - (x' + x'' + \dots + x^{(n)}) = \delta$$

то *наивѣроятныя значенія* искоемыхъ величинъ будутъ:

$$x_0' = x' + \frac{1}{\left[\frac{1}{p_1}\right]} \delta; \quad x_0'' = x'' + \frac{1}{\left[\frac{1}{p_2}\right]} \delta; \quad \dots \dots \dots; \quad x_0^{(n)} = x^n + \frac{1}{\left[\frac{1}{p_n}\right]} \delta \quad (35)$$

т. е. невязка δ должна быть распределена пропорціонально обратнымъ значеніямъ вѣсовъ опредѣляемыхъ величинъ.

Среднія ошибки результатовъ измѣренія: $x', x'', \dots \dots x^{(n)}$ будутъ:

$$m' = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_1}}; \quad m'' = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_2}}; \quad \dots \dots m^{(n)} = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_n}} \quad (36)$$

гдѣ

$$m = \pm \sqrt{\frac{\delta}{\left[\frac{1}{p}\right]}}$$

Среднія ошибки результатовъ уравновѣшенія: $x_0', x_0'', \dots \dots x_0^{(n)}$ будутъ:

$$M' = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_1} \left(1 - \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}; \quad M = \pm m \sqrt{\frac{1}{p_2} \left(1 - \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}\right)}; \quad \text{и т. д.} \dots \quad (37)$$

Примѣръ 1.

Въ треугольникѣ измѣрены всѣ 3 угла съ вѣсами:

	У г л ы	Вѣсъ
	$x' = 65^{\circ} 43' 27'',44$	$p_1=10$
	$x'' = 61 \quad 17 \quad 50,83$	$p_2=15$
	$x''' = 52 \quad 58 \quad 37,01$	$p_3=12$
Сумма=	$179^{\circ} 59' 55'',28$	

$$\text{Здѣсь: } \delta = +4'',72; \left[\frac{1}{p} \right] = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = 0,250$$

Наивѣроятныя значенія искомымъ (по вышеприведеннымъ формуламъ):

$$x'_0 = 65^{\circ} 43' 29'',33; x''_0 = 61^{\circ} 17' 52'',09; x'''_0 = 52^{\circ} 58' 38'',58$$

сумма которыхъ уже въ точности равна 180° .

$$m = \pm \sqrt{\frac{4,72}{\left[\frac{1}{p} \right]}} = \pm 9'',44$$

Среднія ошибки угловъ до уравниванія:

$$m' = \pm 2'',98; m'' = \pm 2'',44; m''' = \pm 2'',72$$

Среднія ошибки угловъ послѣ уравниванія:

$$M' = \pm 2'',31; M'' = \pm 2'',09; M''' = \pm 2'',22$$

§ 5.

Продолженіе предыдущаго §; случай равновѣсныхъ измѣреній.

Полагая въ предыдущихъ формулахъ

$$p_1 = p_2 = \dots p_n = 1$$

найдемъ

$$x'_0 = x' + \frac{1}{n} \delta; x''_0 = x'' + \frac{1}{n} \delta; \dots \dots \dots (38)$$

т. е. невязка должна быть распределена поровну между всеми непосредственно измеренными величинами.

Далѣ *среднія ошибки*:

$$m' = m'' = \dots m^{(n)} = m = \pm \delta \sqrt{\frac{1}{n}} \dots \dots \dots (39)$$

$$M' = M'' = \dots M^{(n)} = M = \pm \delta \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \dots \dots (40)$$

Примѣръ 2.

Въ нѣкоторомъ полигонѣ между двумя данными пунктами измерены однократно углы:

$$x^I = 184^\circ 16', 8$$

$$x^{II} = 165 \quad 45, 0$$

$$x^{III} = 179 \quad 59, 1$$

$$x^{IV} = 166 \quad 11, 0$$

$$[x] = 696^\circ 4', 9$$

Азимуты начального и конечнаго стана были заранѣе въ точности извѣстны и равны:

$$\nu_1 = 284^\circ 57', 2; \quad \nu_5 = 261^\circ 1', 3$$

Слѣдовательно $[x]$ должна быть равна:

$$\nu_5 - \nu_1 + 2.180^\circ = 696^\circ 4', 1$$

т. е. невязка

$$\delta = -0', 8$$

поэтому наивѣроятныя („исправленныя“) значенія угловъ полигона суть

$$x_o' = 184^\circ 16', 8 + \frac{1}{4}(-0', 8) = \underline{\underline{184^\circ 16', 6}}$$

$$x_o'' = 165^\circ 45, 0 + \frac{1}{4}(-0', 8) = \underline{\underline{165^\circ 44', 8}}$$

.....

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} =$$

$$\frac{\text{Sn}\{180-(C_2-C_1+\alpha_2-\alpha_1)-(B_8-B_7+\alpha_8-\alpha_7)-[180-(C_3-C_1+\alpha_3-\alpha_1)-(A_5-A_4+\alpha_5-\alpha_4)]\}}{\text{Sn}\{180-(C_3-C_1+\alpha_3-\alpha_1)-(A_5-A_4+\alpha_5-\alpha_4)+(B_8-B_7+\alpha_8-\alpha_7)\}} \times$$

$$\times \frac{\text{Sn}\{A_5-A_4+\alpha_5-\alpha_4\} \cdot \text{Sn}\{180-(C_3-C_1+\alpha_3-\alpha_1)-(A_5-A_4+\alpha_5-\alpha_4)\}}{\text{Sn}\{180-(C_3-C_2+\alpha_3-\alpha_2)-(A_6-A_4+\alpha_6-\alpha_4)\} \cdot \text{Sn}\{A_5-A_4+\alpha_5-\alpha_4\}} = 1.$$

$$-(C_2-C_1) = -42^\circ 12' 20''$$

$$-(B_8-B_7) = -30^\circ 53' 19''$$

$$-(C_2-C_1)-(B_8-B_7) = -73^\circ 5' 39''$$

$$+(C_3-C_1) = +82^\circ 9' 22''$$

$$+ 9 \quad 3 \quad 43$$

$$+(A_5-A_4) = +40 \quad 1 \quad 43$$

$$\text{Сумма} \dots = 49^\circ 5' 26''$$

$$-(C_3-C_1) = -82^\circ 9' 22''$$

$$-(A_5-A_4) = -40 \quad 1 \quad 43$$

$$\text{Сумма} \dots = -122^\circ 11' 5''$$

$$-(C_3-C_1) = -82^\circ 9' 22''$$

$$-(A_5-A_4) = -40 \quad 1 \quad 43$$

$$\text{Сумма} \dots = -122^\circ 11' 5''$$

$$B_8-B_7 = +30 \quad 53 \quad 19$$

$$\text{Сумма} = 91^\circ 17' 46''$$

$$-(C_3-C_2) = -39^\circ 57' 2''$$

$$-(A_6-A_4) = -70 \quad 26 \quad 32$$

$$\text{Сумма} \dots = -110^\circ 23' 34''$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\text{Sn} (49^\circ 5' 26'' + \alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_6 + \alpha_7)}{\text{Sn} (180^\circ - 91^\circ 17' 46'' + \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7)} \times$$

$$\times \frac{\text{Sn} (70^\circ 26' 32'' + \alpha_6 - \alpha_4) \cdot \text{Sn} (180^\circ - 122^\circ 11' 5'' + \alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_5)}{\text{Sn} (180^\circ - 110^\circ 23' 34'' + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_6) \cdot \text{Sn} (40^\circ 1' 43'' + \alpha_5 - \alpha_4)} = 1$$

Вводя полученные поправки, получимъ слѣдующія уравновѣ-
шенныя направленія:

Точка стоя- нія	Точка визи- рования	Исправленныя на- правленія	Приведенныя исправленныя на- правленія
С	В	0° 0' 0",34	0° 0' 0",00
	Н	42 12 20 ,28	42 12 19 ,94
	А	82 9 21 ,38	82 9 21 ,04
А	С	0 0 0 ,15	0 0 0 ,00
	В	40 1 42 ,84	40 1 42 ,69
	Н	70 26 32 ,01	70 26 31 ,86
В	Н	00 0—0",48	0 0 0 ,00
	А	30 53 19 ,48	30 53 19 ,96

Средняя ошибка одного направленія (см. ч. 1, гл. III, § 2, ур. (7))

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{m}} = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{1}} = \pm \sqrt{1,06} = \pm \underline{\underline{1",03}}$$

Общій контроль всего уравновѣшенія состоитъ въ повѣркѣ удов-
летворенія условныхъ уравненій уравновѣшенными значеніями неиз-
вѣстныхъ i . Въ данномъ случаѣ повѣркѣ подлежитъ только условіе
сторонъ.

Составивъ по предыдущему всѣ углы числителя и знаменателя,
найдемъ:

Уголъ	lg Sn
49° 5' 23",83	9,878 3715
70 26 31 ,86	9,974 1901
122 11 3 ,73	9,927 5441
lg числителя =	9,780 1057

Уголъ	lg Sn
91° 17' 43",77	9,999 8890
110 23 32 ,96	9,971 8915
40 1 42 ,69	9,808 3251
lg знаменат. =	9,780 1056

вѣрно!

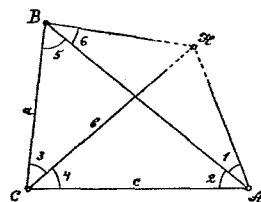
b. Случаи съ двумя условными уравненіями.

§ 7.

Уравновѣшеніе угловъ четырехугольника, въ которомъ всѣ пункты видимы, но одинъ недоступенъ.

Для опредѣленія положенія точки Н измѣрены углы, которые нужно уравновѣсить (черт. 4):

Результаты измѣреній.	Искомая поправка.
$A_1 = 30^\circ 24' 49''$	$+\alpha_1$
$A_2 = 40 \quad 1 \quad 43$	$+\alpha_2$
$C_3 = 39 \quad 57 \quad 2$	$+\alpha_3$
$C_4 = 42 \quad 12 \quad 20$	$+\alpha_4$
$B_5 = 57 \quad 49 \quad 6$	$+\alpha_5$
$B_6 = 30 \quad 53 \quad 19$	$+\alpha_6$



Черт. 4.

Число условныхъ уравненій здѣсь будетъ:

$$r = 6 - 2 \cdot 4 + 4 = 2$$

1) Сумма угловъ $\triangle$ —ка ACB:

$\triangle ACB$:

$$\begin{aligned} A_2 &= 40^\circ 1' 43'' + \alpha_2 \\ C_3 + C_4 &= 82 \quad 9 \quad 22 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ B_5 &= 57 \quad 49 \quad 6 + \alpha_5 \end{aligned}$$

$$\text{Сумма} = 180^\circ 0' 11''$$

Невязка $= w_1 = +11''$; (Поправка суммы угловъ $f = -w = -11''$), т. е. первое условное уравненіе будетъ:

$$0 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 + 1 \cdot \alpha_3 + 1 \cdot \alpha_4 + 1 \cdot \alpha_5 + 0 \cdot \alpha_6 + 11 = 0 \dots \dots \dots (1)$$

2) Условіе сторонъ, принимая С за центральный пунктъ:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} =$$

$$= \frac{\text{Sn}[180 - (C_4 + B_5 + B_6) - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6] \cdot \text{Sn}(A_1 + A_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \cdot \text{Sn}(B_5 + \alpha_5)}{\text{Sn}(B_5 + B_6 + \alpha_5 + \alpha_6) \cdot \text{Sn}[180 - (C_3 + A_1 + A_2) - \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2] \cdot \text{Sn}(A_2 + \alpha_2)} = 1$$

Подставляемъ наши данныя:

$C_4 = 42^\circ 12' 20''$	$A_1 = 30^\circ 24' 49''$
$B_5 = 57 \quad 49 \quad 6$	$A_2 = 40 \quad 1 \quad 43$
$B_6 = 30 \quad 53 \quad 19$	
Сумма $= 88^\circ 42' 25''$	Сумма $= 130^\circ 54' 45''$
$B_5 = 57^\circ 49' \quad 6''$	$C_3 = 39^\circ 57' \quad 2''$
$B_6 = 30 \quad 53 \quad 19$	$A_1 = 30 \quad 24 \quad 49$
	$A_2 = 40 \quad 1 \quad 43$
Сумма $= 70^\circ 26' \quad 32''$	Сумма $= 110^\circ 23' \quad 34''$

Уголѣ	lg Sn.	Табл. разн. на 1"	Уголѣ	lg Sn.	Табл. разн. на 1"
$130^\circ 54' 45''$	$= 9,878 \ 3555$	$-18,3$	$88^\circ 42' 25''$	$= 9,999 \ 8894$	$+ 0,4$
$70^\circ 26' 32''$	$= 9,974 \ 1912$	$+ 7,4$	$110^\circ 23' 34''$	$= 9,971 \ 8906$	$- 7,9$
$57^\circ 49' \quad 6''$	$= 9,927 \ 5570$	$+ 13,2$	$40^\circ \quad 1' \ 43''$	$= 9,808 \ 3258$	$+ 25,1$
lg числит. $=$	$9,780 \ 1037$	$+ 2,3$	lg знамен. $=$	$9,780 \ 1058$	$+ 17,6$

Невязка $= \lg \text{числителя} - \lg \text{знам.} = 9,7801037 - 9,7801058 = -21$ ед. послѣдняго знака:

$$w_2 = -21.$$

Слѣдовательно условіе сторонъ выразится такъ:

$$-18,3(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) + 7,4(\alpha_1 + \alpha_2) + 13,2\alpha_3 - 0,4(\alpha_3 + \alpha_6) + \\ + 7,9(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 25,1\alpha_2 - 21 = 0$$

или:

$$15,3\alpha_1 - 9,8\alpha_2 + 7,9\alpha_3 - 18,3\alpha_4 - 5,5\alpha_5 - 18,7\alpha_6 - 21 = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Изъ (1) и (2) составляемъ уравненія коррелятъ:

$$\alpha_1 = 0. \quad k_1 + 15, 3. \quad k_2$$

$$\alpha_2 = 1. \quad k_1 - 9, 8. \quad k_2$$

$$\alpha_3 = 1. \quad k_1 + 7, 9. \quad k_2$$

$$\alpha_4 = 1. \quad k_1 - 18, 3. \quad k_2$$

$$\alpha_5 = 1. \quad k_1 - 5, 5. \quad k_2$$

$$\alpha_6 = 0. \quad k_1 - 18, 7. \quad k_2$$

По нимъ составляемъ коэффициенты нормальныхъ уравненій:

№	a	b	aa	ab	bb
1	0	+15,3	0	0	+ 234
2	+1	-- 9,8	+1	-- 9,8	+ 96
3	+1	+ 7,9	+1	+ 7,9	+ 62
4	+1	-18,3	+1	-18,3	+ 335
5	+1	-- 5,5	+1	-- 5,5	+ 30
6	0	-18,7	0	0	+ 349
			+4 =[aa]	-25,8 =[ab]	+1106 =[bb]

Нормальныя уравненія:

$$4 k_1 - 25,8. \quad k_2 + 11 = 0$$

$$-25,8. \quad k_1 + 1106. \quad k_2 - 21 = 0$$

Рѣшая ихъ, находимъ:

$$k_1 = -3,09$$

$$k_2 = -0,053$$

слѣдовательно поправки угловъ:

$$\alpha_1 = -0,8 \quad \alpha_4 = -2,1$$

$$\alpha_2 = -2,6 \quad \alpha_5 = -2,8$$

$$\alpha_3 = -3,5 \quad \alpha_6 = +1,0$$

Контроль:

$$[\alpha\alpha]=32,9; -[w.k]=32,9 \dots \dots \dots \text{вѣрно!}$$

Уравновѣшенныя значенія угловъ будутъ:

$$\begin{array}{l|l} A_1=30^\circ 24' 48,8 & C_4=42^\circ 12' 17,9 \\ A_2=40 & 1 \ 40,4 & B_5=57 \ 49 \ 3,2 \\ C_3=39 \ 56 \ 58,5 & B_6=30 \ 53 \ 20,0 \end{array}$$

Средняя ошибка одного измѣренія угла:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{32,9}{2}} = \pm 4,1''$$

Контроль по условію суммы угловъ Δ -ка ABC:

$$\begin{array}{l} A_2=40^\circ \ 1' \ 40,4 \\ C_3+C_4=82 \ 9 \ 16,4 \\ B_5=57 \ 49 \ 3,2 \end{array}$$

$$\text{Сумма}=180^\circ \ 0' \ 0,0 \dots \dots \dots \text{вѣрно!}$$

Контроль по условію сторонъ:

$\lg \text{ Sn } 130^\circ 54' 41,1 = 9,878 \ 3625$	$\lg \text{ Sn } 88^\circ 42' 23,2 = 9,999 \ 8893$
$\lg \text{ Sn } 70 \ 26 \ 29,2 = 9,974 \ 1891$	$\lg \text{ Sn } 110 \ 23 \ 27,7 = 9,971 \ 8957$
$\lg \text{ Sn } 57 \ 49 \ 3,2 = 9,927 \ 5531$	$\lg \text{ Sn } 40 \ 1 \ 40,4 = 9,808 \ 3194$
$\lg \text{ числителя } = 9,780 \ 1047$	$\lg \text{ знаменателя } = 9,780 \ 1044$

вѣрно!

§ 8.

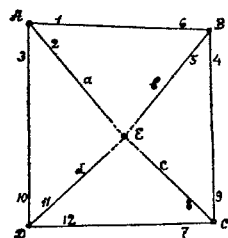
Уравновѣшеніе направленій при прямой засѣчкѣ недоступнаго пункта съ нѣсколькихъ (> 3) данныхъ пунктовъ.

Полное уравновѣшеніе.

Пусть Е есть крестъ церкви, координаты котораго требуется опредѣлить, для чего подлежатъ уравновѣшенію слѣдующія измѣрен-

ныя направлення (черт. 5):

Точка стоянія	Точка визиров.	Измѣренныя на- правленія	Искомая поправка
А	В	0° 0' 0"	α_1
	Е	44 27 22	α_2
	Д	88 32 42	α_3
В	С	0 0 0	α_4
	Е	46 52 42	α_5
	А	92 25 48	α_6
С	Д	0 0 0	α_7
	Е	46 6 56	α_8
	В	89 56 12	α_9
Д	А	0 0 0	α_{10}
	Е	42 36 23	α_{11}
	С	89 5 30	α_{12}



Черт. 5.

Число условныхъ уравненій здѣсь будетъ только 2:

$$r = n - 2p + 4 = 8 - 2 \cdot 5 + 4 = 2$$

а именно:

- 1) условіе суммы угловъ четырехугольника и
- 2) условіе сторонъ.

1-е условіе выразится такъ (индексы буквъ см. по чертежу):

$$(A_3 - A_1 + \alpha_3 - \alpha_1) + (B_6 - B_4 + \alpha_6 - \alpha_4) + (C_9 - C_7 + \alpha_9 - \alpha_7) + \\ + (D_{12} - D_{10} + \alpha_{12} - \alpha_{10}) - 360^\circ = 0,$$

или окончательно:

$$+21,5.\alpha_1 - 43,2.\alpha_2 + 21,7.\alpha_3 + 19,7.\alpha_4 - 40,4.\alpha_5 + 20,7.\alpha_6 + 20,2.\alpha_7 - \\ - 42,1.\alpha_8 + 21,9.\alpha_9 + 22,9.\alpha_{10} - 42,9.\alpha_{11} + 20,0.\alpha_{12} - 132 = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ (1) и (2) составляемъ уравнения коррелятъ:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \alpha_1 = -1.K_1 + 21,5.K_2 & \alpha_4 = -1.K_1 + 19,7.K_2 & \alpha_7 = -1.K_1 + 20,2.K_2 & \alpha_{10} = -1.K_1 + 22,9.K_2 \\ \alpha_2 = 0.K_1 - 43,2.K_2 & \alpha_5 = 0.K_1 - 40,4.K_2 & \alpha_8 = 0.K_1 - 42,1.K_2 & \alpha_{11} = 0.K_1 - 42,9.K_2 \\ \alpha_3 = 1.K_1 + 21,7.K_2 & \alpha_6 = 1.K_1 + 20,7.K_2 & \alpha_9 = 1.K_1 + 21,9.K_2 & \alpha_{12} = 1.K_1 + 20,0.K_2 \end{array}$$

По нимъ составляемъ коэффициенты нормальныхъ уравнений:

$$[aa] = +8, \quad [ab] = 0, \quad [bb] = +10673$$

и нормальные уравнения:

$$\begin{array}{l} 8.K_1 + 12 = 0 \\ +10673.K_2 - 132 = 0 \end{array}$$

откуда

$$\begin{array}{l} K_1 = -1'',5 \\ K_2 = +0'',013 \end{array}$$

слѣдовательно поправки и исправленные направления будутъ:

П о п р а в к и.	Уравновѣшен. направления.	Приведенныя уравнов. направл.	α^2
$\alpha_1 = +1'',5 + 0,3 = +1'',8$	0° 0' 1'',8	0° 0' 0'',0	3,24
$\alpha_2 = \quad \quad \quad = -0,6$	44 27 21,4	44 27 19,6	0,36
$\alpha_3 = -1'',5 + 0,3 = -1'',2$	88 32 40,8	88 32 39,0	1,44
$\alpha_4 = +1'',5 + 0,2 = +1'',7$	0 0 1,7	0 0 0,0	2,89
$\alpha_5 = \quad \quad \quad = -0'',5$	46 52 41,5	46 52 39,8	0,25
$\alpha_6 = -1'',5 + 0'',3 = -1'',2$	92 25 46,8	92 25 45,1	1,44
$\alpha_7 = +1'',5 + 0'',3 = +1'',8$	0 0 1,8	0 0 0,0	3,24
$\alpha_8 = \quad \quad \quad = -0'',5$	46 6 55,5	46 6 53,7	0,25
$\alpha_9 = -1'',5 + 0'',3 = -1'',2$	89 56 10,8	89 56 9,0	1,44
$\alpha_{10} = +1'',5 + 0'',3 = +1'',8$	0 0 1,8	0 0 0,0	3,24
$\alpha_{11} = \quad \quad \quad = -0'',5$	42 36 22,5	42 36 20,7	0,25
$\alpha_{12} = -1'',5 + 0'',3 = -1'',2$	89 5 28,8	89 5 27,0	1,44

$$[\alpha\alpha] = 19,5$$

Контроль по формулѣ: $—[w_k]=[αα]$:

$$—[w.k]=12.1'',5+132.0'',013=19,7$$

$$[αα] = 19,5—достаточное согласованіе.$$

Средняя ошибка одного направленія послѣ уравниванія:

$$μ=±\sqrt{\frac{[αα]}{n}}=±\sqrt{\frac{19,5}{2}}=±''3,2.$$

§ 9.

Заданія предыдущаго §.

Сокращенное уравновѣшеніе *).

Сперва удовлетворяемъ 1-е условіе, для чего невязку суммы внутреннихъ угловъ $\square$ -ка

$$w_1=+12'', \text{ т. е. поправку } f=-12''$$

нужно распределить поровну между всѣми углами при точкахъ А, В С и D, т. е. въ каждый изъ нихъ нужно ввести поправку

$$f_1=-\frac{w_1}{4}=-\frac{12}{4}=-3''$$

послѣ чего получимъ

$$\left. \begin{array}{l} A_3-A_1=88^\circ 32' 39'' \\ B_6-B_4=92 \quad 25 \quad 45 \\ C_9-C_7=89 \quad 56 \quad 9 \\ D_{12}-D_{10}=89 \quad 5 \quad 27 \\ \hline \text{Сумма}=360^\circ 0' 0'' \end{array} \right\} \dots \dots \dots (A)$$

Далѣе, предполагая, что при каждомъ визированіи мы дѣлали приблизительно одинаковыя ошибки, и оставляя прежнія направленія при каждой точкѣ за ориентирныя ($0^\circ 0' 0''$), мы распредѣлимъ невязки въ углахъ поровну и между остальными 4 направленіями (на точ-

*) О сокращенномъ уравновѣшеніи см. также ниже, гл. II, § 1 и гл. III, § 1.

ку E); послѣ этого получимъ слѣдующія разѣ-исправленные направ-
ленія (прибавляя къ нимъ по $\frac{f_1}{2} = -1'',5$):

Точка стоянія	Точка визиров.	Направленія
А	В	0° 0' 0"
	Е	44 27 20,5
	Д	88 32 39
В	С	0° 0' 0"
	Е	46 52 40,5
	А	92 25 45

Точка стоянія	Точка визиров.	Направленія
С	Д	0° 0' 0"
	Е	46 6 54,5
	В	89 56 9
Д	А	0° 0' 0"
	Е	42 36 21,5
	С	89 5 27

[Сравнивая даже эти результаты, такъ просто полученные, съ результатами полного уравниванія въ предыдущемъ §, мы видимъ что они весьма близки другъ къ другу].

Теперь вводимъ условіе сторонъ (сравн. предыд. §):

Уголѣ	lg Sn	Табл. раз. на 1"
45° 33' 4"5	9,853 6235	+20,7
43 49 14, 5	9,840 3594	+21,9
46 29 5, 5	9,860 4533	+20,0
44 5 18, 5	9,842 4646	+21,7
lg числит. =	9,396 9008	+84,3

Уголѣ	lg Sn	Табл. раз. на 1"
44° 27' 20,"5	9,845 3178	+21,5
46 52 40, 5	9,863 2627	+19,7,
46 6 54, 5	9,857 7753	+20,2
42 36 21, 5	9,830 5584	+22,9
lg знамен. =	9,396 9142	+84,3

Невязка $w = 9,396\ 9008 - 9,396\ 9142 = -134$ ед. послѣд. зн. lg.
слѣдовательно поправка угловъ на условіи сторонъ будетъ: $([d] = 84,3 + 84,3 = 168,6)$:

$$c = -\frac{134}{168,9} = -0,8$$

т. е. на такую величину нужно увеличить все углы числителя и уменьшить все углы знаменателя и потому исправленные направления на точку Е будут:

$$\left. \begin{array}{l} 44^{\circ} 27' 20,5'' - 0,8'' = 44^{\circ} 27' 19,7'' \\ 46 \ 52 \ 40,5'' - 0,8'' = 46 \ 52 \ 39,7'' \\ 46 \ 6 \ 54,5'' - 0,8'' = 46 \ 6 \ 53,7'' \\ 42 \ 36 \ 21,5'' - 0,8'' = 42 \ 36 \ 20,7'' \end{array} \right\} \dots \dots \dots (B)$$

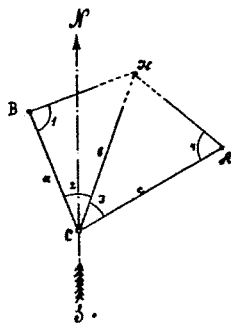
Такимъ образомъ это простое уравновѣшеніе дало (А) и (В)— почти тождественные результаты съ предыдущимъ §.

§ 10.

Уравновѣшиваніе угловъ при прямой засѣчкѣ недоступнаго пункта съ трехъ данныхъ.

Измѣрены углы черт. 6:

Измѣренные углы.	Искомая поправка.
$B_1 = 88^{\circ} 42' 25''$	$+ \alpha_1$
$C_2 = 42 \ 12 \ 20$	$+ \alpha_2$
$C_3 = 39 \ 57 \ 2$	$+ \alpha_3$
$A_4 = 70 \ 26 \ 31$	$+ \alpha_4$



Черт. 6.

Опредѣлить наивѣроятныя координаты точки Н, если координаты данныхъ точекъ суть:

Точки.	X	Y
A	$+1502,228$	$+2477,610$
C	$+1446,148$	$+2380,620$
B	$+1524,979$	$+2348,462$

Обозначая приращенія соответственныхъ координатъ символомъ Δ ,

вычисляемъ по нимъ азимуты направлений СВ и СА *):

$$\operatorname{tg}(\text{CB}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = -32,158, \quad \Delta x = +78,831$$

$$(\text{BC}) = 157^{\circ} 48' 28'' \text{ или } (\text{CB}) = 337^{\circ} 48' 28''$$

$$\operatorname{tg}(\text{CA}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = +96,990, \quad \Delta x = +56,080$$

$$(\text{CA}) = 59^{\circ} 57' 48''$$

Слѣдовательно истинное значеніе угла $\text{BCA} = \text{C}_2 + \text{C}_3$ должно быть:

$$\text{BCA} = (360^{\circ} - 337^{\circ} 48' 28'') + 59^{\circ} 57' 48''$$

$$\text{BCA} = 82^{\circ} 9' 20''$$

и потому 1-е условіе будетъ:

$$\text{C}_2 + \alpha_2 + \text{C}_3 + \alpha_3 = 82^{\circ} 9' 20''$$

но изъ результатовъ измѣренія имѣемъ:

$$\text{C}_2 = 42^{\circ} 12' 20''$$

$$\text{C}_3 = 39 \quad 57 \quad 2$$

$$\text{C}_2 + \text{C}_3 = 82^{\circ} 9' 22''$$

$$\text{BCA} = 82 \quad 9 \quad 20 \text{ (должно быть)}$$

$$\text{Невязка} = w_1 = +2''$$

слѣдовательно 1-е условное уравненіе будетъ:

$$0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 0.\alpha_4 + 2'' = 0. \quad \dots \dots \dots (1)$$

2-е условіе, условіе сторонъ, здѣсь будетъ состоять въ томъ, что въ результатѣ вычисленія стороны СН по даннымъ:

1) сторонѣ ВС (изъ координатъ В и С) и

2) уравновѣшеннымъ угламъ B_1 и C_1

и перехода отъ СН къ СА, съ помощью исправленнаго угла C_3 мы должны получить длину СА, вычисленную изъ координатъ С и А. Для формулированія этого условія вычисляемъ: **).

*) См. также ниже гл. III, примѣръ трианг. сѣти, гдѣ эти азимуты даны.

**) См. тотъ же примѣръ триангуляціи, гл. III.

$$\lg BC = \lg \sqrt{(1446,148 - 1524,979)^2 + (2380,620 - 2348,462)^2} = 1,9301220$$

$$\lg CA = \lg \sqrt{(1502,228 - 1446,148)^2 + (2477,610 - 2380,620)^2} = 2,0493562$$

$$\lg CA - \lg CB = +0,1192342$$

$$\frac{a}{b} = \frac{CB}{CH} = \frac{\text{Sn}[180 - (B_1 + \alpha_1) - (C_2 + \alpha_2)]}{\text{Sn}(B_1 + \alpha_1)}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{CH}{CA} = \frac{\text{Sn } A_4}{\text{Sn}[180 - (A_4 + \alpha_4) - (C_3 + \alpha_3)]}$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\text{Sn}(130^\circ 54' 45'' + \alpha_1 + \alpha_2) \cdot \text{Sn}(70^\circ 26' 31'' + \alpha_4)}{\text{Sn}(88^\circ 42' 25'' + \alpha_1) \cdot \text{Sn}(110^\circ 23' 33'' + \alpha_4 + \alpha_3)}$$

Уголъ.	lg Sn	Табл. разн. на 1".	Уголъ.	lg Sn	Табл. разн. на 1".
130° 54' 45"	9,878 3555	—18,2	88° 42' 25"	9,999 8894	+0,4
70 26 31	9,974 1905	+ 7,5	110 23 33	9,971 8914	—7,8
lg числит. =	9,852 5460	—10,7	lg знамен. =	9,971 7808	—7,3

$$\lg CA - \lg CB = +0,1192348$$

$$\text{Должно быть} = +0,1192342$$

$$\text{Невязка} = +6 \text{ ед. послѣд. знака } \lg.$$

Слѣдовательно:

$$-18,2(\alpha_1 + \alpha_2) + 7,5 \cdot \alpha_4 - 0,4 \cdot \alpha_1 + 7,8(\alpha_3 + \alpha_4) + 6 = 0$$

или, окончательно, условіе сторонъ выразится такъ:

$$-18,6 \cdot \alpha_1 - 18,2 \cdot \alpha_2 + 7,8 \cdot \alpha_3 + 15,3 \cdot \alpha_4 + 6 = 0 \quad (2)$$

Изъ (1) и (2) составляемъ уравненія коррелятъ:

Уравненія коррелятъ.	Коэффициенты нормальныхъ уравненій.				
	a	b	aa	ab	bb
$\alpha_1 = 0 \cdot K_1 - 18,6 \cdot K_2$	0	—18,6	0	0	+345,96
$\alpha_2 = 1 \cdot K_1 - 18,2 \cdot K_2$	+1	—18,2	+1	—18,2	331,24
$\alpha_3 = 1 \cdot K_1 + 7,8 \cdot K_2$	+1	+ 7,8	+1	+ 7,8	60,84
$\alpha_4 = 0 \cdot K_1 + 15,3 \cdot K_2$	0	+15,3	0	0	234,09
			+2 =	—10,4 =	972,13
			= [aa]	= [ab]	= [bb]

Нормальныя уравненія:

$$2 \cdot \kappa_1 - 10,4 \cdot \kappa_2 + 2 = 0$$

$$-10,4 \cdot \kappa_1 + 972,13 \cdot \kappa_2 + 6 = 0$$

откуда

$$\kappa_1 = +1,021$$

$$\kappa_2 = +0,004$$

и въ результатѣ получимъ, пренебрегая долями секунды:

Поправки.	Уравновѣшен. углы.	
$\alpha_1 = 0''$	B_1	$88^\circ 42' 25''$
$\alpha_2 = -1''$	C_2	$42^\circ 12' 19''$
$\alpha_3 = -1''$	C_3	$39^\circ 57' 1''$
$\alpha_4 = 0''$	A_4	$70^\circ 26' 31''$

Контроль ($-[w \cdot \kappa] = [\alpha\alpha]$):

$$-[w \cdot \kappa] = +2,00; [\alpha\alpha] = +2,00 \quad \text{вѣрно!}$$

Средняя ошибка одного угла послѣ уравновѣшенія:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{1260}{2}} = \pm 25''$$

Контроль всего уравновѣшенія:

1-е условіе:

$$C_2 = 42^\circ 12' 19''$$

$$C_3 = 39 \quad 57 \quad 1$$

$$C_2 + C_3 = 82 \quad 9 \quad 20$$

$$\angle BSA = 82 \quad 9 \quad 20 \quad (\text{должно быть!}) \text{ Вѣрно!}$$

2-е условіе также удовлетворяется.

Теперь можно приступить къ вычисленію координатъ новаго пункта Н.

§ 11.

Тѣ-же задания. Сокращенное уравновѣшено.

Въ этомъ случаѣ мы сперва выполняемъ 1-е условіе, для чего невязку суммы угловъ

$$C_2 + C_3 = \angle BSA$$

т. е. поправку

$$f_1 = -w_1 = -2''$$

распредѣляемъ поровну между углами C_2 и C_3 , такъ что ихъ исправленные значенія будутъ:

$$C_2 = 42^\circ 12' 20'' - 1'' = 42^\circ 12' 19''$$

$$C_3 = 39 \quad 57 \quad 2 - 1 = 39 \quad 57 \quad 1$$

Теперь вводимъ условіе сторонъ:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\text{Sn} [180 - (B_1 + C_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)] \cdot \text{Sn} (A_4 + \alpha_4)}{\text{Sn} (B_1 + \alpha) \cdot \text{Sn} [180 - (A_4 + C_3) - (\alpha_3 + \alpha_4)]}$$

гдѣ:

$B_1 = 88^\circ 42' 25''$	$A_4 = 70^\circ 26' 31''$
$C_2 = 42 \quad 12 \quad 19$	$C_3 = 39 \quad 57 \quad 1$
$B_1 + C_2 = 130 \quad 54 \quad 44$	$A_4 + C_3 = 100 \quad 23 \quad 32$

Уголъ	lg Sn	Табл. разн. на 1"	Уголъ	lg Sn	Табл. разн. на 1"
130° 54' 44"	9,878 3573	— 18,2	88° 42' 25"	9,999 8894	+ 0,4
70 26 31	9,974 1905	+ 7,5	110 23 32	9,971 8922	— 7,8
lg числит. =	9,852 5478	— 10,7	lg знамен. =	9,971 7816	— 7,3

$$- \lg \text{числителя} + \lg \text{знаменателя} = + 0,119 \quad 2338$$

$$\text{Должно быть: } \lg CA - \lg CB = + 0,119 \quad 2342$$

$$\text{Невязка } w = + 4 \text{ ед. послѣдн. знака } \lg.$$

Угловая поправка, которую нужно вычесть изъ угловъ числителя и придать къ угламъ знаменателя оказывается здѣсь настолько маюю (см. формулу на стр. 80, а также § 1, гл. 2, ч. II).

$$c = \frac{4}{10,7 + 7,3} = 0,2$$

что пренебрегая ею, окончательными значеніями угловъ будемъ считать:

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = 88^\circ 42' 25'' - 0,2 = 88^\circ 42' 25'' \\ C_2 = 42 \quad 12 \quad 19 \\ C_3 = 39 \quad 57 \quad 1 \\ A_4 = 70 \quad 26 \quad 31 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Эти значенія весьма мало} \\ \text{отличаются отъ тѣхъ, которыя} \\ \text{получены въ предыдущемъ па-} \\ \text{раграфѣ полнымъ уравновѣ-} \\ \text{шеніемъ.} \end{array}$$

§ 12.

Уравновѣшеніе направленій въ цѣпи треугольниковъ.

Въ треугольникахъ ABC, BCD и DCE (см. ниже гл. 3-я, § 2, чертежъ къ примѣру уравновѣшенія трангуляціонной сѣти) измѣрены съ равнымъ вѣсомъ направленія (черт. 7):

Точка стоянія	Точка визированія	Приведенныя направленія	Искомыя поправки
A	C	0° 0' 0"	α_1
	B	40 1 43	α_2
B	A	0° 0' 0"	α_3
	C	57 49 6	α_4
	D	105 39 10	α_5
D	B	0 0 0	α_6
	C	49 24 0	α_7
	E	110 37 0	α_8
C	E	0 0 0	α_9
	D	47 46 47	α_{10}
	B	130 32 38	α_{11}
	A	212 42 0	α_{12}

Требуется произвести полное уравновѣшеніе *направлений*.

Здѣсь будетъ два условія (т. к. предполагается, что въ точкѣ Е углы не измѣрялись):

1) Сумма угловъ Δ -ка ABC:

$$[(B+\alpha_2)-(C+\alpha_1)]+[(C+\alpha_4)-(A+\alpha_3)]+ \\ +[(A+\alpha_{12})-(B+\alpha_{11})]-180^\circ=0$$

2) Сумма угловъ Δ -ка BCD:

$$[(D+\alpha_5)-(C+\alpha_4)]+[(C+\alpha_7)-(B+\alpha_6)]+[(B+\alpha_{11})-(D+\alpha_{10})]-180=0.$$

но изъ данныхъ наблюденій находимъ:

ΔABC

$$B-C= 40^\circ 1' 43'' +\alpha_2 -\alpha_1$$

$$C-A= 57 49' 6 +\alpha_4 -\alpha_3$$

$$A-B= 82 9 22 +\alpha_{12} -\alpha_{11}$$

$$\text{Сумма}=180^\circ 0' 11''$$

$$\text{Невязка } w_1=+11''$$

ΔBCD

$$D-C= 47^\circ 50' 4'' +\alpha_5 -\alpha_4$$

$$C-A= 49 24 0 +\alpha_7 -\alpha_6$$

$$B-D= 82 45 51 +\alpha_{11} -\alpha_{10}$$

$$\text{Сумма}=179^\circ 59' 55''$$

$$\text{Невязка } w_2=-5''.$$

Слѣдовательно условныя уравненія будутъ:

$$-1.\alpha_1+1.\alpha_2-1.\alpha_3+1.\alpha_4+0.\alpha_5+0.\alpha_6+0.\alpha_7+0.\alpha_8+0.\alpha_9+0.\alpha_{10}-1.\alpha_{11}+1.\alpha_{12}=11$$

$$0.\alpha_1+0.\alpha_2+0.\alpha_3-1.\alpha_4+1.\alpha_5-1.\alpha_6+1.\alpha_7+0.\alpha_8+0.\alpha_9-1.\alpha_{10}+1.\alpha_{11}+0.\alpha_{12}=-5$$

По нимъ составляемъ коэффициенты нормальныхъ уравненій:

№	a	b	aa	ab	bb
1	-1	0	+1	0	0
2	+1	0	+1	0	0
3	-1	0	+1	0	0
4	+1	-1	+1	-1	+1
5	0	+1	0	0	+1
6	0	-1	0	0	+1
7	0	+1	0	0	+1
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	-1	0	0	+1
11	-1	+1	+1	-1	+1
12	+1	0	+1	0	0
			+6=	-2=	+6=
			=[aa]	=[ab]	=[bb]

такъ что нормальныя уравненія съ коррелатами будутъ:

$$+6 \kappa_1 - 2 \kappa_2 + 11 = 0$$

$$-2 \kappa_1 + 6 \kappa_2 - 5 = 0$$

откуда получимъ корреллаты:

$$\kappa_1 = -1,75$$

$$\kappa_2 = +0,25$$

а по нимъ находимъ искомыя поправки угловъ:

$$\alpha_1 = -1 \cdot (-1,75) = +1'',75$$

$$\alpha_2 = +1 \cdot (-1,75) = -1'',75$$

$$\alpha_3 = -1 \cdot (-1,75) = +1'',75$$

$$\alpha_4 = +1 \cdot (-1,75) - 1 \cdot (+0,25) = -2,00$$

$$\alpha_5 = +1 \cdot (0,25) = +0'',25$$

$$\alpha_6 = -1 \cdot (0,25) = -0'',25$$

$$\alpha_7 = +1 \cdot (0,25) = +0'',25$$

$$\alpha_8 = 0'',00$$

$$\alpha_9 = 0'',00$$

$$\alpha_{10} = -1 \cdot (+0,25) = -0'',25$$

$$\alpha_{11} = -1 \cdot (-1,75) + 1 \cdot 0,25 = +2,00$$

$$\alpha_{12} = +1 \cdot (-1,75) = -1'',75$$

Первый контроль: сумма всѣхъ α должна быть равна нулю,—

$$[\alpha] = 0 \text{ (вѣрно)!}$$

Второй контроль [ч. 1, гл. III, § 1, ур. (9)]:

$$[\alpha\alpha] = 20,50$$

$$-[w \cdot \kappa] = 20,50 \text{ (вѣрно)!}$$

Вводя полученныя поправки, найдемъ слѣдующія наивѣроятныя (уравновѣшенныя) значенія направлений:

Точка стояція	Точка визи- рованія	Урівновѣшенныя на- правленія.	Приведенныя урівновѣш. направленія
А	С	0° 0' 1",75	0° 0' 0",00
	В	40 1 41 ,25	40 1 39",50
В	А	0° 0' 1",75	0 0 0 ,00
	С	57 49 4 ,00	57 49 2 ,25
	D	105 39 10 ,25	105 39 8 ,50
D	В	0° 0' 0"—0",25	0 0 0 ,0
	С	49 24 0 ,25	49 24 0 ,50
	Е	110 37 5 ,00	110 37 5 ,25
С	Е	0° 0' 0"	0 0 0 ,00
	D	47 46 46 ,75	47 46 46 ,75
	В	130 32 40 ,00	130 32 40 ,00
	А	212 41 58 ,25	212 41 58 ,25

Контроль:

$\triangle ABC$	$\triangle BCD.$
A= 40° 1' 39",50	B= 47° 50' 6",25
B= 57 49 2 ,25	C= 82 45 53 ,25
C= 82 9 18 ,25	D= 49 24 0 ,50
Сумма=180° 0' 0",00 (вѣрно!)	Сумма=180° 0' 0",00 (вѣрно!)

Средняя ошибка одного направленія послѣ урівновѣшиванія (см. (6) и (7) стр. 60):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{20,49}{2}} = \pm \underline{\underline{3",2}}$$

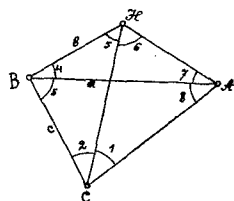
с) Случаи съ четырьмя условными уравненіями.

§ 13.

Уравновѣшеніе угловъ четыреугольника, въ которомъ всѣ пункты доступны и всѣ видимы.

Въ четыреугольникѣ АСВН съ двумя діагоналями измѣрены съ равнымъ вѣсомъ всѣ углы (черт. 8):

Измѣренные углы	Искомыя поправки
$C_1 = 39^\circ 57' 2''$	$+ \alpha_1$
$C_2 = 42 \quad 12 \quad 20$	$+ \alpha_2$
$B_3 = 57 \quad 49 \quad 6$	$+ \alpha_3$
$B_4 = 30 \quad 53 \quad 19$	$+ \alpha_4$
$H_5 = 49 \quad 5 \quad 35$	$+ \alpha_5$
$H_6 = 69 \quad 36 \quad 8$	$+ \alpha_6$
$A_7 = 30 \quad 24 \quad 49$	$+ \alpha_7$
$A_8 = 40 \quad 1 \quad 43$	$+ \alpha_8$



Черт. 8.

Для уравновѣшенія ихъ мы будемъ разсматривать АВСН какъ группу треугольниковъ съ центральною вершиною, напр., въ В.

Число условныхъ уравненій здѣсь равно [по (1), § 1, гл. I, ч. II]:

$$r=8-2 \cdot 4+4=4.$$

изъ которыхъ 3—условія суммы угловъ Δ -ковъ, и 1—условіе сторонъ. Это послѣднее формулируется по теоремѣ синусовъ такъ:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{\text{Sn}(H_5 + \alpha_5 + H_6 + \alpha_6) \cdot \text{Sn}(C_2 + \alpha_2) \cdot \text{Sn}(A_8 + \alpha_8)}{\text{Sn}(A_7 + \alpha_7) \cdot \text{Sn}(H_5 + \alpha_5) \cdot \text{Sn}(C_1 + \alpha_1 + C_2 + \alpha_2)} = 1$$

или:

$$\begin{aligned} & \lg \text{Sn } 118^\circ 41' 43'' - d'(\alpha_5 + \alpha_6) + \lg \text{Sn } 42^\circ 12' 20'' + d'_2 \cdot \alpha_2 + \\ & \lg \text{Sn } 40^\circ 1' 43'' + d'_3 \alpha_6 = \lg \text{Sn } 30^\circ 24' 49'' + d'_1 \cdot \alpha_7 + \\ & + \lg \text{Sn } 49^\circ 5' 35'' + d'_2 \cdot \alpha_5 + \lg \text{Sn } 82^\circ 9' 22'' d'_3 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned}$$

гдѣ всѣ d суть соотвѣтственные табличныя разности $\lg \text{Sn}$ на $1''$;

(передъ d'_1 стоитъ знакъ минусъ, т. к. Sn угла $> 90^\circ$ уменьшается съ увеличеніемъ угла).

Слѣдовательно съ полною достаточной точностью:

lg Sn	Табличн. разн. на $1'' \times d$
$\lg \text{Sn} (H_5 + \alpha_5 + H_6 + \alpha_6) = 9,943\ 0915 -$	$-11,5(\alpha_5 + \alpha_6)$
$\lg \text{Sn} (C_2 + \alpha_2) = 9,827\ 2351 +$	$+13,2 \cdot \alpha_2$
$\lg \text{Sn} (A_8 + \alpha_8) = 9,803\ 3258 +$	$+15,1 \cdot \alpha_8$
$\lg \text{числителя} = 9,578\ 6524 +$	$+\Sigma_1$

lg Sn	Табличн. разн. $1'' \times d$
$\lg \text{Sn} (A_7 + \alpha_7) = 9,704\ 3553 +$	$+35,8 \cdot \alpha_7$
$\lg \text{Sn} (H_5 + \alpha_5) = 9,878\ 3920 +$	$\cdot 18,2 \cdot \alpha_5$
$\lg \text{Sn} (C_1 + \alpha_1 + C_2 + \alpha_2) = 9,995\ 9175 +$	$+2,9(\alpha_1 + \alpha_2)$
$\lg \text{знаменателя} = 9,578\ 6548$	$+\Sigma_2$

$$(\lg \text{числителя}) - (\lg \text{знаменателя}) = 0 = \underbrace{9,5786524 - 9,5786548}_{-24 \text{ ед. послѣд. знака } \lg} + \Sigma_1 - \Sigma_2$$

или:

$$-24 - 11,5(\alpha_5 + \alpha_6) + 23,2 \cdot \alpha_2 + 25,1 \cdot \alpha_8 - 35,8 \cdot \alpha_7 - 18,2 \cdot \alpha_5 - 2,9(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

или окончательно условіе сторонъ выразится такъ:

$$-2,9 \cdot \alpha_1 + 20,3 \cdot \alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 - 29,7 \cdot \alpha_5 - 11,5 \cdot \alpha_6 - 35,8 \cdot \alpha_7 + 25,1 \cdot \alpha_8 - 24 = 0 \dots (1)$$

Условія же суммы угловъ Δ -ковъ будутъ (мы выбрали уже 3 Δ -ка изъ всѣхъ 4-хъ съ общою вершиною В):

для Δ -ка АВС:

$$(A_8 + \alpha_8) + (C_1 + C_2 + \alpha_1 + \alpha_2) + (B_3 + \alpha_3) - 180 = 0$$

для Δ -ка АВН:

$$(A_7 + \alpha_7) + (B_4 + \alpha_4) + (H_5 + H_6 + \alpha_5 + \alpha_6) - 180 = 0$$

для Δ -ка СВН:

$$(C_2 + \alpha_2) + (B_3 + B_4 + \alpha_3 + \alpha_4) + (H_5 + \alpha_5) - 180 = 0$$

или, поставивъ значенія угловъ, находимъ невязки:

ΔABC	ΔABH	ΔCBH
$A_8 = 40^\circ 1' 43'' + \alpha_1$	$A_7 = 30^\circ 24' 49'' + \alpha_7$	$C_2 = 42^\circ 12' 20'' + \alpha_2$
$C_1 + C_2 = 82 \ 9 \ 22 + \alpha_1 + \alpha_2$	$B_4 = 30 \ 53 \ 19 + \alpha_4$	$B_3 + B_4 = 88 \ 42 \ 25 + \alpha_3 + \alpha_4$
$B_3 = 57 \ 49 \ 6 + \alpha_3$	$H_5 + H_6 = 118 \ 41 \ 43 + \alpha_5 + \alpha_6$	$H_5 = 49 \ 5 \ 35 + \alpha_5$
Сумма $= 180^\circ \ 0' \ 11''$	Сумма $= 179^\circ \ 59' \ 51''$	Сумма $= 180^\circ \ 0' \ 20''$
$w_1 = +11''$	$w_2 = -9''$	$w_3 = +20''$

слѣдовательно остальные 3 условныхъ уравненія будутъ:

$$1. \alpha_1 + 1. \alpha_2 + 1. \alpha_3 + 0. \alpha_4 + 0. \alpha_5 + 0. \alpha_6 + 0. \alpha_7 + 1. \alpha_8 + 11 = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

$$0. \alpha_1 + 0. \alpha_2 + 0. \alpha_3 + 1. \alpha_4 + 1. \alpha_5 + 1. \alpha_6 + 1. \alpha_7 + 0. \alpha_8 - 9 = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

$$0. \alpha_1 + 1. \alpha_2 + 1. \alpha_3 + 1. \alpha_4 + 1. \alpha_5 + 0. \alpha_6 + 0. \alpha_7 + 0. \alpha_8 + 20 = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ: $w_1 = +11$; $w_2 = -9$; $w_3 = +20$.

Изъ (1), (2), (3) и (4) вмѣстѣ взятыхъ мы могли-бы составить обычнымъ способомъ уравненія коррелятъ и нормальныя уравненія, рѣшивъ которыя по способу исключенія неизвѣстныхъ Гаусса (часть I, гл. II, мы нашли-бы всѣ поправки α ; это было-бы полное уравновѣшеніе; однако, въ виду его сложности и въ виду простоты коэффициентовъ (2), (3) и (4), гораздо проще будетъ и вполне достаточно выдѣлить (1) особо, рѣшивъ сперва (2), (3) и (4).

Изъ этихъ послѣднихъ составляемъ уравненія коррелятъ (взявъ вертикальныя суммы):

$$\alpha_1 = 1. K_1 + 0. K_2 + 0. K_3 = K_1$$

$$\alpha_2 = 1. K_1 + 0. K_2 + 1. K_3 = K_1 + K_3$$

$$\alpha_3 = 1. K_1 + 0. K_2 + 1. K_3 = K_1 + K_3$$

$$\alpha_4 = 0. K_1 + 1. K_2 + 1. K_3 = K_2 + K_3$$

$$\alpha_5 = 0. K_1 + 1. K_2 + 1. K_3 = K_2 + K_3$$

$$\alpha_6 = 0. K_1 + 1. K_2 + 0. K_3 = K_2$$

$$\alpha_7 = 0. K_1 + 1. K_2 + 0. K_3 = K_2$$

$$\alpha_8 = 1. K_1 + 0. K_2 + 0. K_3 = K_1$$

Подставивъ обратно во (2), (3) и (4) и взявъ горизонтальныя суммы получаемъ нормальныя уравненія:

$$4.k_1 + 0.k_2 + 2.k_3 + 11 = 0$$

$$0.k_1 + 4.k_2 + 2.k_3 - 9 = 0$$

$$2.k_1 + 2.k_2 + 4.k_3 + 20 = 0$$

Для рѣшенія складываемъ ихъ вмѣстѣ,—получимъ:

$$k_1 + k_2 + \frac{4}{3} k_3 + 3,67 = 0 \text{ (гдѣ } \frac{[w]}{6} = 3,67).$$

складывая же первыя два:

$$k_1 + k_2 + k_3 + 0,50 = 0 \left(\text{гдѣ } 0,50 = \frac{[w] - w_3}{4} \right)$$

Слѣдовательно:

$$k_3 = -9,5$$

$$k_2 = +7,0$$

$$k_1 = +2,0$$

Теперь находимъ поправки угловъ по условіямъ суммы угловъ:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1 = +2'',0 & \alpha_3 = -7'',5 & \alpha_5 = -2'',5 & \alpha_7 = +7'',0 \\ \alpha_2 = -7'',5 & \alpha_4 = -2'',5 & \alpha_6 = +7'',0 & \alpha_8 = +2'',0 \end{array}$$

Контроль сдѣлаемъ по формулѣ: $[\alpha\alpha] = -[w.k]$ (см. (6), стр. 60):

—w	k	wk
—11	+2,0	— 22
+ 9	+7,0	+ 63
—20	—9,5	+100
—[wk] = 231		

$\alpha_1^2 = 4,0$	$\alpha_5^2 = 6,2$
$\alpha_2^2 = 56,3$	$\alpha_6^2 = 49,0$
$\alpha_3^2 = 56,3$	$\alpha_7^2 = 49,0$
$\alpha_4^2 = 6,2$	$\alpha_8^2 = 4,9$
$[\alpha\alpha] = 231$ — верно!	

Средняя ошибка одного измѣренія угла послѣ перваго уравновѣшенія (см. (7), стр. 60):

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[\alpha\alpha]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{231}{4}} = \pm 7'',6.$$

Введя всѣ эти α_i въ данныя измѣренія съ округленіемъ до десятыхъ долей секунды, получимъ:

Исправленные углы	Новыя поправки
$C_1=39^{\circ} 57' 4'',0$	$+\epsilon_1$
$C_2=42 12 12,5$	$+\epsilon_2$
$B_3=57 48 58,5$	$+\epsilon_3$
$B_4=30 53 16,5$	$+\epsilon_4$

Исправленные углы	Новыя поправки
$H_5=49^{\circ} 5' 32'',5$	$+\epsilon_5$
$H_6=69 36 15,0$	$+\epsilon_6$
$A_7=30 24 56,0$	$+\epsilon_7$
$A_8=40 1 45,0$	$+\epsilon_8$

Контроль:

$\triangle ABC$	$\triangle ABH$	$\triangle CBH$
$A_2= 40^{\circ} 1' 45'',0$	$A_7= 30^{\circ} 24' 56,0$	$C_2= 42^{\circ} 12' 12'',5$
$C_1+C_2= 82 9 16,5$	$B_4= 30 53 16,5$	$B_3+B_4= 88 42 15,0$
$B_3= 57 48 58,5$	$H_5+H_6=118 41 47,5$	$H_5= 49 5 32,5$
Сумма=180 0 0,0	Сумма=180 0 0,0	Сумма=180 0 0,0

Теперь остается ввести новыя поправки, чтобы удовлетворить условіе сторонъ:

$$\frac{\text{Sn } (H_5+H_6). \text{Sn } C_2. \text{Sn } A_8}{\text{Sn } A_7. \text{Sn } H_5. \text{Sn } (C_1+C_2)} = 1.$$

Опредѣлимъ невязку его:

Уголь	$\lg \text{ Sn}$	Табл. разн. на 1"
$H_5+H_6=118^{\circ} 41' 47'',5$	9,943 0864	—11,5
$C_2= 42 12 12,5$	9,827 2177	+23,5
$A_8= 40 1 45,0$	9,808 3308	+25,1
$\lg \text{ числителя} = 9,578 6349$		+36,8

Уголъ	lg Sn	Табл. разн. на 1"
$A_7 = 30^\circ 24' 56'',0$	9,704 3803	+35,8
$H_5 = 49 \ 5 \ 32 \ ,5$	9,878 3876	+18,2
$C_1 + C_2 = 82 \ 9 \ 16 \ ,5$	9,995 9159	+ 2,9
lg знаменателя = 9,578 6838		+56,9

Невязка = lg числителя — lg знаменателя = $w = -489$ ед. посл. зн. lg.

Назвавъ черезъ с величину поправокъ, которыя нужно придать къ угламъ числителя и вычесть изъ угловъ знаменателя, чтобы не нарушить выше удовлетворенныхъ условий суммы угловъ каждаго Δ -ка и взявъ сумму всѣхъ табличныхъ разностей:

$$[d] = 36,8 + 56,9 = 93,7$$

находимъ поправку на условіе сторонъ (см. стр. 80):

$$c = \frac{489}{93,7} = \pm 5,2$$

Такимъ образомъ окончательно уравновѣшенные углы будутъ:

ΔABC	ΔABH	ΔCBH
$A_8 = 40^\circ 1' 50'',2$	$A_7 = 30^\circ 24' 50'',8$	$C_3 = 42^\circ 12' 17'',5$
$C_1 + C_2 = 82 \ 9 \ 11 \ ,3$	$B_4 = 30 \ 53 \ 16 \ ,5$	$B_3 + B_4 = 88 \ 42 \ 15'',0$
$B_3 = 57 \ 48 \ 58 \ ,5$	$H_5 + H_6 = 118 \ 41 \ 52 \ ,7$	$H_5 = 49 \ 5 \ 29'',5$
$180^\circ 0'0'',0$	$180^\circ 0' 0'',0$	$180^\circ 0' 0'',0$

Если же, въ виду необходимости имѣть возможно точное рѣшеніе вопроса, желательно произвести полное уравновѣшеніе, то, рѣшая всѣ условныя уравненія одновременно, выписываемъ ихъ въ видѣ таблицы:

№ ур.	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	w
1	-2,9	+20,3	0	0	-29,7	-11,5	-35,8	+25,1	-24
2	+1	+1	+1	0	0	0	0	+1	+11
3	0	0	0	+1	+1	+1	+1	0	- 9
4	0	+1	+1	+1	+1	0	0	0	+20

По нимъ составляемъ уравненія корреллатъ:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -2,9 \cdot K_1 + 1 \cdot K_2 + 0 \cdot K_3 + 0 \cdot K_4 = -2,9 \cdot K_1 + K_2 \\ \alpha_2 &= +20,3 \cdot K_1 + 1 \cdot K_2 + 0 \cdot K_3 + 1 \cdot K_4 = +20,3 \cdot K_1 + K_2 + K_4 \\ \alpha_3 &= 0 \cdot K_1 + 1 \cdot K_2 + 0 \cdot K_3 + 1 \cdot K_4 = K_2 + K_4 \\ \alpha_4 &= 0 \cdot K_1 + 0 \cdot K_2 + 1 \cdot K_3 + 1 \cdot K_4 = K_3 + K_4 \\ \alpha_5 &= -29,7 \cdot K_1 + 0 \cdot K_2 + 1 \cdot K_3 + 1 \cdot K_4 = -29,7 \cdot K_1 + K_3 + K_4 \\ \alpha_6 &= -11,5 \cdot K_1 + 0 \cdot K_2 + 1 \cdot K_3 + 0 \cdot K_4 = -11,5 \cdot K_1 + K_3 \\ \alpha_7 &= -35,8 \cdot K_1 + 0 \cdot K_2 + 1 \cdot K_3 + 0 \cdot K_4 = -35,8 \cdot K_1 + K_3 + K_4 \\ \alpha_8 &= +25,1 \cdot K_1 + 1 \cdot K_2 + 0 \cdot K_3 + 0 \cdot K_4 = +25,1 \cdot K_1 + K_2\end{aligned}$$

Далѣ составляемъ коэффициенты нормальныхъ уравненій:

a	b	c	d	aa	ab	ac	ad	bb	bc	bd	cc	cd	dd
- 2,9	+1	0	0	+ 8,41	- 2,9	- 2,9	0	+1	0	0	0	0	0
+20,3	+1	0	+1	+ 412,09	+20,3	0	+20,3	+1	0	+1	0	0	+1
0	+1	0	+1	0	0	0	0	+1	0	+1	0	0	+1
0	0	+1	+1	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	+1
-29,7	0	+1	+1	+ 882,09	-29,7	-29,7	-29,7	0	0	0	+1	+1	+1
-11,5	0	+1	0	+ 132,25	0	-11,5	0	0	0	0	+1	0	0
-35,8	0	+1	0	+1281,64	0	-35,8	0	0	0	0	+1	0	0
+25,1	+1	0	0	+ 630,01	+25,1	0	0	+1	0	0	0	0	0
				+3346,5 =[aa]	+12,8 =[ab]	-79,9 =[ac]	- 9,4 =[ad]	+ 4 =[bb]	0 =[bc]	+ 2 =[bd]	+ 4 =[cc]	+ 2 =[cd]	+ 4 =[dd]

И, наконецъ, нормальныя уравненія ((8), § 1, Гл. III, ч. I):

$$\begin{aligned}& +3346,5 \cdot K_1 + 12,8 \cdot K_2 - 79,9 \cdot K_3 - 9,4 \cdot K_4 - 24 = 0 \\ & + 12,8 \cdot K_1 + 4 \cdot K_2 + 0 \cdot K_3 + 2 \cdot K_4 + 11 = 0 \\ & - 79,9 \cdot K_1 + 0 \cdot K_2 + 4 \cdot K_3 + 2 \cdot K_4 - 9 = 0 \\ & - 9,4 \cdot K_1 + 2 \cdot K_2 + 2 \cdot K_3 + 4 \cdot K_4 + 20 = 0\end{aligned}$$

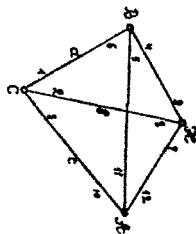
Рѣшивъ эти уравненія по способу исключенія Гаусса (часть I-я, гл. II) и подставивъ полученныя k_i въ выраженія для всѣхъ α_i , мы и найдемъ наивѣроятныя поправки угловъ.

§ 14.

Уравновѣшеніе направленій въ полномъ четырехугольникѣ, въ которомъ всѣ пункты доступны и всѣ видимы.

Въ четырехугольникѣ (черт. 9) АСВН даны два пункта С и Н; для опредѣленія положенія двухъ другихъ А и В измѣрены по способу приѣмовъ *направленія*, которые требуется уравновѣсить:

Точка стоян.	Точка визи- рован.	Направление	По- правка	Точка стоян.	Точка визи- рован.	Направление	По- правка
С	В	0° 0' 0"	α_1	Н	А	0° 0' 0"	α_7
	Н	42 12 20	α_2		С	69 36 8	α_8
	А	82 9 22	α_3		В	118 41 45	α_9
В	Н	0° 0' 0"	α_4	А	С	0° 0' 0"	α_{10}
	А	30 53 19	α_5		В	40 1 43	α_{11}
	С	88 42 25	α_6		Н	70 26 31	α_{12}



Черт. 9

Здѣсь также, какъ въ § 6, четыре условныхъ уравненія, изъ которыхъ 3 условія угловъ Δ -ковъ и 1 условіе сторонъ.

Составляемъ суммы угловъ:

$$\begin{array}{rcl}
 \triangle ACB & & \\
 C = 82^\circ 9' 22'' & + & \alpha_3 - \alpha_1 \\
 B = 57 49 6 & + & \alpha_6 - \alpha_5 \\
 A = 40 1 43 & + & \alpha_{11} - \alpha_{10} \\
 \hline
 \text{Сумма} = 180^\circ 0' 11'' & & \\
 w_1 = +11'' & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \triangle ABH & & \\
 A = 30^\circ 24' 47'' & + & \alpha_{12} - \alpha_{11} \\
 B = 30 53 19 & + & \alpha_5 - \alpha_4 \\
 H = 118 41 45 & + & \alpha_9 - \alpha_7 \\
 \hline
 \text{Сумма} = 179^\circ 59' 51'' & & \\
 w_2 = -9'' & &
 \end{array}$$

$\triangle CBH$

$$\begin{array}{rcl}
 C = 42^\circ 12' 20'' & + & \alpha_2 - \alpha_1 \\
 B = 88 42 25 & + & \alpha_6 - \alpha_5 \\
 H = 49 5 37 & + & \alpha_9 - \alpha_8 \\
 \hline
 \text{Сумма} = 180^\circ 0' 22'' & & \\
 w_3 = +22'' & &
 \end{array}$$

Слѣдовательно условія суммы угловъ $\triangle$ -ковъ будутъ:

$$(\alpha_3 - \alpha_1) + (\alpha_6 - \alpha_5) + (\alpha_{11} - \alpha_{10}) - 11 = 0$$

$$(\alpha_{12} - \alpha_{11}) + (\alpha_5 - \alpha_4) - (\alpha_9 - \alpha_7) + 9 = 0$$

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_6 - \alpha_5) + (\alpha_9 - \alpha_8) - 22 = 0$$

Или:

$$\begin{aligned} -1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 0.\alpha_4 - 1.\alpha_5 + 1.\alpha_6 + 0.\alpha_7 + 0.\alpha_8 + 0.\alpha_9 - 1.\alpha_{10} + \\ + 1.\alpha_{11} + 0.\alpha_{12} - 11 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 0.\alpha_3 - 1.\alpha_4 + 1.\alpha_5 + 0.\alpha_6 - 1.\alpha_7 + 0.\alpha_8 + 1.\alpha_9 + 0.\alpha_{10} - \\ - 1.\alpha_{11} + 1.\alpha_{12} + 9 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -1.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3 - 1.\alpha_4 + 0.\alpha_5 + 1.\alpha_6 + 0.\alpha_7 - 1.\alpha_8 + 1.\alpha_9 + 0.\alpha_{10} + \\ + 0.\alpha_{11} + 0.\alpha_{12} - 22 = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

а условіе сторонъ

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} =$$

$$\frac{\text{Sn} (H_9 - H_8 + \alpha_9 - \alpha_8) \cdot \text{Sn} (A_{12} - A_{10} + \alpha_{12} - \alpha_{10}) \cdot \text{Sn} (B_6 - B_5 + \alpha_6 - \alpha_5)}{\text{Sn} (B_6 - B_4 - \alpha_6 - \alpha_4) \cdot \text{Sn} (H_8 - H_7 + \alpha_8 - \alpha_7) \cdot \text{Sn} (A_{11} - A_{10} + \alpha_{11} - \alpha_{10})} = 1$$

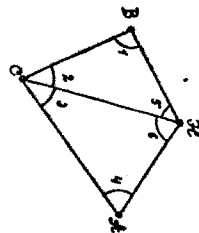
Дальнѣйшее рѣшеніе ничѣмъ не отличается отъ предыдущаго.

§ 15.

Уравновѣшеніе четырехугольника при опредѣленіи координатъ доступной точки по тремъ даннымъ точкамъ.

Даны координаты (черт. 10):

Точки	X	Y
A	+1502,228	+2477,610
C	+1446,148	+2380,621
B	+1524,979	+2348,462



Черт. 10.

Измѣрены углы (на всѣхъ вершинахъ □-ка):

$$B_1=88^\circ 42' 25'' + \alpha_1$$

$$C_2=42 \quad 12 \quad 20 + \alpha_2$$

$$C_3=39 \quad 57 \quad 2 + \alpha_3$$

$$A_4=70 \quad 26 \quad 31 + \alpha_4$$

$$H_5=49 \quad 5 \quad 37 + \alpha_5$$

$$H_6=69 \quad 36 \quad 8 + \alpha_6$$

По даннымъ координатамъ вычисленіе длинъ даетъ:

$$\lg BC=1,930 \quad 1220$$

$$\lg CA=2,049 \quad 3562$$

$$\text{Разность}=0,119 \quad 2342$$

Опредѣлить наивѣроятныя координаты Н?

Здѣсь будетъ всего четыре условныхъ уравненія:

- 1) Сумма угловъ $C_2 + C_3$ должна равняться углу между СВ и FG, азимуты которыхъ вычисляются изъ координатъ.
- 2) Сумма угловъ $\triangle$ -ка ВСН должна $=180^\circ$.
- 3) Сумма угловъ $\triangle$ -ка АСН должна $=180^\circ$.
- 4) Условіе сторонъ: вычисливъ НС по ВС и перейдя отъ СН къ АС, мы должны получить для АС ту-же величину, какая получается для нея изъ координатъ А и С.

1-е условіе:

По координатамъ вычисляемъ:

Азим. (СВ) $= 337^\circ 48' 28''$	$C_2 = 42^\circ 12' 20'' + \alpha_2$
Азим. (СА) $= 59 \quad 57 \quad 48$	$C_3 = 39 \quad 57 \quad 2 + \alpha_3$
ВСА $= 82^\circ 9' 20''$	ВСА $= 82^\circ 9' 22'' + \alpha_2 + \alpha_3$
$w_1 = 82^\circ 9' 22'' - 82^\circ 9' 19'' = +2''.$	

такъ что 1-е условное уравненіе будетъ:

$$0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 0.\alpha_4 + 0.\alpha_5 + 0.\alpha_6 + 2 = 0 \quad (1)$$

2-е условие:

$$B_1 = 88^\circ 42' 25'' + \alpha_1$$

$$C_2 = 42 \quad 12 \quad 20 + \alpha_2$$

$$H_5 = 49 \quad 5 \quad 37 + \alpha_5$$

$$\text{Сумма} = 180^\circ 0' 22'' + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5$$

$$w_2 = +22''$$

$$1.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 0.\alpha_3 + 0.\alpha_4 + 1.\alpha_5 + 0.\alpha_6 + 22 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

3-е условие:

$$C_3 = 39^\circ 57' 2'' + \alpha_3$$

$$A_4 = 70 \quad 26 \quad 31 + \alpha_4$$

$$H_6 = 69 \quad 36 \quad 8 + \alpha_6$$

$$\text{Сумма} = 179^\circ 59' 41'' + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6$$

$$w_3 = -19''$$

$$0.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 1.\alpha_3 + 1.\alpha_4 + 0.\alpha_5 + 1.\alpha_6 - 19 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

4-е условие:

$$\frac{BC}{CH} = \frac{\text{Sn } H_5}{\text{Sn } B_1}, \quad \frac{CH}{AC} = \frac{\text{Sn } A_4}{\text{Sn } H_6}$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{\text{Sn } (49^\circ 5' 37'' + \alpha_5) \cdot \text{Sn } (70^\circ 26' 31'' + \alpha_4)}{\text{Sn } (88^\circ 42' 25'' + \alpha_1) \cdot \text{Sn } (69^\circ 36' 8'' + \alpha_6)}$$

Уголъ	lg Sn	Табл. разность на 1"	Уголъ	lg Sn	Табл. разность на 1"
49° 5' 37"	9,878 3956	+18,2	88° 42' 25"	9,999 8894	+0,4
70 26 31	9,974 1905	+ 7,5	69 36 8	9,971 8765	+7,8
lg числит.=	9,852 5861	+25,7	lg знамен.=	9,971 7659	+8,2

$$\lg AC - \lg BC = 9,9717659 - 9,8525861 = 0,1191798.$$

Должно быть:

$$\lg AC - \lg BC = 2,0493541 - 1,9301229 = 0,1192342$$

$$w_4 = -544 \text{ ед. посл. знака } \lg.$$

Слѣдовательно:

$$+18,2.\alpha_5 + 7,5.\alpha_4 - 0,4.\alpha_1 - 7,8.\alpha_6 - 544 = 0$$

или

$$-0,4.\alpha_1 + 0.\alpha_2 + 0.\alpha_3 - 7,5.\alpha_4 + 18,2.\alpha_5 - 7,8.\alpha_6 - 544 = 0 \dots (4)$$

Изъ (1), (2), (3) и (4) составляемъ уравненія коррелятъ:

$$\alpha_1 = 0.K_1 + 1.K_2 + 0.K_3 - 0,4.K_4$$

$$\alpha_2 = 1.K_1 + 1.K_2 + 0.K_3 + 0.K_4$$

$$\alpha_3 = 1.K_1 + 0.K_2 + 1.K_3 + 0.K_4$$

$$\alpha_4 = 0.K_1 + 0.K_2 + 1.K_3 - 7,5.K_4$$

$$\alpha_5 = 0.K_1 + 1.K_2 + 0.K_3 + 18,2.K_4$$

$$\alpha_6 = 0.K_1 + 0.K_2 + 1.K_3 - 7,8.K_4$$

Теперь коэффициенты нормальныхъ уравненій:

a	b	c	d	aa	ab	ac	ad	bb	bc	bd	cc	cd	dd
0	+1	0	- 0,4	0	0	0	0	+1	0	-0,4	0	0	0,16
+1	+1	0	0	+1	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0
+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	0	0	0	+1	0	0
0	0	+1	- 7,5	0	0	0	0	0	0	0	+1	-7,5	56,25
0	+1	0	+18,2	0	0	0	0	+1	0	+18,2	0	0	331,24
0	0	+1	- 7,8	0	0	0	0	0	0	0	+1	-7,8	60,84
				$\begin{smallmatrix} +2 \\ \parallel \\ [aa] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +1 \\ \parallel \\ [ab] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +1 \\ \parallel \\ [ac] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ \parallel \\ [ad] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +3 \\ \parallel \\ [bb] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0 \\ \parallel \\ [bc] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +17,8 \\ \parallel \\ [bd] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} +3 \\ \parallel \\ [cc] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} -15,3 \\ \parallel \\ [cd] \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1048,49 \\ \parallel \\ [dd] \end{smallmatrix}$

Нормальныя уравненія:

$$2.K_1 + 1.K_2 + 1.K_3 + 0.K_4 + 2 = 0$$

$$1.K_1 + 3.K_2 + 0.K_3 + 17,8.K_4 + 22 = 0$$

$$+1.K_1 + 0.K_2 + 3.K_3 - 15,3.K_4 - 19 = 0$$

$$0.K_1 + 17,8.K_2 - 15,3.K_3 + 1048,49.K_4 - 544 = 0$$

Опредѣливъ отсюда всѣ k , вычисляемъ по нимъ всѣ поправки α , введя которыя въ измѣренныя углы, вычисляемъ обычнымъ способомъ искомыя координаты.

d) Случай шести условныхъ уравнений.

§ 16.

Уравновѣшеніе цѣпи треугольниковъ съ двумя независимо измѣренными базисами.

Въ приводимой цѣпи треугольниковъ измѣрены два базиса (черт. 11):

$$\lg BF = 2,180\ 3575$$

$$\lg ML = 2,276\ 9754$$

$$\lg ML - \lg BF = 0,096\ 6179$$

и углы (α_1 —искомыя поправки):

$$\triangle BFC$$

$$F_1 = 34^\circ\ 7'\ 28'' + \alpha_1$$

$$C_2 = 93\ 17\ 13 + \alpha_2$$

$$B_3 = 52\ 36\ 5 + \alpha_3$$

$$\text{Сумма} = 180^\circ\ 0'\ 46''$$

$$\text{Невязка} = w_1 = +46''$$

$$\triangle ABC$$

$$C_4 = 82^\circ\ 9'\ 22'' + \alpha_4$$

$$B_5 = 57\ 49\ 6 + \alpha_5$$

$$A_6 = 40\ 1\ 43 + \alpha_5$$

$$\text{Сумма} = 180^\circ\ 0'\ 11''$$

$$\text{Невязка} = w_2 = +11''$$

$$\triangle CAG$$

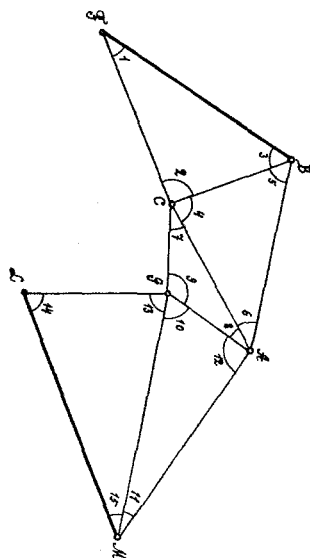
$$C_7 = 30^\circ\ 4'\ 55'' + \alpha_7$$

$$A_8 = 26\ 3\ 42 + \alpha_8$$

$$G_9 = 123\ 50\ 48 + \alpha_9$$

$$\text{Сумма} = 179^\circ\ 59'\ 26''$$

$$\text{Невязка} = w_3 = -34''$$



Черт. 11.

$$\triangle AMG$$

$$G_{10} = 66^\circ\ 50'\ 35'' + \alpha_{10}$$

$$M_{11} = 22\ 19\ 36 + \alpha_{11}$$

$$A_{12} = 90\ 50\ 23 + \alpha_{12}$$

$$\text{Сумма} = 180^\circ\ 0'\ 34''$$

$$\text{Невязка} = w_4 = +34''$$

$$\triangle MLG$$

$$G_{13} = 79^\circ\ 16'\ 43'' + \alpha_{13}$$

$$L_{14} = 67\ 28\ 42 + \alpha_{14}$$

$$M_{15} = 33\ 13\ 43 + \alpha_{15}$$

$$\text{Сумма} = 180^\circ\ 0'\ 8''$$

$$\text{Невязка} = w_5 = +8''$$

Здѣсь будетъ всего 6 условныхъ уравненій: 5 условій суммы угловъ Δ -ка и 1 условіе базисовъ:

$$1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.\alpha_3+0.\alpha_4+0.\alpha_5+0.\alpha_6+0.\alpha_7+0.\alpha_8+0.\alpha_9+0.\alpha_{10}+ \\ +0.\alpha_{11}+0.\alpha_{12}+0.\alpha_{13}+0.\alpha_{14}+0.\alpha_{15}+46=0 \dots \dots \dots (1)$$

$$0.\alpha_1+0.\alpha_2+0.\alpha_3+1.\alpha_4+1.\alpha_5+1.\alpha_6+0.\alpha_7+0.\alpha_8+0.\alpha_9+0.\alpha_{10}+ \\ +0.\alpha_{11}+0.\alpha_{12}+0.\alpha_{13}+0.\alpha_{14}+0.\alpha_{15}+11=0 \dots \dots \dots (2)$$

$$0.\alpha_1+0.\alpha_2+0.\alpha_3+0.\alpha_4+0.\alpha_5+0.\alpha_6+1.\alpha_7+1.\alpha_8+1.\alpha_9+0.\alpha_{10}+ \\ +0.\alpha_{11}+0.\alpha_{12}+0.\alpha_{13}+0.\alpha_{14}+0.\alpha_{15}-34=0 \dots \dots \dots (3)$$

$$0.\alpha_1+0.\alpha_2+0.\alpha_3+0.\alpha_4+0.\alpha_5+0.\alpha_6+0.\alpha_7+0.\alpha_8+0.\alpha_9+1.\alpha_{10}+ \\ +1.\alpha_{11}+1.\alpha_{12}+0.\alpha_{13}+0.\alpha_{14}+0.\alpha_{15}+34=0 \dots \dots \dots (4)$$

$$0.\alpha_1+0.\alpha_2+0.\alpha_3+0.\alpha_4+0.\alpha_5+0.\alpha_6+0.\alpha_7+0.\alpha_8+0.\alpha_9+0.\alpha_{10}+ \\ +0.\alpha_{11}+0.\alpha_{12}+1.\alpha_{13}+1.\alpha_{14}+1.\alpha_{15}+6=0 \dots \dots \dots (5)$$

Условіе-же базисовъ выведется такъ:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{Sn C_2}{Sn F_1}, \frac{BC}{CA} = \frac{Sn A_6}{Sn B_5}, \frac{CA}{AG} = \frac{Sn G_9}{Sn C_7}, \frac{AG}{MG} = \frac{Sn M_{11}}{Sn A_{12}}, \frac{MG}{ML} = \frac{Sn L_{14}}{Sn G_{13}}$$

откуда (выписывая углы съ поправками):

$$\frac{BF}{ML} = \frac{Sn (C_2+\alpha_2) \cdot Sn (A_6+\alpha_6) \cdot Sn (G_9+\alpha_9) \cdot Sn (M_{11}+\alpha_{11}) \cdot Sn (L_{14}+\alpha_{14})}{Sn (F_1+\alpha_1) \cdot Sn (B_5+\alpha_5) \cdot Sn (C_7+\alpha_7) \cdot Sn (A_{12}+\alpha_{12}) \cdot Sn (G_{13}+\alpha_{13})}$$

Уголъ.	lg Sn	Табличн. разн. на 1"	Уголъ.	lg Sn	Табличн. разн. на 1"
$C_2 = 93^\circ 17' 13''$	9,999 2850	— 1,2	$F_1 = 34^\circ 7' 28''$	9,748 9569	+31,0
$A_6 = 40 \quad 1 \quad 43$	9,808 3258	+25,1	$B_5 = 57 \quad 49 \quad 6$	9,927 5570	+13,3
$G_9 = 123 \quad 50 \quad 48$	9,919 3559	—14,1	$C_7 = 30 \quad 4 \quad 56$	9,700 0476	+36,3
$M_{11} = 22 \quad 19 \quad 36$	9,579 6541	+51,2	$A_{12} = 90 \quad 50 \quad 23$	9,999 9533	— 0,3
$L_{14} = 67 \quad 28 \quad 42$	9,965 5472	+ 8,7	$G_{13} = 79 \quad 16 \quad 43$	9,992 3518	+ 3,9
lg числит. =	9,272 1680		lg знамен. =	9,368 8666	

lg знамен.—lgчислит. равенъ:

$$lg ML - lg BF = 0,096 \quad 6986$$

$$\text{должно быть} = 0,096 \quad 6179$$

$$w_6 = +807 \text{ ед. посл.зн. lg.}$$

и нормальныя уравненія будутъ (т. к. $[ab]=[ac]=[ad]=[ae]=[bc]=[bd]=[be]=[cd]=[ce]=0$):

$$\begin{aligned} 3. K_1 + 0. K_2 + 0. K_3 + 0. K_4 + 0. K_5 - 32,2. K_6 + 46 &= 0 \\ 0. K_1 + 3. K_2 + 0. K_3 + 0. K_4 + 0. K_5 + 11,8. K_6 + 11 &= 0 \\ 0. K_1 + 0. K_2 + 3. K_3 + 0. K_4 + 0. K_5 - 50,4. K_6 - 34 &= 0 \\ 0. K_1 + 0. K_2 + 0. K_3 + 3. K_4 + 0. K_5 + 51,5. K_6 + 34 &= 0 \\ 0. K_1 + 0. K_2 + 0. K_3 + 0. K_4 + 3. K_5 + 4,8. K_6 + 6 &= 0 \\ -33,2. K_1 + 11,8. K_2 - 50,4. K_3 + 51,5. K_4 + 4,8. K_5 + 6000. K_6 + 807 &= 0 \end{aligned}$$

Рѣшивъ эти уравненія, т. е. опредѣливъ всѣ коррелаты K , мы найдемъ по нимъ всѣ поправки α , а затѣмъ получимъ и уравновѣшенные углы.

Такой способъ уравновѣшенія весьма сложенъ и его лучше замѣнить сокращеннымъ (см. слѣд. главу).

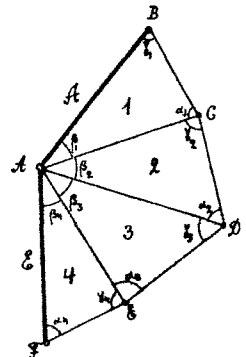
ГЛАВА II.

Полный примѣръ триангуляціи съ сокращеннымъ уравновѣшеніемъ еѣти по частямъ (по формуляръ F. Gauss'a).

§ 1.

Предварительныя замѣчанія.

Всю сѣть, какъ упомянуто въ § 1 предыдущей главы, мы разбиваемъ на рядъ отдѣльныхъ группъ треугольниковъ (между ними могутъ быть и четырехугольники безъ діагоналей). Пусть одна изъ такихъ группъ, представленная на черт. 12, состоитъ изъ $n=4$ треуг. Условныя уравненія будутъ:



Черт. 12.

А) Сумма угловъ каждаго Δ -ка $=180^\circ$:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 180$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 = 180$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n + \delta_n = 180$$

$$\left. \begin{aligned} &\dots \dots \dots (1) \end{aligned} \right\}$$

а уравненія погрѣшностей.

$$\left. \begin{array}{l} 3.(1) + (s) = f_1 \\ 3.(2) + (s) = f_2 \\ \dots \dots \dots \\ 3.(n) + (s) = f_n \\ n.(s) + (1) + (2) + \dots + (n) || f_s \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Отсюда, обозначивъ какъ всегда сумму

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = [f_n],$$

найдемъ поправки:

$$(1) = \frac{f_1 - (s)}{3}, \quad (2) = \frac{f_2 - (s)}{3}, \quad \dots \quad (n) = \frac{f_n - (s)}{3}, \quad (s) = \frac{-[f_n] + 3.f_s}{2n} \quad \dots \quad (7)$$

Эти формулы относятся къ тому случаю, когда группа состоитъ только изъ треугольниковъ, т. е. когда въ нихъ измѣнены всѣ углы. Если-же это не имѣетъ мѣста какъ напр. при уравновѣшеніи II группы, (см. ниже, гдѣ въ четырехугольникѣ нѣтъ діагоналей, то составленіе уравненій погрѣшностей, при помощи данныхъ тамъ указаній и сообразуясь съ примѣрами гл. I-й, не составитъ никакихъ затрудненій.

Введя во всѣ углы полученные такимъ образомъ поправки (1), (2), . . . (n), вычисляемъ новыя поправки угловъ согласно „условію сторонъ“, для чего логариѣмируемъ его и невязку φ суммы $\lg$ числителя съ суммой $\lg'$ знаменателя распредѣляемъ между $\lg$ отдѣльныхъ членовъ пропорціонально ихъ табличнымъ разностямъ d на 1". Раздѣливъ-же φ на $[d]$, т. е. на алгебраическую сумму всѣхъ табличныхъ разностей, мы получимъ въ секундахъ ту поправку c , которую нужно придать къ угламъ γ и отнять отъ угловъ α , что-бы, не нарушая суммы угловъ 180° , ввести условіе сторонъ:

$$c = \frac{\varphi}{[d]} \quad \dots \quad (8)$$

§ 2.

Выбранная для примѣра триангуляціонная сѣть.

За основные пункты триангуляціи требуется принять точки III и IV, данныя своими координатами (черт. 13):

$y_{III} = 0.$	$y_{IV} = + 500$
$x_{III} = -1600$	$x_{IV} = -2000$

и линію ихъ соединяющую принять за базисъ; опредѣлить координаты вершинъ съѣти съ ошибкою не превышающею 1 сантиметра.

На главныхъ пунктахъ съѣти измѣреніе угловъ производилось въ 4 пріема, а на остальныхъ—въ два.

Выбранная триангуляціонная съѣта состоитъ изъ треугольниковъ, форма которыхъ весьма далека отъ идеальной—равносторонней; но это—въ силу невозможности выбрать лучшіе треугольники, такъ какъ постройки препятствуютъ свободному визированію по желательнымъ направленіямъ.

Между прочимъ, изъ даннаго пункта IV въ сѣверномъ направленіи никуда нельзя визировать (длинная и высокая каменная стѣна не позволяетъ этого) и связь его съ точкой D могла быть осуществлена только при посредствѣ четырехугольника IV JDB.

Такъ какъ отъ правильности опредѣленія пункта D зависитъ правильность опредѣленія пунктовъ C, E, F, G, H, то въ точкахъ стоянія A. B и J, а также въ III и IV углы были измѣрены въ 4 пріема.

Положеніе пункта H оказалось возможнымъ опредѣлить также только черезъ посредство четырехугольника.

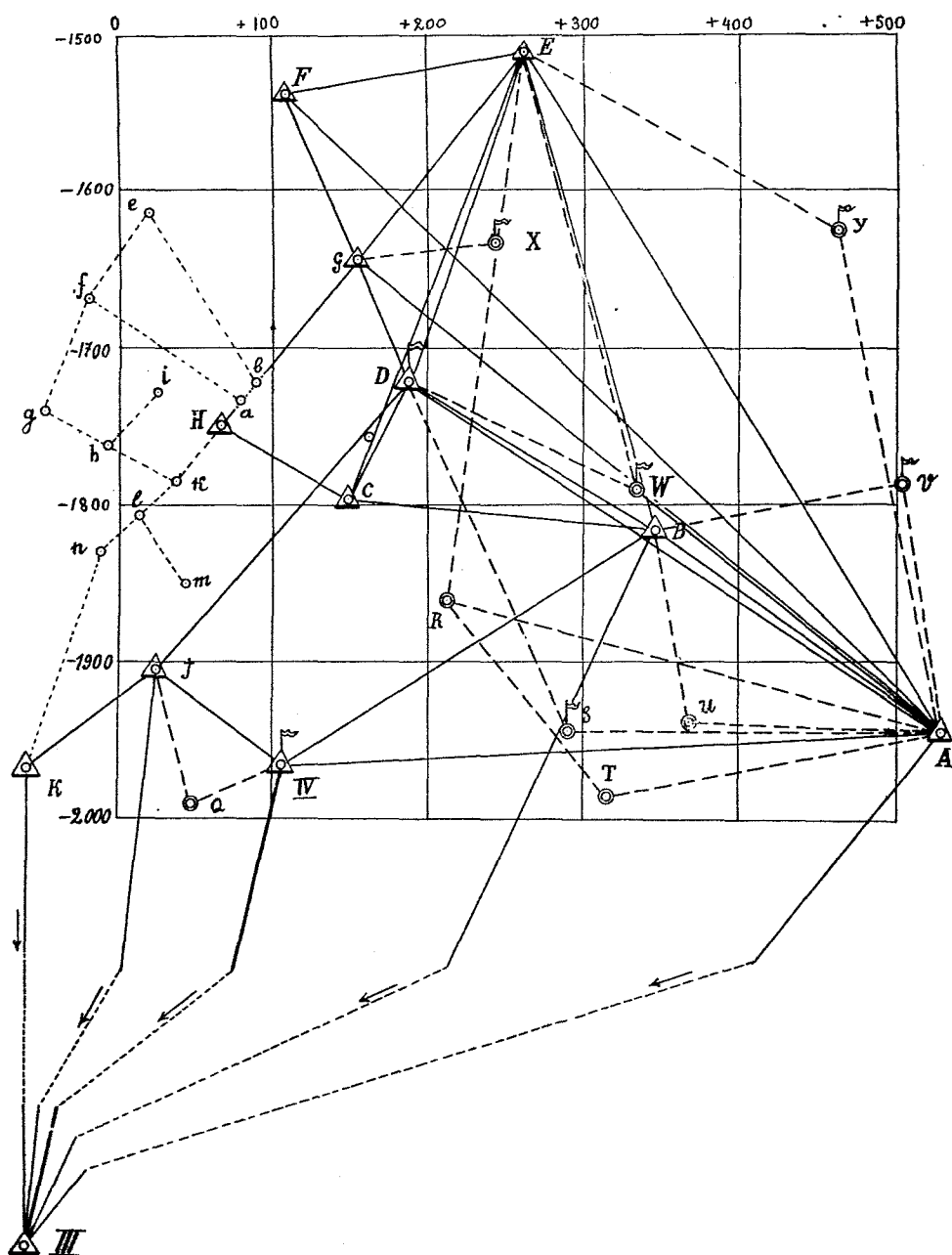
Вычисленіе триангуляціи произведено по формулярамъ, даннымъ Гауссомъ въ „Die trigon. und polygon. Rechnungen“. Сокращенное уравновѣшеніе съѣти по способу наим. квадратовъ произведено, разбивъ ее на 4 отдѣльныхъ группы, и 2 отдѣльныхъ треугольника, къ которымъ присоединены треугольники №№ 7—15 для опредѣленія пунктовъ Q, R, S, T, U, V, W, X и Y; наконецъ еще нѣсколько третьестепенныхъ пунктовъ были опредѣлены полигонной съемкой.

Вспомогательные пункты: Q, R, S, T, U, W, V, X и Y опредѣлены засѣчками. Треугольники, служащіе для опредѣленія ихъ координатъ, занесены въ журналъ вычисленій подъ №№ 7—17 (см. § 13 и § 14).

Примѣчаніе. Не смотря на чрезвычайно невыгодную форму треугольниковъ въ предлагаемомъ примѣрѣ триангуляціи, результаты ея оказались удовлетворительными, во-первыхъ, потому, что былъ примѣненъ теодолитъ весьма хорошаго качества, причемъ установка его и отсчеты производились весьма тщательно, а во-вторыхъ,—потому что линіи визированія въ данномъ участкѣ очень незначительны, такъ что при средней ошибкѣ одного направленія 6"—10" (см. полевой журналъ, въ графѣ: „Среднее изъ всѣхъ пріемовъ“, ошибка въ координатахъ любого пункта съѣти не можетъ быть сколько-нибудь значительной. Дѣйствительно, сравненіе этихъ результатовъ съ результатами контрольной, вторично произведенной, триангуляціи того-же

участка показало, что средняя ошибка въ опредѣленіи координатъ пунктовъ сѣти едва достигаетъ $\pm 0,01$ метра, т. е. ± 1 сантиметра, что вполне удовлетворяетъ поставленному требованію.

Во всякомъ случаѣ, слѣдуетъ упомянуть, что цѣль приводимаго примѣра—только показать *способъ вычисленія* триангуляціи малаго участка, на практикѣ же вообще не слѣдуетъ включать въ сѣть треугольниковъ, имѣющихъ углы меньше 30° , или больше 150° , такъ какъ, чѣмъ больше отступленіе угловъ за эти предѣлы, тѣмъ лучше долженъ быть теодолитъ и тѣмъ тщательнѣе и утомительнѣе должна быть работа для полученія той-же точности результатовъ, какіе могутъ быть достигнуты болѣе простымъ инструментомъ и болѣе быстро, но при хорошемъ выборѣ треугольниковъ.



§ 3.

Полевой журналъ измѣреній теодолитомъ и вычисленіе приведенныхъ среднихъ направленій.

Измѣренія направленій репетиціоннымъ теодолитомъ на главныхъ пунктахъ производилось въ 4 пріема, т. е. поворачивая при каждомъ новомъ пріемѣ горизонтальный кругъ приблизительно на 45° , на второстепенныхъ пунктахъ—въ 2 пріема (т. е. поворачивая горизонтальный кругъ при 2-мъ пріемѣ ∞ на 90°).

Вычисленіе результатовъ измѣренія при обоихъ положеніяхъ трубы производилось, какъ видно изъ журнала, каждый разъ съ повѣрками правильности ариѳметическихъ выкладокъ. Эти повѣрки помѣщены въ послѣдней графѣ; ходъ-же ихъ понятенъ изъ разсмотрѣнія цифръ журнала.

Въ графѣ: „Приведенное среднее изъ всѣхъ пріемовъ“ мы помѣщаемъ также и результаты вычисленій средней ошибки одного направленія для каждой точки стоянія. Вычисленія этихъ ошибокъ произведены совершенно такъ, какъ показано въ § 15, гл. I, ч. 1.

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.		
		Ноніусъ А.	Ноніусъ В.	Среднія.	Ноніусъ А.	Ноніусъ В.	Среднія.
III	1-й п р						
	K	00° 02' 00"	03' 00"	02' 30"	180° 03' 00"	03' 00"	03' 00"
	J	06 12 00	12 30	12 15	186 13 15	13 00	13 7,5
	IV	13 17 00	17 30	17 15	193 18 00	18 00	18 00
	A	39 14 15	15 00	14 37,5	219 15 15	15 00	15 7,5
		45 15	48 00		49 30	49 00	
	2-й п р						
	K	45 02 45	03 30	03 7,5	225 02 45	02 30	02 37,5
	J	51 12 45	13 30	13 7,5	231 12 45	12 30	12 37,5
	IV	58 17 45	18 00	17 52,5	238 17 30	17 00	17 15
	A	84 15 00	15 15	15 7,5	264 15 00	15 00	15 00
		48 15	50 15		48 00	47 00	
	3-й п р						
	K	90 02 00	03 00	02 30	270 03 00	03 00	03 00
	J	96 12 00	12 00	12 00	276 13 00	13 15	13 7,5
	IV	103 17 00	17 30	17 15	283 18 00	18 00	18 00
	A	129 14 00	15 00	14 30	309 15 15	15 00	15 7,5
		45 00	48 00		49 15	49 15	
	4-й п р						
	K	135 03 00	04 15	03 37,5	315 03 00	02 45	02 52,5
	J	141 13 15	13 30	13 22,5	321 12 45	12 30	12 37,5
	IV	148 18 00	18 15	18 7,5	328 17 30	17 30	17 30
	A	174 15 00	15 30	15 15	394 14 30	15 00	14 45
		49 15	51 30		47 45	47 45	

Среднее изъ I и II.	Приве- ден- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
---------------------------	-----------------------------------	--	---

і е м ъ

0°02' 45",0	0°00' 00",0		
6 12 41,2	6 09 56,2		45' 15"
13 17 37,5	13 14 52,5		48 00
39 14 52,5	39 12 07,5		49 30
			49 00
			$+4(02' 45'') =$
47 56,2	36 56,2		36' 56",3
			11 00,0
			47 56,2

і е м ъ.

45 02 52,5	0 00 00,0		
51 12 52,5	6 10 00,0		48' 15"
58 17 33,8	13 14 41,2		50 15
84 15 03,8	39 12 11,2		48 00
			47 00
			$+4(02' 52",5) =$
48 22,6	36 52,4		30' 52",4
			11 30
			48 22,4

і е м ъ

90 02 45,0	0 0 0	Средняя ошибка одно- го направленія по фор- мулѣ:	
96 12 41,2	6 9 56,2		45' 00"
103 17 37,5	03 14 52,5		48 00
129 14 48,8	39 12 03,8	$m_r \pm \sqrt{\frac{[VV]}{(s-1)(G-1)}}$	49 15
		$= \pm 5'',9$	49 15
		(см. § 15, ч. I, гл. I).	$+4(02' 45'') =$
47 52,5	36 52,5		36' 52",5
			11 00
			47 52,5

і е м ъ

135 03 15,0	0 0 0	0° 0' 0"	
141 13 00,0	6 09 45,0	6 09 54,4	49' 15"
148 17 48,8	13 14 33,8	13 14 45,0	51 30
174 15 00,0	39 11 45,0	39 12 01,9	47 45
			47 45
			$+4(3' 15'') =$
49 03,8	36 3,8	$m_r = \pm 5'',9$	36' 3",8
			13 00
			49 3,8

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.		
		Ноніусъ А.	Ноніусъ В.	Среднія.	Ноніусъ А.	Ноніусъ В.	Среднія.
IV	1-й п р						
	J	0° 03' 30"	03' 30"	03' 30"	180° 04' 30"	04' 00"	04' 30"
	B	111 40 00	40 30	40 15	291 41 00	41 00	41 00
	A	140 42 15	43 00	42 37,5	320 43 30	43 30	43 30
	III	246 59 30	59 30	59 30	67 00 15	00 30	00 22,5
		25 15	26 30		29 15	29 00	
	2-й п р						
	J	45 04 30	05 30	5 0	225 05 45	05 30	05 37,5
	B	156 41 00	42 00	41 30	336 42 00	42 30	42 15
	A	185 44 00	44 15	44 7,5	5 44 45	45 00	44 52,5
	III	292 00 45	1 00	00 52,5	112 01 30	01 45	01 37,5
		30 15	32 45		34 00	34 45	
	3-й п р						
	J	90 02 00	02 45	02 22,5	270 03 00	03 00	03 00
	B	201 39 00	39 00	39 00	21 39 30	40 00	39 45
	A	230 41 00	41 00	41 00	50 41 15	42 30	41 52,5
	III	336 58 30	58 30	58 30	156 59 00	59 15	59 7,5
		20 30	21 15		22 45	24 45	
	4-й п р						
	J	135 00 00	00 30	00 15	315 01 45	01 00	01 22,5
	B	246 37 30	37 15	37 22,5	66 38 00	38 30	38 15
	A	276 39 30	39 30	39 30	95 40 00	40 30	40 15
	III	21 56 15	57 00	56 37,5	201 57 30	57 15	57 22,5
		13 15	14 15		16 45	17 15	

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго арифметическаго.
---------------------------	------------------------------	--	---

і е м ъ.

0° 03' 52",5	0° 0' 0"		
111 40 37,5	111 36 45,0		25' 15"
140 43 3,8	140 39 11,2		26 30
246 59 56,2	246 56 3,8		29 15
			29 00
			$+4(03'52",5)=$
			12' 00"
			15 30
27 30,0	12 00,0		110 00
			27 30
			27 30

і е м ъ.

45 05 18,8	0 0 0		
156 41 52,5	111 36 33,8		30' 15"
185 44 30,0	140 39 11,2		32 45
292 1 15,0	246 55 56,2		34 00
			34 45
			$+4(05'18",8)=$
			11' 41",2
			21 15,2
32 56,3	11 41,2		131 45
			32 56,3
			32 56,4

і е м ъ.

90 2 41,2	0 0 0		
201 39 22,5	111 36 41,2		• 20' 30"
230 41 26,2	140 38 45,0		21 15
336 58 48,8	246 56 7,5		22 45
			24 45
			$+4(02'41",2)=$
			11' 33",7
			10 44,8
22 18,7	11 33,7		89 15
			22 18,7
			22 18,5

і е м ъ.

135 0 41,2	0 0 0	0° 0' 0"	
246 37 48,8	111 37 7,5	111 36 46,9	13' 15"
275 39 52,5	140 39 11,2	140 39 4,6	14 15
21 57 0,0	246 56 18,8	246 56 6,6	16 45
			17 15
			$+4(0'41",2)=$
			12' 37",5
			2 44,8
15 22,5	12 37,5	$m_r = \pm 10",7$	61 30
			15 22,5
			15 22,3

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.		
		Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.
А	1-й п р						
	III	0° 3' 0"	3' 0"	3' 00"	180° 3' 45"	3' 30"	3' 37,5
	IV	47 49 0	49 30	49 15	227 49 45	49 30	49 37,5
	D	83 59 0	59 30	59 15	264 0 0	0 0	0 00
	B	85 39 45	40 0	39 52,5	265 40 45	40 15	40 30
	G	89 31 0	31 15	31 7,5	269 32 0	31 45	31 52,5
	F	94 42 0	43 0	42 30	274 43 30	43 0	43 15
	E	108 59 0	0 0	59 30	289 0 0	0 0	0 00
		42 45	46 15		49 45	48 0	
	2-й п р						
	III	45 4 15	5 0	4 37,5	225 4 0	3 30	3 45
	IV	92 49 45	50 15	50 00	272 49 45	49 30	49 37,5
	D	129 0 0	0 30	0 15	309 0 0	59 30	59 45
	B	130 40 45	41 0	40 52,5	310 40 30	40 30	40 30
	G	134 32 0	33 0	32 30	314 32 0	32 00	32 00
	F	139 43 45	44 0	43 52,5	319 43 30	43 30	43 30
	E	154 0 30	0 30	0 30	334 0 0	0 15	0 7,5
		51 0	54 15		49 45	48 45	
	3-й п р						
	III	90 3 0	3 15	3 7,5	270 4 0	4 0	4 00
	IV	137 49 30	49 30	49 30	317 49 45	49 45	49 45
	D	173 59 0	59 30	59 15	354 0 0	0 0	0 00
	B	175 40 0	40 0	40 00	355 40 30	41 0	40 45
	G	179 31 0	31 15	31 7,5	359 32 0	32 30	32 15
	F	184 43 0	43 15	43 7,5	4 43 30	44 0	43 45
	E	199 0 0	0 15	0 7,5	19 0 0	0 45	0 22,5
		45 30	47 0		49 45	52 0	

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
і е м ъ.			
0° 3' 18",8	0° 0' 0"		
47 49 26,2	47 46 7,5		
83 59 37,5	83 56 18,8		
85 40 11,2	85 36 52,5		
89 31 30,0	89 28 11,2		
94 42 52,5	94 39 33,8		
108 59 45,0	108 56 26,2		
46 41,2	23 30,0		
			42' 45" 46 15 49 45 48 00 186 45 46 41,2 23' 30" 23 11,6 46 41,6
і е м ъ.			
45 4 11,2	0 0 0		
92 49 48,8	47 45 37,5		
129 0 0	83 55 48,8		
130 40 41,2	85 36 30,0		
134 32 15,0	89 28 3,8		
139 43 41,2	94 39 30,0		
154 0 18,8	108 56 7,5		
50 56,2	21 37,6		
			51' 00" 54 15 49 45 48 45 203 45 50 56,2 21' 37",6 29 18,4 50 56
і е м ъ.			
90 3 33,8	0 0 0		
137 49 30,0	47 45 56,2		
173 59 45,0	83 56 11,2		
175 40 22,5	85 36 48,8		
179 31 41,2	89 28 7,5		
184 43 26,2	94 39 52,5		
199 0 15,0	108 56 41,2		
48 33,7	23 37,4		
			45' 30" 47 00 49 45 52 00 194 15 48 33,7 23' 37",4 24 56,6 48 34

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.		
		Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.
А	4-й п р						
	III	135° 2' 0"	3' 0"	02' 30"	315° 2' 0"	2' 0"	2' 00"
	IV	182 48 0	48 30	48 15	2 47 15	48 0	47 37,5
	D	218 59 0	59 0	59 00	37 57 30	58 45	58 7,5
	B	220 39 30	39 30	39 30	40 38 30	39 30	39 00
	G	224 31 0	31 0	31 00	44 30 0	31 0	30 30
	F	229 42 0	42 0	42 00	49 41 0	42 0	41 30
	E	243 59 15	59 0	59 7,5	63 58 0	59 0	58 30
		40 45	42 0		34 15	40 15	
В	1-й п р						
	A	0 6 0	6 30	6 15	180 6 30	6 30	6 30
	IV	113 13 0	13 30	13 15	293 13 30	13 30	13 30
	C	151 7 0	7 0	7 00	331 7 30	7 30	7 30
	D	176 23 0	23 30	23 15	356 24 0	24 0	24 00
	E	219 41 0	40 30	40 45	39 41 30	41 30	41 30
		30 0	31 0		33 0	33 0	
	2-й п р						
	A	45 4 30	5 0	4 45	225 5 0	5 0	5 00
	IV	158 11 30	11 30	11 30	338 11 45	12 0	11 52,5
	C	196 5 0	5 0	5 00	16 5 15	6 0	5 37,5
	D	221 21 0	21 0	21 00	41 21 30	22 0	21 45
	E	264 39 0	39 0	39 00	84 39 30	39 30	39 30
		21 0	21 30		23 0	24 30	

Среднее изъ I и II.	Приве- ден- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
---------------------------	-----------------------------------	--	---

і е м ъ.

135° 2' 15",0	0° 0' 0"	0° 0' 0"	
182 47 56,2	47 45 41,2	47 45 50,6	
218 58 33,8	83 56 18,8	83 56 9,4	
220 39 15,0	85 37 0,0	85 36 47,8	40' 45"
224 30 45,0	89 28 30,0	89 28 13,1	42 00
229 41 45,0	94 39 30,0	94 39 36,6	34 15
243 58 48,8	108 56 33,8	108 56 27,2	40 15
			— +7(2' 15",) = 23' 33",8
			157 15
			39 18,8
39 18,8	23 33,8	$m_r = \pm 9",4$	15 45
			39 18,8

і е м ъ.

0 06 22,5	0 0 0		
113 13 22,5	113 7 0,0		
151 7 15,0	151 0 52,5		30' 00"
176 23 37,5	176 17 15,0		31 00
219 41 7,5	219 34 45,0		33 00
			33 00
			— +5(6' 22",5) = 59' 52",5
			127 00
			31 45
31 45,0	59 52,5		31 52,5
			31 45

і е м ъ.

45 4 52,5	0 0 0		
158 11 41,2	113 6 48,8		
196 5 18,8	151 0 26,2		
221 21 22,5	176 16 30,0		21' 00"
264 39 15,0	219 34 22,5		21 30
			23 00
			24 30
			— +5(4' 52",5) = 58' 7",5
			90 00
22 30,0	58 7,5		22 30
			22 30

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положение трубы.			II положение трубы.		
		Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.
3-й п р							
А	А	90° 2' 30"	3' 0"	2' 45"	270° 4' 0"	3' 30"	3' 45"
	IV	203 9 0	9 0	9 00	23 10 0	10 30	10 15
	С	241 3 30	3 0	3 15	61 4 0	4 30	4 15
	D	266 19 30	19 30	19 30	86 20 30	20 30	20 30
	E	309 37 30	37 0	37 15	129 38 0	38 0	38 00
		12 0	11 30		16 30	17 0	
4-й п р							
	А	135 4 30	5 0	4 45	315 4 0	3 30	3 45
	IV	248 11 00	11 0	11 00	68 10 0	11 0	10 30
	С	286 5 0	5 0	5 00	106 4 0	4 0	4 00
	D	311 21 30	21 0	21 15	131 20 0	20 30	20 15
	E	354 38 30	39 0	38 45	174 38 0	38 0	38 00
		20 30	21 0		16 0	17 0	
1-й п р							
С	Н	0 3 30	4 0	3 45	180 5 0	5 0	5 00
	E	83 9 30	10 0	9 45	263 10 30	10 30	10 30
	D	89 32 0	32 0	32 00	269 32 30	32 30	32 30
	B	157 37 0	37 30	37 15	337 38 0	38 0	38 00
		22 0	23 30		26 0	26 0	
2-й п р							
	Н	90 4 0	5 0	4 30	270 5 0	5 0	5 00
	E	173 10 0	10 0	10 00	353 10 0	11 0	10 30
	D	179 32 0	32 0	32 00	359 32 0	33 0	32 30
	B	247 38 0	37 30	37 45	67 38 0	38 30	38 15
		24 0	24 30		25 0	27 30	

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычислений средняго ариѳметическаго.
---------------------------	------------------------------	--	---

і е м ъ.

90° 3' 15",0	0° 0' 0"		
203 9 37,5	113 6 22,5		
241 3 45,0	151 0 30,0		
286 20 0,0	176 16 45,0		
309 37 37,5	219 34 22,5		
14 15,0	58 0,0		
			13' 00" 11 30 16 30 17 00 58' 00" 16 15 57 00 14 15 14 15
			+ 5 (3' 15") =

і е м ъ.

135 4 15,0	0 0 0	0° 00" 0",0	
248 10 45,0	113 6 30,0	113 6 40,3	
286 4 30,0	151 0 15,0	151 0 30,9	
311 20 45,0	176 16 30,0	176 16 45,0	
354 38 22,5	219 34 7,5	219 34 24,4	
18 37,5	57 22,5	$m_r = \pm 10,6$	
			20' 30" 21 00 16 00 17 00 57' 22",5 21 15 74 30 18 37,5 18 37,5
			+ 5 (4' 15") =

і е м ъ.

0 4 22,5	0 0 0		
83 10 7,5	83 5 45,0		
89 32 15,0	89 27 52,5		
157 37 37,5	157 33 15,0		
24 22,5	6 52,5		
			22' 00" 23 30 26 00 26 00 6' 52",5 17 30 97 30 24 22,5 24 22,5
			+ 5 (4' 22",5) =

і е м ъ.

90 4 45,0	0 0 0	0 0 0	
173 10 15,0	83 5 30,0	83 5 37,5	
179 32 15,0	89 27 30,0	89 27 41,2	
247 38 0,0	157 33 15,0	157 33 15,0	
25 15,0	6 15,0	$m_r = \pm 7,9$	
			24' 00" 24 30 25 00 27 30 6' 15" 19 00 101 00 25 15 25 15
			+ 4 (4' 45") =

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.		
		Ноніусъ А.	Ноніусъ В.	Среднее.	Ноніусъ А.	Ноніусъ В.	Среднее.

1-й п р							
D	J	0° 9' 0"	8' 30"	8' 45"	180° 7' 0"	8' 0"	7' 30"
	G	114 7 0	7 0	7 00	294 5 0	6 0	5 30
	E	157 21 30	22 0	21 45	337 20 0	21 0	20 30
	B	259 31 0	31 30	31 15	79 29 0	29 30	29 15
	A	261 33 30	33 30	33 30	81 32 0	32 30	32 15
	C	346 9 30	9 30	9 30	166 7 30	8 30	8 00
		51 30	52 0		40 30	45 30	

2-й п р							
	J	90 6 30	7 0	6 45	270 4 30	5 30	5 00
	G	204 4 0	5 0	4 30	24 2 0	3 0	2 30
	E	247 19 0	19 30	19 15	67 18 0	18 0	18 00
	B	349 28 0	28 30	28 15	169 26 0	26 30	26 15
	A	351 30 30	30 30	30 30	171 28 30	29 30	29 00
	C	76 6 30	7 30	7 00	256 5 0	6 0	5 30
		34 30	38 0		24 0	28 30	

1-й п р							
E	A	0 5 30	6 0	5 45	180 6 0	6 30	6 15
	B	16 20 0	20 0	20 00	196 21 0	21 0	21 00
	D	50 53 30	54 30	54 00	230 55 0	54 30	54 45
	C	53 19 0	20 0	19 30	233 20 0	19 30	19 45
	G	71 20 0	20 0	20 00	251 20 0	20 0	20 00
	F	111 41 30	41 30	41 30	291 42 0	42 0	42 00
		39 30	42 0		41 0	43 30	

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
---------------------------	------------------------------	--	---

і е м ъ.

0° 8' 7",5	0° 0' 0"		
114 6 15,0	113 58 7,5		
157 21 7,5	157 13 0,0		51' 30"
259 30 15,0	259 22 7,5		52 00
261 32 52,5	261 24 45,0		40 30
346 8 45,0	346 0 37,5		45 30
47 22,5	58 37,5		58' 37",5
			+ 6 (8' 7",5) = 48 45
			189 30
			47 22,5
			47 22,5

і е м ъ.

90 5 52,5	0 0 0	0° 0' 0"	
204 3 30,0	113 57 37,5	113 57 52,5	
247 18 37,5	157 12 45,0	157 12 52,5	
349 27 15,0	259 21 22,5	259 21 45,0	
351 29 45,0	261 23 52,5	261 24 18,8	
76 6 15,0	346 0 22,5	346 0 30,0	
			34' 30"
			38 00
			24 00
			28 30
			56' 00"
			+ 6(5'52",5) = 35 15
			125 00
			31 15
			31 15
31 15,0	56 0,0	$m_{\Gamma} = \pm 7'',9$	

і е м ъ.

0 6 0,0	0 0 0,0		
16 20 30,0	16 14 30,0		
50 54 22,5	50 48 22,5		
53 19 37,5	53 13 37,5		
71 20 0,0	71 14 0,0		
111 41 45,0	111 35 45,0		
			39' 30"
			42 00
			44 00
			43 30
			6' 15"
			+ 6(6'00") = 36 00
			169 00
			42 15
			42 15
42 15,0	6 15,0		

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положение трубы.			II положение трубы.		
		Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.
Е	2-й п р						
	А	90° 4' 30"	5' 0"	4' 45"	270° 5' 0"	5' 30"	5' 15"
	В	106 19 0	19 30	19 15	286 20 0	20 0	20 00
	Д	140 52 30	53 0	52 45	320 53 0	53 30	53 15
	С	143 18 0	18 0	18 00	323 18 30	18 30	18 30
	Г	161 18 0	18 30	18 15	341 19 0	19 0	19 00
	Ф	201 40 30	40 30	40 30	21 41 0	41 30	41 15
		32 30	34 30		36 30	38 0	
F	1-й п р						
	Е	0 5 45	5 0	5 52,5	180 4 45	4 0	4 22,5
	А	54 13 30	13 15	13 22,5	234 12 0	12 0	12 00
	Г	76 57 0	56 45	56 52,5	256 55 15	55 0	55 7,5
		16 5	15 0		12 0	11 0	
	2-й п р						
E	Е	90 3 30	4 15	3 52,5	270 2 0	3 30	2 45
	А	144 12 0	12 15	12 7,5	324 10 0	10 30	10 15
	Г	166 55 0	55 0	55 00	346 53 0	53 15	53 7,5
		10 30	11 30		5 0	7 15	
	1-й п р						
G	Ф	0 9 0	9 30	9 15	180 9 30	10 0	9 45
	Е	62 55 30	56 30	56 00	242 57 0	57 0	57 00
	А	152 14 0	14 30	14 15	332 15 0	15 0	15 00
	Д	179 15 0	15 0	15 00	359 16 0	16 0	16 00
	Н	241 55 30	55 0	55 15	61 55 30	56 0	55 15
		29 0	30 30		33 0	34 0	

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
---------------------------	------------------------------	--	---

і е м ъ.

90° 5' 0",0	0° 0' 0"	0° 0' 0"	
106 19 37,5	16 14 37,5	16 14 33,8	
140 53 0,0	50 48 0,0	50 48 11,2	
143 18 15,0	53 13 15,0	53 13 26,2	32' 30"
161 18 37,5	71 13 37,5	71 13 48,8	34 30
201 40 52,5	111 35 52,5	111 35 48,8	36 30
			38 00
			$+6(5' 00'') =$
			5' 22",5
			30 00
			141 30
			35 22,5
35 22,5	5 22,5		35 22,5

і е м ъ.

0 4 52,5	0 0 0		16' 05"
54 12 41,2	54 7 48,8		15 00
76 56 0,0	76 51 7,5		12 00
			11 00
			$+3(4' 52'',5) =$
			58' 56",3
			14 37,5
13 33,7	58 56,3		54 05
			13 33,7
			13 33,8

і е м ъ.

90 3 18,8	0 0 0	0 0' 0"	10' 30"
144 11 11,2	54 7 52,5	54 7 50,6	11 30
166 54 3,8	76 50 45,0	76 50 56,2	5 00
			7 15
			$+3(3' 18'',8) =$
			58' 37",5
			9 56,4
8 33,8	58 37,5	$m_r = \pm 10'',0$	34 15
			8 33,8
			8 33,9

е м ъ.

0 9 30,0	0 0 0		
62 56 30,0	62 47 0		
152 14 37,5	152 5 7,5		
179 15 30,0	179 6 0,0		
241 55 30,0	241 46 0,0		
			29' 00"
			30 30
			33 00
			34 00
			$+5(9' 30'') =$
			44, 7",5
			47 30
31 37,5	44 7,5		126 30
			31 37,5
			31 37,5

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положение трубы.			II положение трубы.		
		Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднее.
Г	2-й п р						
	F	90° 4' 30"	5' 30"	5' 00"	270° 4' 30"	5' 0"	4' 45"
	E	152 52 0	52 30	52 15	332 52 0	52 0	52 00
	A	242 10 0	10 0	10 00	62 9 30	10 0	9 45
	D	269 11 0	11 0	11 00	89 10 0	11 0	10 30
	H	331 50 30	50 0	50 15	151 50 0	50 30	50 15
		8 0	9 0		6 0	8 30	
Н	1-й п р						
	G	0 2 30	3 0	2 45	180 3 0	3 0	3 00
	C	79 58 30	59 0	58 45	259 59 30	59 0	59 15
		1 0	2 0		2 30	2 0	
	2-й п р						
	G	90 5 0	6 0	5 30	270 5 0	5 0	5 00
	C	170 1 0	1 30	1 15	350 0 0	0 30	0 15
	6 0	7 30		5 0	5 30		
J	1-й п р						
	D	0 1 45	2 0	1 52,5	180 2 30	2 30	2 30
	IV	84 37 15	38 0	37 37,5	264 38 30	38 15	38 22,5
	III	144 28 00	29 0	28 30	324 29 15	29 30	29 22,5
	K	190 30 0	30 30	30 15	10 31 0	31 15	31 7,5
		37 0	39 30		41 15	41 30	
	2-й п р						
D	45 1 30	2 15	1 52,5	225 3 0	2 30	2 45	
IV	129 37 0	38 0	37 30	309 38 30	38 0	38 15	
III	189 28 30	28 30	28 30	9 29 30	29 0	29 15	
K	235 30 30	30 30	30 30	55 31 15	31 30	31 22,5	
	37 30	39 15		42 15	41 0		

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
і е м ъ.			
90° 4' 52",5	0° 0' 0"	0° 0' 0",0	
152 52 7,5	62 47 15,0	62 47 7,5	8' 00"
242 9 52,5	152 5 0,0	152 5 3,8	9 00
269 10 45,0	179 5 52,5	179 5 56,2	6 00
331 50 15,0	241 45 22,5	241 45 41,2	8 30
			— +5(4' 52",5) = 43' 30"
			51 30
			7 52,5
7 52,5	43 30,0		24 22,5
			7 52,5
і е м ъ.			
0 2 52,5	0 0 0		1' 00"
79 59 0,0	79 56 7,5		2 00
			2 30
1 52,5	56 7,5		2 00
			— +2(2' 52",5) = 56' 7",5
			7 30
			1 52,5
			5 45
			1 52,5
і е м ъ.			
90 5 15,0	0 0 0	00 0' 0"	6' 00"
170 0 45,0	79 55 30,0	79 55 48,8	7 30
			5 00
6 0,0	55 30,0		5 30
			— +2(5' 15",) = 55' 30"
			24 00
			6 00
			10 30
			6 00
і е м ъ.			
0 2 11,2	0 0 0		37' 00"
84 38 0,0	84 35 48,8		39 30
144 28 56,2	144 26 45,0		41 15
190 30 41,2	190 28 30,0		41 30
			— +4(2' 11",2) = 31' 3",8
			159 15
39 48,6	31 3,8		39 48,6
			8 44,8
і е м ъ.			
45 2 18,8	0 0 0		37' 30"
129 37 52,5	84 35 33,8		39 15
189 28 52,5	144 26 33,8		42 15
235 30 56,2	190 28 37,5		41 00
			— +4(2' 18",8) = 30' 45",1
			160 00
40 0,0	30 45,1		40 00
			9 15,2
			40 00,3

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.			
		Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднія.	Нониусъ А.	Нониусъ В.	Среднія.	
3-й п р								
J	D	90° 1' 45''	2' 0''	1' 52'',5	270° 2' 30''	2' 0''	2' 15''	
	IV	174 37 15	37 30	37 22,5	354 38 00	38 0	38 00	
	III	234 28 30	28 30	28 30	54 29 0	29 30	29 15	
	K	280 30 15	30 30	30 22,5	100 30 45	31 0	30 52,5	
		37 45	38 30		40 15	40 30		
	4 й п р							
	D	135 7 30	8 0	7 45	315 8 0	8 0	8 00	
	IV	219 43 0	43 0	43 00	39 43 0	44 0	43 30	
	III	279 34 15	34 30	34 22,5	99 34 30	35 0	34 45	
	K	325 35 45	36 0	35 52,5	145 36 30	37 0	36 45	
	0 30	1 30		2 0	4 0			
K	1-й п р							
	J	0 4 0	5 0	4 30	180 5 0	5 0	5 00	
	III	127 51 45	52 0	51 52,5	307 53 0	53 0	53 00	
		55 45	57 0		58 0	58 0		
	2-й п р							
	J	90 3 30	3 45	3 37,5	27 3 15	3 0	3 7,5	
	III	217 51 30	51 0	51 15	37 50 0	51 0	50 30	
		55 0	54 45		53 15	54 0		
	Вновь повторенныя измѣ- ренія.	1-й п р						
		IV	0 13 30	13 0	13 15	180 12 30	12 30	12 30
B		12 26 30	26 0	26 15	192 25 30	25 30	25 30	
		40 0	39 0		38 0	38 0		
2-й п р								
IV		45 5 0	5 30	5 15	225 6 0	5 30	5 45	
B		57 18 30	19 0	18 45	237 19 30	19 0	19 15	
		23 30	24 30		25 30	24 30		

Среднее изъ I и II.	Приведен- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
---------------------------	------------------------------	--	---

і е м ъ.

90° 2' 3",8	0° 0' 0"		37' 45"
174 37 41,2	84 35 37,5		38 30
234 28 52,5	144 26 48,8		40 15
280 30 37,5	190 28 33,8		40 30
			31' 00",1
			8 15,2
			— + 4 (2' 3",8) =
39 15,0	31 0,1		157 00
			39 15
			39 15,3

і е м ъ.

135 7 52,7	0 0 0	0° 0' 0"	0' 30"
219 43 15,0	84 35 22,5	84 35 35,6	1 30
279 34 33,8	144 26 41,2	144 26 42,2	2 00
325 36 18,8	190 28 26,2	190 28 31,9	4 00
2 0,3	30 29,9		30' 29",9
			31 30,8
			— + 4 (7' 52",7) =
			8 00
			2 00
			2 00,7

і е м ъ.

0 4 45,0	0 0 0		55' 45"
127 52 26,2	127 47 41,2		57 00
			58 00
			58 00
57 11,2	47 41,2		228 45
			57 11,2
			47' 41",2
			9 30
			— + 2 (4' 45") =
			57 11,2

і е м ъ.

90 3 22,5	0 0 0	0° 0' 0"	55' 00"
217 50 52,5	127 47 30,0	127 47 35,6	54 45
			53 15
			54 00
54 15,0	47 30,0		217 00
			54 15
			47' 30"
			6 45
			— + 2 (3' 22",5) =
			54 15

і е м ъ.

0 12 52,5	0 0 0		40' 00"
12 25 5",5	12 13 0,0		39 00
			38 00
			38 00
38 45,0	13 0,0		155 00
			38 45
			13' 00"
			25 45
			— + 2 (12' 52",5) =
			38 45

і е м ъ.

45 5 30	0 0 0		23' 30"
57 19 0,0	12 13 30,0		24 30
			25 30
			24 30
24 30	13 30,0		98 00
			24 30
			13' 30"
			11 00
			— + 2 (5' 30") =
			24 30

Точка стоянія.	Точка визирова- нія.	I положеніе трубы.			II положеніе трубы.		
		Новіусть А.	Новіусть В.	Среднее.	Новіусть А.	Новіусть В.	Среднее.
III Вновь повторенныя измѣренія	IV В	3-й п р					
		90° 5' 0"	4' 30"	4' 45"	270° 4' 0"	3' 30"	3' 45"
		102 17 30	18 0	17 45	282 17 30	16 30	17 00
		22 30	22 30		21 30	20 00	
	IV В	4-й п р					
		135 3 30	3 30	3 30	315 4 0	3 30	3 45
		147 16 0	16 30	16 15	327 17 0	16 30	16 45
		19 30	20 0		21 0	20 0	
	A III	1-й п р					
		0 8 0	8 0	8 00	180 8 30	9 0	8 45
		80 47 30	47 30	47 30	260 48 0	48 30	48 15
В		55 30	55 30		56 30	57 30	
	A III	2-й п р					
		45 4 30	4 30	4 30	225 3 30	3 30	3 30
		125 43 30	43 30	43 30	305 42 30	41 30	42 00
		48 0	48 0		46 0	45 0	
	A III	3-й п р					
		90 7 30	7 30	7 30	270 8 0	8 0	8 00
		170 46 0	45 30	45 45	350 47 0	46 30	46 45
		53 30	53 0		55 0	54 30	
	A III	4-й п р					
		135 10 30	10 30	10 30	315 9 0	9 30	9 15
		215 49 0	49 30	49 15	35 48 0	48 30	48 15
		59 30	60 00		57 0	58 0	

Среднее изъ I и II.	Приве- ден- ное среднее.	Среднее изъ всѣхъ пріемовъ и средняя ошибка.	Повѣрки вычисленій средняго ариѳметическаго.
---------------------------	-----------------------------------	--	---

і е м ъ.

90° 4' 15",0	0° 0' 0"		22' 30"
102 17 22,5	12 13 7,5		22 30
			21 30
			20 00
			86 30
21 37,5	13 7,5		21 37,5
			13' 7",5
			8 30
			21 37,5

і е м ъ.

135 3 37,5	0 0 0	0° 0' 0"	19' 30"
147 16 30,0	12 12 52,5	12 13 7,5	20 00
			21 00
			20 00
			80 30
20 7,5	12 52,5		20 7,5
			12' 52",5
			7 15
			20 7,5

і е м ъ.

0 8 22,5	0 0 0		55' 30"
80 47 52,5	80 39 30,0		55 30
			56 30
			57 30
			225 00
56 15,0	39 30,0		56 15
			39' 30"
			16 45
			56 15

і е м ъ.

45 4 0,0	0 0 0		48' 00"
125 42 45,0	80 38 45,0		48 00
			46 00
			45 00
			107 00
46 45,0	38 45,0		46 45
			38' 45"
			8 00
			46 45

і е м ъ.

90 7 45,0	0 0 0		53' 30"
170 46 15,0	80 38 30,0		53 00
			55 00
			54 30
			216 00
54 0,0	38 30,0		54 00
			38' 30"
			15 30
			54 00

і е м ъ.

135 9 52,5	0 0 0	0° 0' 0"	59' 30"
215 48 45,0	80 38 52,5	80 38 54,4	60 00
			57 00
			58 00
			234 30
58 37,5	38 52,5		58 37,5
			38' 52",5
			19 45
			58 37,5

§ 4.

Сопоставление результатов полевых измѣреній.

Точка стоянія.	Точка визиро- ванія.	Приведенное на- правление, сред- нее изъ всѣхъ пріемовъ.		
III	K	0°	0'	0",0
	J	6	9	54,4
	IV	13	14	45,0
	A	39	12	1,9
IV	J	0	0	0,0
	B	111	36	46,9
	A	140	39	4,6
	III	246	56	6,6
A	III	0	0	0,0
	IV	47	45	50,6
	D	83	56	9,4
	B	85	36	47,8
	G	89	28	13,1
	F	94	39	36,6
B	E	108	56	27,2
	A	0	0	0,0
	IV	113	6	40,3
	C	151	0	30,9
	D	176	16	45,0
C	E	219	34	24,4
	H	0	0	0,0
	E	83	5	37,5
	D	89	27	41,2
D	B	157	33	15,0
	J	0	0	0,0
	G	113	57	52,5
	E	157	12	52,5
	B	259	21	45,0
	A	261	24	18,8
	C	346	0	30,0

Точка стоянія.	Точка визиро- ванія.	Приведенное на- правление, сред- нее изъ всѣхъ пріемовъ.		
E	A	0°	0'	0",0
	B	16	14	33,8
	D	50	48	11,2
	C	53	13	26,2
	G	71	13	48,8
	F	111	35	48,8
F	E	0	0	0,0
	A	54	7	50,6
	G	76	50	56,2
G	F	0	0	0,0
	E	62	47	7,5
	A	152	5	3,8
	D	179	5	56,2
	H	241	45	41,2
H	G	0	0	0,0
	C	79	55	48,8
J	D	0	0	0,0
	IV	84	35	35,6
	III	144	26	42,2
	H	190	28	31,9
K	J	0	0	0,0
	III	127	47	35,6
III (снова)	IV	0	0	0,0
	B	12	13	7,5
B снова	A	0	0	0,0
	III	80	38	54,4

§ 5.

Вычисление простиранія V_{III}^{IV} и длины S_{III-IV} базиса по даннымъ координатамъ точекъ III и IV.

Координаты точекъ III и IV, которыя нужно принять за базисныя, суть *):

$$x_{III} = -2865,330 \quad x_{IV} = -1967,151$$

$$y_{III} = -59,399 \quad y_{IV} = +106,331$$

$$\operatorname{tg} V_{III}^{IV} = \frac{\Delta y_{IV}}{\Delta x_{IV}} = \frac{y_{IV} - y_{III}}{x_{IV} - x_{III}}$$

$$\text{Азимуть базиса} = V_{III}^{IV} = 13^\circ 21' 12'',4$$

Длина базиса:

$$S_{III-IV} = \frac{\Delta y_{IV}}{\sin V_{III}^{IV}} = \frac{\Delta x_{IV}}{\cos V_{III}^{IV}}$$

$$\lg \Delta y_{IV} = 2,219\,4011 \quad \lg \Delta x_{IV} = 2,843\,9668$$

$$\lg \sin V = 9,363\,5319 \quad \lg \cos V = 9,988\,0967$$

$$\lg S_{III-IV} = 2,855\,8692 \quad \lg S_{III-IV} = 2,855\,8701$$

$$S_{III-IV} = 717,578 \quad S_{III-IV} = 717,580$$

$$\text{сред. } \lg S_{III-IV} = 2,855\,8697$$

$$\text{сред. } S_{III-IV} = 717,579$$

Повѣрка:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + V \right) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}$$

$$\Delta x_{IV} + \Delta y_{IV} = +863,909; \quad (\lg \Delta x_{IV} + \Delta y_{IV}) = 2,936\,4680$$

$$\Delta x_{IV} - \Delta y_{IV} = +532,449; \quad (\lg \Delta x_{IV} - \Delta y_{IV}) = 2,726\,2780$$

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + V \right) = 0,210\,1900$$

$$\frac{\pi}{4} + V = 58^\circ 21' 12'',3$$

$$V_{III}^{IV} = 13^\circ 21' 12'',3 \text{ вѣрно!}$$

*) На стр. 123 ошибка.

§ 6.

Уравновѣшеніе первой группы треугольниковъ.

(з $\triangle$ -ка: A III IV, B A IV и III IV B).

1-е. Невязки по условіямъ суммы угловъ. Среднія ошибки.

Изъ таблицы § 4 черезъ соотвѣтственное вычитаніе направленій мы получаемъ слѣдующія величины *угловъ* каждаго изъ $\triangle$ -ковъ и *невязки* суммы ихъ до 180° *) (см. черт. 14 на стр. 156):

1) $\triangle A III IV$	2) $\triangle B A IV$	3) $\triangle III IV B$
$\alpha=A = 47^\circ 45' 50'',6$	$\alpha=B = 113^\circ 6' 40'',3$	$\alpha=III = 12^\circ 13' 7'',5$
$\beta=III = 25 57 16,9$	$\beta=A = 37 50 57,2$	$\beta=IV = 135 19 19,7$
$\gamma=IV = 106 17 2,0$	$\gamma=IV = 29 2 17,7$	$\gamma=B = 32 27 45,9$
180 0 9,5	179 59 55,2	180 0 13,1
$f_1 = +9'',5$	$f_2 = -4'',8$	$f_3 = +13'',1$

Средняя ошибка невязки одного $\triangle$ -ка:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{9'',5^2 + 4'',8^2 + 13'',1^2}{9}} = \pm 9'',7$$

Средняя ошибка одного угла:

$$m_w = \pm \frac{M}{\sqrt{3}} = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{3.3}} = \pm 5'',6$$

Средняя ошибка одного направленія:

$$m_r = \pm \frac{M}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{2.3.3}} = \pm 4'',0$$

*Сумма угловъ около
точки IV:*

$$\angle AIVIII = 106 17' 2'',0$$

$$\angle BIVA = 29 2 17,7$$

$$\text{Сумма} = 129 19 19,7$$

Должно быть

$$\angle IIIIVB = 129 19 19,7$$

$$0^\circ 0' 0'',0$$

$$fs = 0'',0$$

*) Такъ какъ невязки равны поправкамъ по абсолютной величинѣ, но съ обратнымъ только знакомъ, то Ф. Гауссъ и не вводитъ особаго обозначенія для нихъ, какъ дѣлали мы это выше.

2-е. Поправки для выполнения условія суммы угловъ $\triangle$ -ковъ.

Такъ какъ при точкѣ IV зависимость между углами $\triangle$ -ковъ выражается равенствомъ:

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \beta_3 = f_s = 0$$

то составляемъ алгебраическую сумму:

$$+f_1 + f_2 - f_3 = [f_n] = +8'',4$$

затѣмъ находимъ:

$$(s) = \frac{-[f_n] + 3.f_s}{2.n} = \frac{-8,4 + 4}{6} = -1'',4$$

а поправки угловъ α и β 1-го и 2-го $\triangle$ -ка и угловъ α и γ 3-го $\triangle$ -ка соответственно равны:

$$\text{для 1-го } \triangle\text{-ка: } (1) = \frac{f_1 - (s)}{3} = \frac{-9,5 + 1,4}{3} = -2'',7$$

$$\text{для 2-го } \triangle\text{-ка: } (2) = \frac{f_2 - (s)}{3} = \frac{+4,8 + 1,4}{3} = +2'',1$$

$$\text{для 3-го } \triangle\text{-ка: } (3) = \frac{f_3 + (s)}{3} = \frac{-13,1 - 1,4}{3} = -4'',8$$

Что касается поправокъ угловъ γ , то они вычисляются просто какъ дополненія суммы поправокъ угловъ α и β до величины всей невязки $w_1 = -f_1$ каждаго $\triangle$ -ка (т. е. чтобы сумма угловъ $= 180^\circ$), но для контроля ихъ лучше вычислять какъ суммы:

$$(1)' = (1) + (s) = -2'',7 - 1'',4 = -4'',1 \quad (= -4'',1 = -9,5 + 2.2,7)$$

$$(2)' = (2) + (s) = +2'',1 - 1'',4 = +0'',7 \quad (= +0'',6 = +4,8 - 2.2,1)$$

$$(3)' = (3) + (s) = -4'',8 + 1'',4 = -3'',4 \quad (= -3'',5 = -13,1 + 2.4,8)$$

3-е. Углы $\triangle$ -ковъ, исправленные по условію суммы угловъ.

Введя во всѣ углы каждаго $\triangle$ -ка полученные поправки, мы найдемъ слѣдующія ихъ значенія:

1) $\triangle A III IV$	2) $\triangle B A IV$	3) $\triangle III IV B$
$\alpha = A = 47^\circ 45' 47'',9$	$\alpha = B = 113^\circ 6' 42'',4$	$\alpha = III = 12^\circ 13' 2'',7$
$\beta = III = 25 57 14, 2$	$\beta = A = 37 50 59,3$	$\beta = IV = 135 19 16,2$
$\gamma = IV = 106 16 57, 9$	$\gamma = IV = 29 2 18,3$	$\gamma = B = 32 27 41,1$
180 0 0,0	180 0 0,0	180 0 0,0

причемъ суммы ихъ уже въ точности $= 180^\circ$.

4-е. Поправки по условію сторонъ.

Условіе сторонъ здѣсь выразится такъ:

$$\frac{\text{Sn } \beta_1 \cdot \text{Sn } \beta_2 \cdot \text{Sn } \gamma_3}{\text{Sn } \alpha_1 \cdot \text{Sn } \alpha_2 \cdot \text{Sn } \alpha_3} = 1$$

Вычисляемъ:

	Табл. разн. на 1"
$\lg \text{Sn } \beta_1 = \lg \text{Sn } 25^\circ 57' 14'', 2 = 9,641\ 1255$	+ 43,3
$\lg \text{Sn } \beta_2 = \lg \text{Sn } 37\ 50\ 59,3 = 9,787\ 8809$	+ 27,1
$\lg \text{Sn } \gamma_3 = \lg \text{Sn } 32\ 27\ 41,1 = 9,729\ 7571$	+ 33,1
$\lg \text{числителя (сумма)} = 9,158\ 7635$	
$\lg \text{Sn } \alpha_1 = \lg \text{Sn } 47^\circ 45' 47'', 9 = 9,869\ 4513$	+ 19,1
$\lg \text{Sn } \alpha_2 = \lg \text{Sn } 113\ 6\ 42,4 = 9,963\ 6655$	— 9,0
$\lg \text{Sn } \alpha_3 = \lg \text{Sn } 12\ 13\ 2,7 = 9,325\ 5606$	+ 97,2
$\lg \text{знаменателя (сумма)} = 9,158\ 6774$	
$\lg \text{числителя} + \lg' \text{знаменателя} = 9,999\ 9139$ $= -0,000\ 0861$	+ 210,8 = [d]

Слѣдовательно невязка условія сторонъ:

$$\varphi = -861 \text{ ед. послѣдняго знака } \lg$$

соотвѣтствующая поправка угловъ:

$$c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{-861}{+210,8} = -4'',08 = \infty - 4'',1$$

а поправки $\lg \text{Sn}$ каждаго угла найдутся распредѣленіемъ $\varphi = -861$ пропорціонально табличнымъ разностямъ, а именно (въ ед. послѣдняго знака $\lg$) (см. также стр. 156, графа 6-я):

$$\begin{array}{l|l} -4'',08.(+43,3) = -177 & -4'',08.(+19,1) = -78 \\ -4,08.(+27,1) = -111 & -4,08.(-9,0) = +37 \\ -4,08.(+33,3) = -135 & -4,08.(+97,2) = -397 \end{array}$$

5-е. Окончательно уравновѣшенные углы $\triangle$ -ковъ 1-й группы и $\lg$ ихъ синусовъ.

Введя предыдущія поправки въ значенія угловъ, исправленныя на условіе суммы угловъ $\triangle$ -ковъ, найдемъ окончательно:

1) $\triangle$ А III IV	2) $\triangle$ В A IV	3) $\triangle$ III IV В
$\alpha = 47^\circ 45' 52'', 0$ $\lg \text{Sn } \alpha = 9,869\ 4591$	$113^\circ 6' 46'', 5$ $9,963\ 6618$	$12^\circ 13' 6'', 8$ $9,325\ 6003$
$\beta = 25\ 57\ 10,1$ $\lg \text{Sn } \beta = 9,641\ 1078$	$37\ 50\ 55,2$ $9,787\ 8698$	$135\ 19\ 16,2$ $9,847\ 0369$
$\gamma = 106\ 16\ 57,9$ $\lg \text{Sn } \gamma = 9,982\ 2214$	$29\ 2\ 18,3$ $9,686\ 0961$	$32\ 27\ 37,0$ $9,729\ 7436$
180 0 0,0	180 0 0,0	180 0 0,0

6-е. Средняя ошибка одного угла и одного направления послѣ уравновѣшенія.

Эти ошибки приблизительно могутъ быть опредѣлены соотвѣтственно по формуламъ:

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \text{ и } m_r = \pm \frac{m_w}{\sqrt{2}}$$

гдѣ λ_i суть разности между значеніями угловъ, полученными послѣ уравновѣшенія и значеніями ихъ, полученными изъ журнала наблюдений. Эти разности и ихъ квадраты суть:

$\lambda_1 = +1,4$	$\lambda_1^2 = 1,96$
$\lambda_2 = -6,8$	$\lambda_2^2 = 46,24$
$\lambda_3 = -4,1$	$\lambda_3^2 = 16,81$
$\lambda_4 = +6,2$	$\lambda_4^2 = 38,44$
$\lambda_5 = -2,0$	$\lambda_5^2 = 12,25$
$\lambda_6 = +0,6$	$\lambda_6^2 = 0,36$
$\lambda_7 = -0,7$	$\lambda_7^2 = 0,49$
$\lambda_8 = -3,5$	$\lambda_8^2 = 12,25$
$\lambda_9 = -12,9$	$\lambda_9^2 = 166,41$
	$[\lambda\lambda] = 295,21$

Слѣдовательно:

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{295,21}{9-1}} = \pm 6'',1$$

$$m_r = \pm \frac{6'',1}{\sqrt{2}} = \pm 4'',3$$

7-е. Вычисленіе уравновѣшенныхъ Δ -ковъ.

Оно производится по теоремѣ синусовъ, всегда предварительно вычисляя величину m = отношенію стороны къ противолежащему ей углу, а именно ($\lg III IV$ —по § 5):

1) $\triangle A III IV$		2) $\triangle B A IV$		3) $\triangle III IV B$	
$m_1 = \frac{a}{Sn A}$	$lg III IV = 2,855\ 8697$	$m_2 = \frac{A IV}{Sn B}$	$lg A IV = 2,627\ 5184$	$m_3 = \frac{B IV}{Sn III}$	$lg B IV = 2,451\ 7264$
	$lg Sn A = 9,869\ 4591$		$lg Sn B = 9,963\ 6618$		$lg Sn III = 9,325\ 6003$
$m_1 = \frac{III IV}{Sn A}$	$lg m = 2,986\ 4106$		$lg m = 2,663\ 8566$		$lg m = 3,126\ 1261$
$b = m_1 Sn \beta =$	$lg m = 2,986\ 4106$	$BIV = m_2 . Sn A$	$lg m = 2,663\ 8566$	$BIII = m_3 . Sn IV$	$lg m = 3,126\ 1261$
$AIV = m_1 Sn (III)$	$lg Sn (III) = 9,641\ 1078$		$lg Sn A = 9,787\ 8698$		$lg Sn IV = 9,847\ 0369$
	$lg A IV = 2,627\ 5184$		$lg BIV = 2,451\ 7264$		$lg B III = 2,973\ 1630$
$c = m_1 Sn \gamma =$	$lg m = 2,986\ 4106$	$BA = m_2 . Sn IV$	$lg m = 2,663\ 8566$	$III IV m_3 . Sn B$	$lg m = 3,126\ 1261$
$AIII = m_1 Sn (IV)$	$lg Sn (IV) = 9,982\ 2214$		$lg Sn IV = 9,686\ 0961$		$lg Sn B = 9,729\ 7436$
	$lg A III = 2,968\ 6320$		$lg BA = 2,349\ 9527$		$lg III IV = 2,855\ 8697$ вѣрно!

8-е. Вычисленіе координатъ вершинъ 1-й группы Δ -ковъ.

Вычисленіе координатъ точекъ A и B помѣщено ниже въ § 12 вмѣстѣ съ координатами всѣхъ остальныхъ вершинъ.

9-е. Уравновѣшеніе той-же группы по формуляру $F. Gauss'a$.

Весь этотъ, на первый взглядъ — весьма сложный, процессъ уравновѣшенія 1-й группы можетъ быть удобнѣе и нагляднѣе всего произведенъ по нижеслѣдующему формуляру сокращеннаго уравновѣшенія $F. Gauss'a$; сравнивая этотъ формуляръ съ только что произведенными вычисленіями, не трудно прослѣдить, что онъ заполняется слѣдующимъ образомъ:

Въ 1-й *графѣ* отмѣчаемъ № Δ -ка данной группы и поправки (1), (2), (3) его угловъ „по условію суммы угловъ Δ -ковъ“. Во взятой группѣ имѣется число Δ -ковъ $n=3$.

Во 2-й *графѣ* отмѣчаются вершины Δ -ковъ по сравненію съ общими ихъ обозначеніями.

Въ 3-ю *графу* заносятся углы каждаго Δ -ка, полученные непосредственно изъ журнала измѣреній (соотвѣтственной комбинаціей направлений, „среднихъ изъ всѣхъ пріемовъ“ см. § 4). Здѣсь же подведены суммы угловъ каждаго Δ -ка и величины невязки $(+9,5-4,8+13,1)$ съ обратнымъ знакомъ занесены въ 4-ю *графу*. Послѣ этого опредѣлена сумма поправокъ $[f_n]=8,4$ и проверено условіе, чтобы $\gamma_1+\gamma_2=\beta_3$, при чемъ найдено $f_s=0$.

Затѣмъ (внизу формуляра) опредѣлено $(s)=-1",4$ и поправки (1), (2) и (3) (на условіе суммы угловъ Δ -ка). Эти поправки $-2",7; -2",7; +2",1; +2",1; -4",8; -4",8$ занесены въ *графу 4-ю* противъ соотвѣтствующихъ угловъ, за исключеніемъ угловъ γ_1, γ_2 и $-\beta_3$, связанныхъ уже условіемъ, при которомъ $f_s=0$. Поправки угловъ γ_1, γ_2 и $-\beta_3, (-4",1; +0",6; -3",5)$ получаютъ какъ дополненія до полной поправки f_i суммы угловъ каждаго Δ -ка.

Затѣмъ вводятъ поправки на „условіе сторонъ“, для чего:

Въ *графу 5-ю* заносятъ „первый разъ исправленные“ углы, сумма которыхъ уже равна 180° .

Въ *графѣ 6-й* помѣщаютъ $lg' \sin$ знаменателя (см. § 1, гл. II, ур. (3)) и $lg \sin$ числителя; алгебраическая сумма ихъ даетъ невязку $\varphi=-861$; при чемъ табличныя разности (*графа 7-я*) и алгебраическая сумма ихъ $[d]=+210,8$ даютъ угловую поправку $\pm 4",1$ (внизу формуляра), которую надписываемъ надъ числомъ секундъ въ *графѣ 5-й* съ такимъ знакомъ, чтобы невязка φ обратилась въ нуль; а въ *графѣ 6-й* также точно надписываемъ поправки логарифмовъ.

Послѣ этого, по теоремѣ синусовъ, взявъ изъ § 5 величину lg базиса, вычисляемъ (*графы 8-я и 9-я*) логарифмы всѣхъ сторонъ всѣхъ Δ -ковъ данной группы, при чемъ обозначено: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = m$.

Примѣчаніе. Окончательно уравновѣшенныя значенія угловъ получаютъ изъ *графы 5-й*, вводя надписанныя надъ ними поправки (см. стр. 152, внизу). *Графы 8-я и 9-я* непосредственно даютъ окончательно уравновѣшенныя значенія $g \sin$ угловъ и lg сторонъ.

II	$P_a = B$	$\alpha = 113 \ 06 \ 40,3$	$+2,1$	$113 \ 6 \ 42,4$	$0,036 \ 3345$	$-9,0$	$9,963 \ 6618$	$a = 2,627 \ 5184$
(2)	$P_b = A$	$\beta = 37 \ 50 \ 57,2$	$+2,1$	$37 \ 50 \ 59,3$	$9,787 \ 8809$	$+27,1$	$9,787 \ 8698$	$b = 2,451 \ 7264$
	$P_c = IV$	$\gamma = 29 \ 2 \ 17,7$	$+0,6$	$29 \ 2 \ 18,3$			$9,686 \ 0961$	$c = 2,349 \ 9527$
		$179 \ 59 \ 55,2$	$+4,8$	$180 \ 0 \ 0$			$lgm_3 = 3,126 \ 1261$	
III	$P_a = III$	$\alpha = 12 \ 13 \ 7,5$	$-4,8$	$12 \ 13 \ 2,7$	$0,674 \ 4394$	$+97,2$	$9,325 \ 6003$	$a = 2,451 \ 7264$
(3)	$P_b = IV$	$\beta = 135 \ 19 \ 19,7$	$-3,5$	$135 \ 19 \ 16,2$			$9,847 \ 0369$	$b = 2,973 \ 1630$
	$P_c = B$	$\lambda = 32 \ 27 \ 45,9$	$-4,8$	$32 \ 27 \ 41,1$	$9,729 \ 7571$	$+33,1$	$9,729 \ 7436$	$c = 2,855 \ 8697$
		$180 \ 00 \ 13,1$	$-13,1$	$180 \ 0 \ 0$				
			$+17,9$	Сумма	$0,000 \ 0861$	$+219,8$		
			$-9,5$			$-9,0$		
		$+f_1 + f_2 - f_3 = [f_n] =$	$+8,4$	$\varphi =$	-861	$+210,8$	$= [d]$	
I		$\gamma_1 = 106^\circ 17' 2'',0$	$-4,1$	1) Поправки по условию угловъ.				
II		$\gamma_2 = 29 \ 2 \ 17,7$	$+0,6$	$(s) = \frac{-[f_n] + 3 \cdot f_s}{2n} = \frac{-8,4 + 0}{6} = -1'',4; \quad (n) = \frac{f_n - (s)}{3}$				
III		$\beta_3 = -135 \ 19 \ 19,7$	$+3,5$	$(1) = \frac{f_1 - (s)}{3} = \frac{-9,5 + 1,4}{3} = -2'',7;$				
Сумма = $0^\circ 0' 0'',0 = 0,0 = f_s$				$(2) = \frac{f_2 - (s)}{3} = \frac{+4,8 + 1,4}{3} = +2'',1;$				
Среднія ошибки				$(3) = \frac{f_3 + (s)}{3} = \frac{-13,1 - 1,4}{3} = -4'',8$				
А. До уравнивания:				2. Поправки по условию угловъ:				
1) Средняя ошибка невязки одного Δ -ка:				$\varphi = \frac{-861}{+210,8} = -4'',08 = \infty - 4'',1$				
$M = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{n}} = \pm 9'',7$				$[d] = +210,8$				
2) Средняя ошибка одного угла:				В. После уравнивания: средняя ошибка одно-				
$m_w = \pm \sqrt{\frac{M}{3}} = \pm 5'',6$				го угла и одного направления:				
3) Средняя ошибка одного направления:				1) $m_w = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = \pm 6'',1; \quad 2) \quad m_2 = \pm \frac{m_w}{\sqrt{2}} = \pm 4'',3.$				
$m_r = \pm \frac{m_w}{\sqrt{2}} = \pm 4'',0$								

§ 7.

Уравновѣшеніе второй группы.

(1 $\triangle$ -къ и 1 $\square$ -къ. Три формуляра).

Уравновѣсивъ первую группу, считаемъ всѣ ея элементы уже за окончательно установленные и, опираясь на нихъ, приступаемъ къ уравновѣшенію второй группы, состоящей изъ 1 треугольника и 1 четырехугольника (безъ діагоналей) между пунктами сѣти III, IV, B, D и I.

Въ нижеслѣдующемъ 1-мъ формулярѣ приводится уравновѣшеніе угловъ, не принимая пока во вниманіе условія сторонъ.

Въ графѣ 2-й помѣщены углы группы, взятые непосредственно изъ журнала измѣреній; здѣсь же подведены ихъ суммы, а разности съ теоретическими суммами ($f_1 = +9",4$ и $f_2 = -42",2$) помѣщены въ графѣ 3-й.

Въ графѣ 2-й дается также выводъ невязки суммы $\beta_1 + \beta_2$ по сравненію съ разностью азимутовъ V_{IV}^B и V_{IV}^{III} линій IV B и IV III; изъ уравновѣшенія первой группы (§ 5) азимутъ

$$V_{IV}^B = V_{IV}^{III} - \beta_3 = 193^\circ 21' 12",4 - 135^\circ 19' 16",2 = 58^\circ 1' 56",2$$

а изъ второй группы:

$$V_{IV}^B = V_{IV}^{III} + \beta_1 + \beta_2 = 58^\circ 1' 52",7$$

откуда и получено $f_3 = +3",5$.

Зная f_1 , f_2 и f_3 , составляемъ условныя уравненія и вычисляемъ поправки всѣхъ угловъ, которыя и записываются въ 3-й графѣ.

При этомъ въ графу 3-ю мы, вмѣсто поправки (1) $= +0",57$, записываемъ одинъ разъ (1) $= +0",5$, а другой разъ (1) $= +0",6$, т. к. уравновѣшеніе ведемъ вообще только до десятыхъ долей секунды. Точно также, вмѣсто (2) $= -12",47$, то $-12",5$, то $-12",4$.

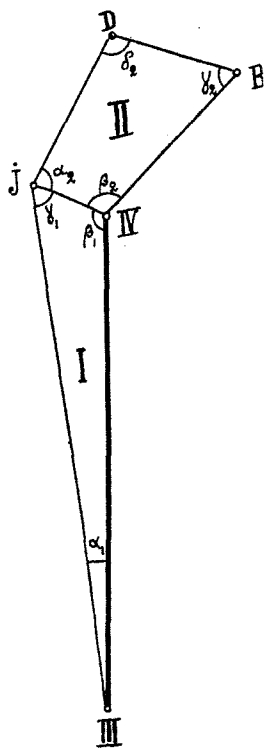
Въ 4-й графѣ выписаны исправленные значенія угловъ.

Во 2-мъ формулярѣ приводится вычисленіе элементовъ четырехугольника, пользуясь уравновѣшенными (въ 1-мъ формулярѣ) углами его. Проведя діагонали и обозначивъ всѣ элементы буквами (см. черт. 16), вычисляютъ послѣдовательно: углы α_2 и γ_1 ; сторону S_{j-IV} ; углы α_1 и γ_2 ; стороны n , s , d ; и наконецъ углы β_1 , β_2 , δ_1 и δ_2 , произведя указанный контроль и повѣрку по m .

3-й формуляръ служитъ для вычисленія поправка по условію сторонъ (помощью угловъ, найденныхъ во 2-мъ формулярѣ) и для вычисленія всѣхъ сторонъ $\triangle$ -ковъ: III j IV, D j IV и D IV B.

Какъ видно изъ приводимыхъ вычисленій, поправка по условію сторонъ ничтожна ($= -0",028$), ея мы пренебрегаемъ и оставляемъ у всѣхъ угловъ ихъ значенія, полученные изъ первыхъ двухъ формуляровъ.

1. Уравновѣшеніе II группы (1 треугольникъ и 1 четырехугольникъ). 1-й формуляръ



Черт. 15.

Уравновѣшеніе угловъ			
№ Δ -ка или $\square$ -ка	Измѣренные углы	Ошибки угловъ f_{Π} и f_S Поправки угловъ	Исправленные углы
1	2	3	4
I	α 7° 4' 50",6	+ 0,5	7° 4' 51",1
	β 113 3 53,4	+ 8,3	113 4 1,7
	γ 59 51 6,6	+ 0,6	59 51 7,2
	179 59 50,6	+ 9,4	180 0 0
II	α 84 35 35,6	-12,5	84 35 23,1
	β 111 36 46,9	-4,8	111 36 42,1
	γ 63 10 4,7	-12,4	63 9 52,3
	δ 100 38 15,0	-12,5	100 38 2,5
	360 0 42,2	-42,2	360 0 0,0
	$V_{IV}^{III} = 193^{\circ} 21' 12'',4$	= азимутъ	линіи IV—III (§ 4)
	β_1 113 3 53,4	+ 8,3	
	β_2 111 36 46,9	-4,8	
	Сумма 58 1 52,7	+ 3,5	= f_S
Должно быть	V_{IV}^B 58 1 56,2	= азимутъ	IV—B (§ 5)

1

Суммы угловъ.
$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + f_1 = \pi$
$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 + f_2 = 2\pi$
$\beta_1 + \beta_2 + f_S = \sigma$

2

Условныя уравненія
$[\alpha_1 + (1)] + [\beta_1 + (1) + (s)] + [\gamma_1 + (1)] = \pi$
$[\alpha_2 + (2)] + [\beta_2 + (2) + (s)] + [\gamma_2 + (2)] + [\delta_2 + (2)] = 2\pi$
$[\beta_1 + (1) + (s)] + [\beta_2 + (2) + (s)] = \sigma$

Уравнения ошибокъ
$3 (1) + (s) = f_1$
$4 (2) + (s) = f_2$
$2 (s) + (1) + (2) = fs$

5

Поправки угловъ
$(1) = \frac{f_1 - (s)}{3}$
$(2) = \frac{f_2 - (s)}{4}$
$(s) = \frac{12f_s - 4f_1 - 3f_2}{17}$

6

$$(s) = \frac{12(+3,5) - 4(+9,4) - 3(-42,2)}{17} = 7'',71;$$

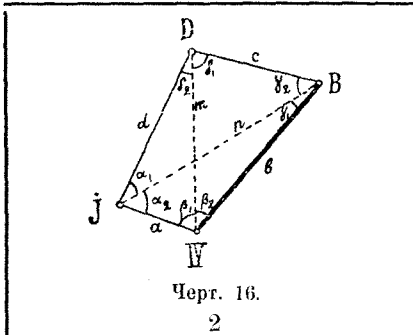
$$(1) = \frac{+3,4 - 7,71}{3} = +0'',57$$

$$(2) = \frac{-42,2 - 7,71}{4} = -12'',47$$

2. Вычисленіе $\square$ -ка $IVJD B$, пользуясь вышеисправленными углами.

2-й формуляръ.

1



Вычисленіе $S_j - IV = \frac{S_{III} - IV \cdot \sin \alpha_{III}}{\sin \gamma_j}$ стороны	
$\alpha_{III} =$	$7^\circ 4' 51'',1$
γ_j	$59^\circ 51' 7'',2$
$\lg S_{III} - IV$	$2,855 \ 8697$
$\lg \sin \alpha_{III}$	$9,090 \ 8574$
	$1,946 \ 7271$
$\lg \sin \gamma_j$	$9,936 \ 8810$
$\lg S_j - IV$	$2,009 \ 8461$
$S_j - IV$	102,293=a

2

Вычисленіе угловъ α_2 и γ_1	
$\lg \frac{1}{2}(\alpha_2 - \gamma_1) =$	$\frac{b-a}{b+a} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta$
$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \gamma_1) =$	$\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \beta =$ $90^\circ - 55^\circ 48' 21'',0$
$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \gamma_1) =$	$34^\circ 11' 39'',0$
$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \gamma_1) =$	$17 \ 40 \ 25,1$
$\alpha_2 =$	51 52 4,1
$\gamma_1 =$	16 31 13,9

Вычисленіе угловъ α_1 и γ_2	
$\lg b =$	$2,451 \ 7264$
$\lg b - a$	$282,961$
$\lg a$	$102,293$
$\lg b - a$	$180,668$
$\lg b + a$	$385,254$
$\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$	$\lg \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \beta = 9,832 \ 1578$
$\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$	$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha_2 + \gamma_1}{2} = 9,503 \ 2919$
$\alpha = 84^\circ 35' 23'',1$	$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \gamma_1) = 17^\circ 40' 25'',1$
$\alpha_2 = 51 \ 52 \ 4,1$	$\gamma = 63^\circ 9' 52'',3$
$\alpha_1 = 32 \ 43 \ 19,0$	$\gamma_1 = 16 \ 31 \ 13,9$
	$\gamma_2 = 46 \ 38 \ 38,4$

4. Вычисление сторонъ n, c и d.

$n = \frac{b \cdot \sin \beta}{\sin \alpha_2}$		$c = \frac{n \cdot \sin \alpha}{\sin \delta}$		$d = \frac{n \cdot \sin \gamma_2}{\sin \delta}$	
lg b =	2,451 7264	lg n =	2,524 3225	lg n =	2,524 3225
lg sn β =	9,968 3435	lg sn α ₁ =	9,732 8460	lg sn γ ₂ =	9,861 5954
	2,420 0699		2,257 1685		2,385 9179
lg sn α ₂ =	9,895 7474	lg sn β =	9,992 4766	lg sn δ =	9,992 4766
lg n =	2,524 3225	lg c =	2,264 6919	lg d =	2,393 4413
n =	334,443	c =	183,947	d =	247,424

5. Вычисление угловъ β₁, β₂, δ₁ и δ₂

5. Вычисление угловъ β ₁ , β ₂ , δ ₁ и δ ₂			Повѣрка:
$\frac{1}{2}(\beta_1 + \delta_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} =$ = 47° 42' 18",4	d = 247,424 a = 102,293	β = 111° 36' 42",1	m = $\frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \delta_2} = \frac{d \cdot \sin \alpha}{\sin \beta_1}$
tg $\frac{1}{2}(\beta_1 - \delta_2) = \frac{d-a}{d+a} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	d-a = 145,131 d+a = 349,717	β ₁ = 72 13 31,9	lg a = 2,009 8461
lg (d-a) = 2,161 7602	$\frac{1}{2}(\beta_1 + \delta_2) = 47^\circ 42' 18'',4$	β ₂ = 39 23 10,2	lg sn α = 9,998 0609
lg ctg $\frac{\alpha}{2} = 0,041 0698$	$\frac{1}{2}(\beta_1 - \delta_2) = 24 31 13,4$	δ = 100 38 2,5	2,007 9070
2,202 8300		δ ₂ = 23 11 5,0	lg sn δ ₂ = 9,595 1619
lg (d+a) = 2,543 7168		δ ₁ = 77 26 57,5	lg m = 2,412 7451
lg tg $\frac{1}{2}(\beta_1 - \delta_2) = 9,659 1132$	Контр. $\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = 72^\circ 13' 31'',8 (+0'',1) \\ \delta_2 = 23 11 5,0 \\ \alpha = 84 35 23,1 \end{array} \right.$	Контроль $\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = 39 23 10,2 \\ \delta_1 = 77 26 57,5 \\ \gamma = 63 9 52,3 \end{array} \right.$	lg d = 2,393 4413
$\frac{1}{2}(\beta_1 - \delta_2) = 24^\circ 31' 13'',4$	Сумма = 180° 0' 0'',0	Сумма = 180 0 0,0	lg sn α = 9,998 0609
			2,391 5022
			lg sn β ₁ = 9,978 7581
			lg m = 2,412 7441

3. Окончательное уравнивание II группы.

Уравнивание сторонъ (3-й формуляръ).

№ $\triangle$ -ка	Углы, исправленные по условию угловъ и поправки по условию сторонъ. *)	lg Sn α и lg' Sn γ	Табл. разн. d на 1"	lg (m = $\frac{c}{\text{Sn } \gamma}$)	lg сторонъ a=m.Sn α b=m.Sn β c=m.Sn γ	Стороны
				lg Sn		
1	2	3	4	5	6	7
Начальная сторона $A_0 = \text{III} - \text{IV}$. Конечная $E_0 = \text{IV} - \text{B}$.						
I (4)	lg $A_0 =$	2,855 8697		9,918 9887		
	α 7° 4' 51",1	—5				
	β 113 4 1,7	9,090 8574	+169,5	9,090 8569	a=2,009 8456	
	γ 59 51 7,2	0,063 1190	+ 12,2	9,963 8097 9,936 8810	b=2,882 7984 c=2,855 8697	
	180 0 0			2,414 6835		
II (5)	α 84 35 23,1	9,998 0609	+ 2,0	9,998 0609	a=2,412 7444	
	β 72 13 31,9	—2		9,978 7581	b=2,393 4416	
	γ 23 11 5,0	0,404 8381	+ 49,2	9,595 1621	c=2,009 8456	
	180 0 0			2,462 2303		
III (6)	α 77 26 57,5	9,989 4961	+ 4,7	9,989 4961	a=2,451 7264	
	β 39 23 10,2			9,802 4617	b=2,264 6920	
	γ 63 9 52,3	0,049 4859	+ 10,7	9,950 5141	c=2,412 7444	
	180 0 0		+248,3			
	lg' $E_0 =$	7,548 2736				
	Сумма	0,000 0007				
	$\varphi =$	—7	+248,3 = [d]			

Примѣчаніе. Предлагается читателю вычислить среднія ошибки, какъ для I-й группы.

Поправки по „условию сторонъ“:

$$\lg A_0 + \lg \text{sn } \alpha_1 + \lg \text{sn } \alpha_2 + \lg \text{sn } \alpha_3 + \lg' \text{sn } \gamma_1 + \\ + \lg' \text{sn } \gamma_2 + \lg' \text{sn } \gamma_3 + \lg' E_0 + \varphi = 0$$

Слѣдовательно эта поправка для угловъ равна (см. стр. 123):

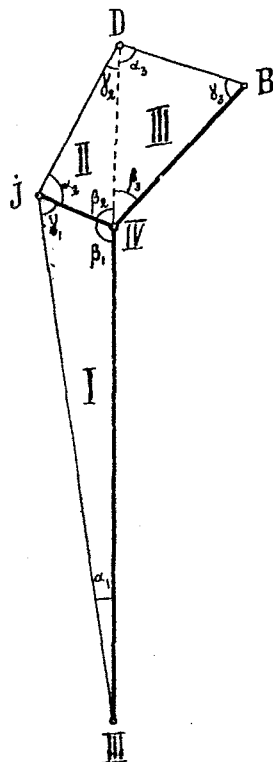
$$*) c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{-7}{+248,3} = -0'',028 \text{ — ничтожна, слѣ-}$$

довательно ею можно пренебречь,

а для ихъ lg Sn и lg' Sn она равна

$$c' = d_n \frac{\varphi}{[d]}$$

что и надписано въ 3-й графѣ (цифры —5 и —2), при чемъ d_n дано въ 4-й графѣ.



черт. 17.

§ 8.

Уравновѣшеніе третьей группы.

(Три Δ -ка).

Вычисленіе азимута V_A^D и длины стороны S_{A-D} .

Желая далѣе присоединить часть сѣти, заключающуюся между пунктами А, D, G, E, мы вычисляемъ азимуть и длину S_A^D стороны AD, принимая ее за базисъ въ данной группѣ треугольниковъ.

Это вычисленіе производится по координатамъ точекъ А и D; опредѣленіе-же координатъ А и D помѣщено ниже, въ § 12, откуда и взяты:

Точки	Ординаты y	Абсциссы x
A	+529,920	—1945,476
D	+189,034	—1722,059

$$\operatorname{tg} V_A^D = \frac{\Delta y_D}{\Delta x_D} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-340,886}{+223,417}$$

$$\lg \operatorname{tg} V_A^D = 0,183 \ 4930$$

$$V_A^D = 360 - 56^\circ 45' 32'',9$$

$$\text{Азимуть (AD)} = V_A^D = 303^\circ 14' 27'',1$$

Повѣрка:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \pi + V_A^D \right) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y} = \frac{-117,469}{+564,303}$$

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + V_A^D \right) = 9,318 \ 4109$$

$$\frac{1}{4} \pi + V_A^D = 360 - 11^\circ 45' 32'',9 = 348^\circ 14' 27'',1$$

Длина AD:

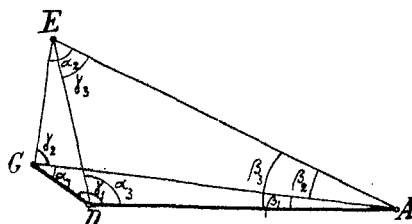
$$S_{A-D} = \frac{\Delta y_D}{\operatorname{sn} V_A^D} = \frac{\Delta x_D}{\operatorname{cs} V_A^D}$$

$\lg \Delta y_D = 2,532 \ 6092$	$\lg \Delta x_D = 2,349 \ 1162$
$\lg \operatorname{sn} V = 9,922 \ 4003$	$\lg \operatorname{cs} V = 9,738 \ 9072$
$\lg S = 2,610 \ 2089$	$\lg S = 2,610 \ 2090$
$S = 407,576$	$S = 407,576$

Среднее:

$$\lg S_{A-D} = 2,610 \ 2090$$

$$S_{A-D} = 407,576$$



Черт. 18.

Уравновѣшеніе III группы треугольниковъ

(3 треугольника).

[Аналогично § 5].

Вычисленіе Δ -ковъ GAD, EAG и DAE.

№ Δ -ка		Измѣренные углы.	Ошибки угловъ f_n и f_g . Поправки по условію угловъ.	Исправленные углы и новыя поправки (по условію сторонъ)	(Условіе сторонъ) $\lg' Sn$ знаменателя и $\lg Sn$ числителя.	Табличная разность d на 1"	$\lg(m = \frac{a}{Sn\alpha})$ $\lg Sn,$	$\lg$ стороны. $a = m \cdot Sn\alpha$ $b = m \cdot Sn\beta$ $c = m \cdot Sn\gamma$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Начальная сторона $A_0 = D-A$. Конечная $E_0 = D-A$.								
I	$P_a = G$	$\alpha = 27^\circ 00' 52'',4$	$+14,4$	$27^\circ 1' 6'',8$	$0,342 \ 6773$	$+41,3$	$2,952 \ 8883$ $9,657 \ 3207$	$a = 2,610 \ 2090$
(7)	$P_b = A$	$\beta = 5 \ 32 \ 3,7$	$+8,8$	$5 \ 32 \ 12,5$			$8,984 \ 4506$	$b = 1,937 \ 3488$
	$P_c = D$	$\gamma = 147 \ 26 \ 26,3$	$+14,4$	$147 \ 26 \ 40,7$	$9,730 \ 8745$	$-33,0$	$9,730 \ 8729$	$c = 2,683 \ 7612$
		$179 \ 59 \ 22,4$	$+37,6$	$180 \ 0 \ 0$			$2,707 \ 4929$	
II	$P_a = E$	$\alpha = 71 \ 13 \ 48,8$	$+2,2$	$71 \ 13 \ 51,0$	$0,023 \ 7314$	$+7,1$	$9,976 \ 2683$	$a = 2,683 \ 7612$
(8)	$P_b = A$	$\beta = 19 \ 28 \ 14,1$	$-3,5$	$19 \ 28 \ 10,6$			$9,522 \ 8443$	$b = 2,230 \ 3372$
	$P_c = G$	$\gamma = 89 \ 17 \ 56,3$	$+2,1$	$89 \ 17 \ 58,4$	$9,999 \ 9676$	$+0,3$	$9,999 \ 9676$	$c = 2,707 \ 4605$
		$179 \ 59 \ 59,2$	$+0,8$	$180 \ 0 \ 0$			$2,720 \ 9189$	
III	$P_a = D$	$\alpha = 104 \ 11 \ 26,3$	$-0,3$	$104 \ 11 \ 26,0$	$0,013 \ 4586$	$-5,4$	$9,986 \ 5416$	$a = 2,707 \ 4605$
(9)	$P_b = A$	$\beta = 25 \ 00 \ 17,8$	$+5,3$	$25 \ 00 \ 23,1$			$9,626 \ 0526$	$b = 2,346 \ 9715$
	$P_c = E$	$\lambda = 50 \ 48 \ 11,2$	$-0,3$	$50 \ 48 \ 10,9$	$9,889 \ 2893$	$+17,1$	$9,889 \ 2901$	$c = 2,610 \ 2090$
		$179 \ 59 \ 55,3$	$+4,7$	$180 \ 0 \ 0$				
			$+38,4$ $-4,7$	Сумма	$9,999 \ 9987$	$+65,8$ $-38,4$		
		$+f_1 + f_2 - f_3 = [f_n] =$	$+33,7$	$\varphi =$	$+13$	$+27,4$	$= [d]$	
I		$\beta \ 5^\circ 32' 3'',0$	$+8,8$	Примѣчаніе. Вычислить среднія ошибки, какъ для 1-й группы.				
II		$\beta \ 19 \ 28 \ 14,1$	$-3,5$					
III		$- \beta \ 334 \ 59 \ 42,2$	$-5,3$					
		$360 \ 0 \ 0$	$\pm 0,0$					

Поправки по условію угловъ:

$$(s) = \frac{3f_s - [f_n]}{2n} = \frac{0 - 33,7}{6} = -5'',62$$

$$(1) = \frac{f_1 - (s)}{3} = +14'',4; (2) = \frac{f_2 - (s)}{3} = +2'',1 \text{ или } +2'',2; (3) = \frac{f_3 + (s)}{3} = -0'',3.$$

Поправки по условію сторонъ:

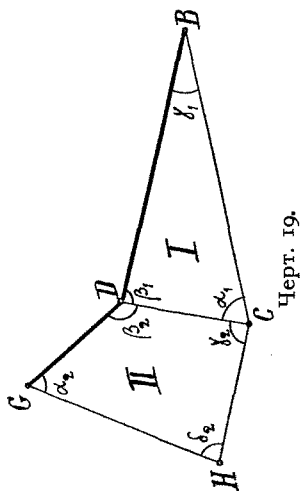
$$\frac{\varphi}{[d]} = \frac{+13}{+27,4} = +0'',47 = \infty 0'',5$$

§ 9.

Уравновѣшеніе IV группы

Аналогично § 6.

(I треугольникъ и I четырехугольникъ).



1. Уравновѣшеніе угловъ.

№ △-ка или □-ка	Измѣренные углы	Ошибки угловъ f_p и f_s Поправки угловъ	Исправлен- ные углы
I	α 68° 5' 33",8	—13,4	68° 5' 20",4
	β 86 38 45,0	— 6,1	86 38 38,9
	γ 25 16 14,1	—13,4	25 16 0,7
	180 0 32,9	—32,9	180 0 0
II	α 62 39 45,0	—11,2	62 39 33,8
	β 127 57 22,5	— 4,0	127 57 18,5
	γ 89 27 41,2	—11,2	89 27 3,00
	δ 79 55 48,8	—11,1	79 55 37,7
	360 0 37,5	—37,5	180 0 0,0
I II	V_D^B 121 11 48,5	азимутъ	линіи D—B
	β 86 38 45,0	— 6,1	
	β 127 57 22,5	— 4,1	
	335 47 56,0	—10,1	= f_s
	V_D^G = 335° 47' 45",9	=азимутъ	линіи D—G

1. Суммы угловъ.

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + f_1 = \pi$$

$$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \delta_2 + f_2 = 2\pi$$

$$\beta_1 + \beta_2 + f_s = \sigma$$

2. Условныя уравненія.

$$[\alpha_1 + (1)] + [\beta_1 + (1) + (s)] + [\gamma_1 + (1)] = \pi$$

$$[\alpha_2 + (2)] + [\beta_2 + (2) + (s)] + [\gamma_2 + (2)] + [\delta_2 + (2)] = 2\pi$$

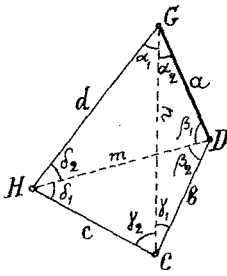
$$[\beta_1 + (1) + (s)] + [\beta_2 + (2) + (s)] = \sigma$$

3. Уравнения погрѣшностей	4. Поправки угловъ
$3(1)+(s)=f_1$	$(1)=\frac{f_1-(s)}{3}$
$4(2)+(s)=f_2$	$(2)=\frac{f_2-(s)}{4}$
$2(s)+(1)+(2)=f_s$	$(s)=\frac{12f_s-4f_1-3f_2}{17}$

$$(s) = \frac{12(-10,1) - 4(-32,9) - 3(-37,5)}{17} = +7'',23$$

$$(1) = \frac{-32,9 - 7,23}{3} = -13''38 ; (2) = \frac{-37,5 - 7,23}{4} = -11'',18$$

2. Вычисленіе четырёхугольника HGDC на основаніи выше уравнированныхъ угловъ:

Вычисленіе угловъ: $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$			
 Черт. 20.	1.	2.	3.
	$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ $\beta_1 + \beta_2 = \beta$ $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ $\delta_1 + \delta_2 = \delta$	$S_{C-D} = \frac{S_{D-B} \cdot \sin \gamma_B}{\sin \alpha_C}$ $\gamma_B = 25^\circ 16' 00'',7$ $\alpha_C = 68 \ 05 \ 20,4$	$\lg S_{D-B} = 2,2646920$ $\lg \sin \gamma_B = 9,6302599$ $1,8949519$
		4.	$\lg \sin \alpha_C = 9,9674378$ $\lg S_{C-D} = 1,9275141$ $S_{C-D} = 84,628 = b$
		$\frac{1}{2}(\gamma_1 + \alpha_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = 26^\circ 1' 20'',8$ $\lg \frac{1}{2}(\gamma_1 - \alpha_2) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$	
5.	6.		7.
$\lg a = 1,937 \ 3488$	$\lg (a-b) = 0,287 \ 3538$	$\lg \operatorname{ctg} \beta/2 = 9,688 \ 6135$	$\alpha = 62^\circ 30' \ 33'',8$
$a = 86,566$	$\lg (a+b) = 2,233 \ 4886$	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma_1 - \alpha_2) = 7,7424787$	$\alpha_2 = 25 \ 42 \ 20,9$
$b = 84,628$	$\frac{1}{2}(\gamma_1 - \alpha_2) = 0^\circ 18' 59'',9$	$\frac{1}{2}(\gamma_1 + \alpha_2) = 26 \ 1 \ 20,8$	$\alpha_1 = 36 \ 57 \ 12,9$
$a-b = 1,938$	Контроль $\gamma_1 = 26 \ 20 \ 20,7(-0'',1)$ $\alpha_2 = 25 \ 42 \ 20,9$ $\beta = 127 \ 57 \ 18,5$ Сумма = 180 0 0,1	Контроль $\alpha_1 = 36 \ 57 \ 12,9$ $\gamma_2 = 63 \ 7 \ 9,4$ $\delta = 79 \ 55 \ 37,7$ 180 0 0,0	$\gamma = 89 \ 27 \ 30,0$
$a+b = 171,194$			$\gamma_1 = 26 \ 20 \ 20,6$
			$\gamma_2 = 63 \ 7 \ 9,4$

8. Вычисление сторон n , c и d и углов β_1 , β_2 , δ_1 , δ_2

$n = \frac{a \cdot \text{Sn}\beta}{\text{Sn}\gamma_1}$	$n = \frac{b \cdot \text{Sn}\beta}{\text{Sn}\alpha_2}$	$c = \frac{n \cdot \text{Sn}\alpha_1}{\text{Sn}\delta}$	$d = \frac{n \cdot \text{Sn}\gamma_2}{\text{Sn}\delta}$
$\lg a = 1,937\ 3488$ $\lg \text{Sn}\beta = 9,896\ 7976$ $\lg \text{Sn}\gamma_1 = 1,834\ 1464$ $\lg n = 9,647\ 0720$ $n = 153,842$	$\lg b = 1,927\ 5141$ $\lg \text{Sn}\beta = 9,896\ 7976$ $\lg \text{Sn}\alpha_2 = 1,824\ 3117$ $\lg n = 9,637\ 2398$ $n = 153,841$	$\lg n = 2,187\ 0731$ $\lg \text{Sn}\alpha_1 = 9,778\ 9957$ $\lg \text{Sn}\delta = 1,966\ 0688$ $\lg c = 9,993\ 2537$ $c = 93,932$	$\lg n = 2,187\ 0731$ $\lg \text{Sn}\gamma_2 = 9,950\ 3404$ $\lg \text{Sn}\delta = 2,137\ 4135$ $\lg d = 9,993\ 2537$ $d = 139,367$
$\frac{1}{2}(\beta_2 + \delta_1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = 45^\circ 16' 15'', 0$ $\text{tg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \delta_1) = \frac{c-b}{c+b} \cdot \text{ctg} \frac{\gamma}{2}$ $\lg (a-b) = 0,968\ 6697$ $\lg \text{ctg} \frac{1}{2}\gamma = 0,004\ 1058$ $\lg (c+b) = 0,972\ 7755$ $\lg \text{tg} \frac{1}{2}(\beta_2 - \delta_1) = 2,251\ 7842$ $\frac{1}{2}(\beta_2 - \delta_1) = 8,720\ 9913$ $\frac{1}{2}(\beta_2 - \delta_1) = 3^\circ 0' 39'', 1$ $\frac{1}{2}(\beta_2 + \delta_1) = 45^\circ 16' 15,0$	$c = 93,932$ $b = 84,628$ $c-b = 9,304$ $c+b = 178,560$	$\beta = 127^\circ 51' 18'', 5$ $\beta_2 = 48\ 16\ 54,1$ $\beta_1 = 79\ 40\ 24,4$ $\delta = 79\ 55\ 37,7$ $\delta_1 = 42\ 15\ 35,9$ $\delta_2 = 37\ 40\ 1,8$ Контроль $\beta_1 = 79\ 40\ 24,4$ $\delta_2 = 37\ 40\ 1,8$ $\alpha = 62\ 39\ 33,8$ $180\ 0\ 0,0$	Повѣрка: $m = \frac{b \cdot \text{Sn}\gamma}{\text{Sn}\delta_1} = \frac{c \cdot \text{Sn}\gamma}{\text{Sn}\beta_2}$ $\lg b = 1,927\ 5141$ $\lg \text{Sn}\gamma = 9,999\ 9806$ $\lg' \text{Sn}\delta_1 = 0,172\ 3105$ $\lg m = 2,099\ 8052$ $m = 125,836$ $\lg c = 1,972\ 8151$ $\lg \text{Sn}\gamma = 9,999\ 9806$ $\lg' \text{Sn}\beta_2 = 0,127\ 0135$ $\lg m = 2,099\ 8092$ $m = 125,837$

Окончательное уравнивание IV группы (1 □-къ и 1 △-къ).

3. Уравнивание сторонъ.

№ $\triangle$ -ковъ.	Углы, исправлен- ные по условию угловъ, и поправ- ки по условию сторонъ	lg Sn γ и lg' Sn α	Табл. разн. d на 1"	lg(m= $\frac{a}{\text{Sn}\alpha}$)	lg сторонъ.	Стороны.
				lg Sn	a=m.Sn α b=m.Sn β c=m.Sn γ	
Начальная сторона A ₀ =D—B. Конечная E ₀ =D—G.						
I	lg A ₀ = -0.5	2,264 6920 +4		2,297 2546		
	α 68° 5' 20",4	0,032 5622	+ 8,4	9,967 4374	a=2,264 6920	
	β 86 38 38,9 +0.5	+23		9,999 2546	b=2,296 5092	
	γ 25 16 0,7	9,630 2599	+ 44,6	9,630 2622	c=1,927 5168	
	180 0 0,0			2,099 8285		
II	lg A ₀ = -0.5	+12				
	α 42 15 39,9	0,172 3105	+ 23,2	9,827 6883	a=1,927 5168	
	β 48 16 54,1 +0.5			9,872 9865	b=1,972 8150	
	γ 89 27 30,0	9,999 9806	+ 0,2	9,999 9806	c=2,099 8091	
	180 0 0,0			2,151 2539		
III	lg A ₀ = -0.5	+5				
	α 62 39 33,8	0,051 4443	+ 10,9	9,948 5552	a=2,099 8091	
	β 79 40 24,4 +0.5	+14		9,992 9077	b=2,144 1616	
	γ 37 40 1,8	9,786 0935	+ 27,2	9,786 0949	c=1,937 3488	
	180 0 0,0		+114,5			
	lg' E ₀ =	8,062 6512				
	Сумма	9,999 9942				
	φ =	+58	+114,5	=[d]		

Примѣчаніе. Вычислить среднія ошибки, какъ для 1 группы.

Поправки по условию сторонъ:

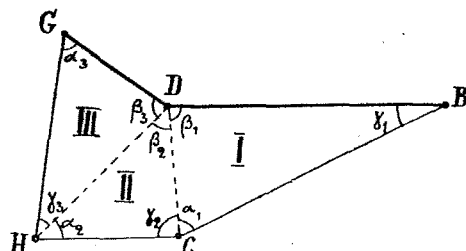
$$\lg A_0 + \lg \text{Sn} \gamma_1 + \lg \text{Sn} \gamma_2 + \lg \text{Sn} \gamma_3 + \lg' \text{Sn} \alpha' + \\ + \lg' \text{Sn} \alpha_2 + \lg' \text{Sn} \alpha_3 + \lg E_0 + \varphi = 0$$

Поправки для угловъ:

$$c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{+58}{+114,5} = +0",51_{\infty} = 0",5$$

Поправки для lg Sn и lg' Sn угловъ:

$$c' = d_n \cdot \frac{\varphi}{[d]} \text{ (см. графу 3-ю).}$$



Черт. 21.

§ 10.

Вычисленіе отдѣльныхъ Δ -новъ.

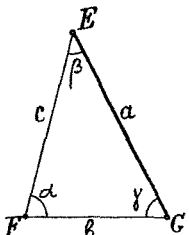
(Δ -ки GFE и $IIIKJ$).

За базисъ для ихъ вычисленія взяты соотвѣтственно: сторона EG и сторона $IIIJ$, длины и азимуты которыхъ вычислены по координатамъ точекъ E, G III и J (эти величины даны въ § 12, въ Δ -кѣ 3 и Δ -кѣ 4).

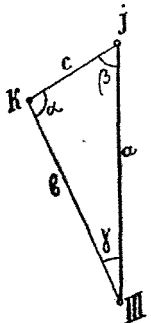
Невязки f распределены поровну между всѣми углами въ каждомъ Δ -кѣ; въ этомъ и состоитъ здѣсь все уравниваніе.

Примѣчаніе. Вычислить среднія ошибки.

Вычисленіе отдѣльнаго треугольника FGE .

Треугольникъ Δ 13	Измѣренные углы	Исправленные углы	$\lg \left(m = \frac{a}{\sin \alpha} \right)$	$\lg$ сторонъ	Стороны.
			$\lg \sin$		
 Черт. 22					
	α 76° 50' 56",2	76° 50' 54",9	2,241 8797 9,988 4574	a изъ Δ № 8 a 2,230 3372	
	β 40 22	40 47 6,3	9,811 3553	b 2,053 3251	
	γ 62 47	62 21 58,8	9,949 0470	c 2,190 9268	
	180 0 3,7 f = -3,7	180 0 0,0			

Вычисленіе отдѣльнаго треугольника $IIIKJ$.

Треугольникъ Δ 14	Измѣренные углы	Исправленные углы	$\lg \left(m = \frac{a}{\sin \alpha} \right)$	$\lg$ сторонъ	
			$\lg \sin$		
 Черт. 23					
	α 127° 47' 35",6	127° 47' 49",0	2,985 0682 9,897 7302	a изъ Δ № 4 a 2,882 7984	
	β 46 1 49,7	46 2 3,2	9,857 1844	b 2,842 2526	
	γ 6 9 54,4	6 10 7,8	9,031 1520	c 2,016 2202	
	179 59 19,7 f = +40,3	180 0 0,0			

§ 11.

Вычисленіе средней ошибки M невязки одного треугольника, средней ошибки m_w угла и средней ошибки m_r направленія для всей сѣтки (по Uhlich'y)

№ Δ-ка	Треуголь- ники	Невязка f	ff
1	I III K	+40,3 ^{max.}	1624,09
2	IV III J	+ 9,4	88,36
3	B III IV	-13,1	171,61
4	A III B	+ 8,4	70,56
5	A III IV	- 9,5	90,25
6	A IV B	+ 4,8	23,04
7	B A D	+ 2,8	7,84
8	B A E	+15,0	225,0
9	G A D	+37,6	1413,76
10	F A G	+27,1	734,41
11	E A F	-30,0	900,0
12	E A G	+ 0,8 ^{min.}	0,64
13	E A D	+ 4,7	22,09
14	D B C	-32,9	1082,41
15	E B D	- 9,3	86,79
16	E B C	-23,4	547,56
17	D C E	+18,8	353,44
18	E D G	-26,3	691,69
19	F E G	- 3,7	13,69

Число Δ-ковъ n=

Сумма=8146,93=[ff]

Средняя ошибка невязки одного треугольника:

$$M \pm = \sqrt{\frac{[ff]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{8146,93}{19}} = \pm 20'',7^*)$$

Средняя ошибка измѣренія одного угла:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{3.n}} = \pm 12'',0$$

Средняя ошибка одного направленія:

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{6.n}} = \pm 8'',5$$

*) По формулѣ автора: $M = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{n}$, получаемъ:

$$M = \frac{+40,3 - 0,8}{19} = \pm 20'',8 \text{ — тотъ-же результатъ.}$$

§ 12.

Вычисленіе координатъ точекъ главной сѣти.

Вычисленіе координатъ точекъ вышеуравновѣшенной триангуляціонной сѣти производится по нижеслѣдующему формуляру, гдѣ въ 1-й графѣ помѣщается № группы; ея вершины, координаты которыхъ вычисляются здѣсь, помѣчены во 2-й графѣ; въ 3-й графѣ указывается, откуда взяты углы полигона β и $\lg$ сторонъ S_n ; при этомъ въ первой горизонтальной строкѣ помѣщается азимутъ базиса данной группы. По формулѣ графы 5-й получаются азимуты каждой стороны, а затѣмъ производятся вычисленія, указанные въ остальныхъ графахъ, при чемъ для опредѣленія координатъ всѣхъ вершинъ данной группы берутъ за исходныя—координаты начальной точки, выписанныя въ первой горизонтальной строкѣ (напр.—59,399 и—2665,330—координаты данной точки III).

Вычисливъ всѣ координаты данной группы, дѣлають контроль и совмѣстно—опредѣленіе вычислительныхъ ошибокъ f_x и f_y въ полученныхъ координатахъ, для чего берутъ алгебраическія суммы $[\Delta y]$ и $[\Delta x]$ и сравнивають ихъ результаты изъ графъ 9-й и 10-й съ результатами изъ графъ 11-й и 12-й; эти всегда малыя ошибки f_x и f_y обусловливаются накопленіемъ ошибокъ послѣдняго знака логарифмовъ; распредѣляются онѣ между координатами отдѣльныхъ точекъ пропорціонально величинамъ разностей ихъ координатъ.

Примѣчаніе. Изъ мѣста, указаннаго въ графѣ 3-й, выписываются данныя, конечно, уже съ поправками; напримѣръ уголъ β берется изъ формуляра § 6 съ надписанной тамъ надъ нимъ поправкой —4,1, т. е. $\beta = 25^\circ 57' 14'', 2 - 4'', 1 = 25^\circ 57' 10'', 1$, и т. д.

Для примѣра, какъ заполняется нижеслѣдующій формуляръ, рассмотримъ вычисленіе точекъ А и В.

Эти точки сѣти принадлежатъ къ I группѣ (см. стр. 156) и связаны (измѣреніемъ угловъ) съ точками III и IV; азимутъ линіи III—IV, по стр. 149, равенъ:

$$V_{III}^{IV} = 13^\circ 21' 12'', 4$$

тамъ-же даны и координаты точки III.

Выписавъ всѣ эти данныя въ первую горизонтальную строку нижеслѣдующаго формуляра, записываемъ туда въ графѣ 4-й (уголъ $25^\circ 57' 10'', 1$, взятый изъ стр. 156-й графы 5-й; прибавивъ его къ V_{III}^{IV} , получаемъ простираніе линіи III А равное $39^\circ 18' 25'', 5$, что и записываемъ въ 5-ю графу; 6-ю графу здѣсь мы оставляемъ пустою,

т. к. выше уже были вычислены $\lg$ сторонъ,—такъ что прямо въ 7-ю графу заносимъ число 2,968 6320, которое есть $\lg S_{III-A}$ (см. стр. 156, графа 9-я); въ этой-же 7-й графѣ мы записываемъ числа 9.801 7228 и 9,888 6125, которыя суть $\lg S_n$ и $\lg C_s$ угла $39^\circ 18,22",5$; сложивъ числа: 9,801 8228 и 2,968 6320, а также 2,968 6320 и 9,888 6125, мы записываемъ результаты: 2,770 3548 и 2,857 2445 въ 8-ю графу; найдя по этимъ $\lg$ соотвѣтствующія числа, мы получаемъ приращенія координатъ: $\Delta y = +589,325$ и $\Delta x = +719,854$, которыя записываемъ въ 9-ю и 10-ю графы; придавъ ихъ алгебраически къ извѣстнымъ координатамъ точки III, мы получаемъ искомыя координаты точки A: $y = +529,920$ и $x = -1945,476$.

Координаты точки B находятся совершенно такимъ-же порядкомъ, только уголъ полигона III A B (черт. 14) здѣсь (графа 4-я) составляется изъ суммы двухъ угловъ: $\alpha_1 = 47^\circ 45' 52",0$ и $\beta_2 = 37^\circ 50' 55",2$ (стр. 156—157).

Вычисливъ координаты точки B, мы для *контроля* вычисляемъ по нимъ и по азимуту линіи B IV (черт. 14) координаты данной точки IV: должны получиться тождественные результаты; или, что все равно,—суммы всѣхъ приращеній $[\Delta y]$ и $[\Delta x]$ должны быть равны разностямъ между *данными* координатами точекъ III и IV; въ дѣйствительности же получаются разности: $f_y = -0,0010 = -10^m/m$ и $f_x = 0,000$; всю эту невязку въ ординатахъ ($-10^m/m$) мы распредѣляемъ между всѣми приращеніями ординатъ приблизительно пропорціонально самимъ приращеніямъ: т. к. 589,325 почти въ 3 раза больше 183,536 и 240,049, то къ первому мы вводимъ поправку -6 , а къ остальнымъ двумъ—по -2 (см. графу 9-ю) и результаты (съ поправками заносимъ въ графу 11-ю; что-же касается абсциссы, то онѣ остаются здѣсь безъ всякихъ поправокъ, ибо $f_x = 0,000$.

Совершенно такимъ-же способомъ производятся и дальнѣйшія вычисленія координатъ остальныхъ главныхъ пунктовъ сѣти.

№ группы	Точки	Изъ какого Δ-ка взяты данныя	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $r_n = r_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	Сторона S_n	$\lg \sin r_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos r_n$	$\lg S_n \cdot \sin r_n$ $\lg S_n \cdot \cos r_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	III	$V_{III}^{IV} =$	—	13° 21' 12,"4		9,8017228	
		$\Delta 1$	25 57 10,1	39 18 22,5		2,9686320	2,7703548
						9,8886125	2,8572445
	A	$\Delta 1$	47 45 52,0			9,9137919n	
		$\Delta 2$	37 50 55,2				2,2637446n
			85 36 47,2	301 55 9,7		2,3499527	2,1076698
						9,7577171	
	B	$\Delta 2$	113 6 46,5			9,9285733n	
				238 01 56,2		2,4517264	2,3802997n
						9,7238179n	2,1755443n
(IV)							
2	B	$V_B^{IV} =$	238° 1' 56",2	238° 1' 56",2		9,9321658n	
		ΔIII	63 9 52,3	301 11 48,5		2,2646920	2,1968578n
						9,7143124	1,9790044
	D	ΔIII	77 26 57,5			9,8240826n	
		ΔII	23 11 5,0				2,2175242n
			100 38 2,5	221 49 51,0		2,3934416	2,2656662n
						9,8722246n	
	J	ΔII	84 35 23,1			9,0384559n	
		ΔI	59 51 7,2				1,9212543n
			144 26 30,3	186 16 21,3		2,8827984	2,8801906n
(III)					9,9973922n		

Разность ординат $\Delta y_n = S_n \cdot \sin V_n$		Разность абсцисс $\Delta x_n = S_n \cdot \cos V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- нат Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сцисс Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Точки
+	—	+	—			
9		10		11	12	13
— 6 589,325	— 2 183,536	719,854	128,136	— 59,399	— 2665,339	III
				+ 589,319	+ 719,854	
				+ 529,920	— 1945,476	A
				— 183,538	+ 128,136	
				+ 346,382	— 1817,340	B
	— 2 240,049	149,811		— 240,051	— 149,811	
				+ 106,331	— 1967,151	IV
+ 589,325	— 424,585	+ 847,990	— 149,179			
+ 165,740	[Δy]	+ 698,179	$\equiv [\Delta x]$			
165,730	должно быть	698,179	должно быть	$\equiv [\Delta x]$		
— 0,010	$\equiv f_y$	0,000	$\equiv f_x$			
	— 1 157,347	95,281	184,360	+ 346,382	— 1817,340	B
				— 157,348	+ 95,281	
				+ 189,034	— 1722,059	D
				— 165,016	— 184,360	
				+ 24,018	— 1906,419	J
	— 1 165,015	758,910	— 1	— 83,417	— 758,911	
				— 59,399	— 2665,330	III
	— 405,779	+ 95,481	— 943,270			
долж. быть	— 405,781	долж. быть	— 847,989			
$f_y =$	— 0,002	$f_x =$	— 0,001			

№ группы	Точки	Изъ какого Δ-ка взяты данныя	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $V_n = V_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	Сторона S_n	$\lg \sin V_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos V_n$	$\lg S_n \cdot \sin V_n$ $\lg S_n \cdot \cos V_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
3	A	$V_A^D =$	303° 14' 27",1	303° 14' 27",1		9,7211957n	
		Δ III	25 00 23,1	328 14 50,2		2,7074605	2,4286562n
						9,9295861	2,6370466
	E	Δ II	71 13 50,5	219 28 40,7		9,8033079n	2,0336451n
						2,2303372	2,1178809n
						9,8875437n	
	G	Δ II	89 17 58,9			9,6127684	1,5501172
		Δ I	27 1 6,3	155 47 45,9		1,9373488	1,8973875n
			116 19 5,2			9,9600387n	
	D						
4	G	$V_G^D =$	155° 47' 45",9	154° 47' 49",9		9,7937236n	
		Δ III	62 39 33,3	218 27 19,2		2,1441616	1,9378852n
						9,8938134n	2,0379750n
	H	Δ III	37 40 2,3			9,9443810	1,9171960
		Δ II	42 15 35,4	118 22 56,9		1,9728150	1,6498331n
			79 55 37,7			9,6770181n	
	C	Δ II	89 27 30,5			9,9976700	2,2941792
		Δ I	68 5 19,9	95 55 47,3		2,2965092	1,3106514n
			157 32 50,4			9,0141422n	
	(B)						

Разность ординат $\Delta y_n = S_n \cdot \sin \nu_n$		Разность абсцисс $\Delta x_n = S_n \cdot \cos \nu_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- нат Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сцисс Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	—	+	—			
9		10		11	12	13
				+529,920	—1945,476	A
	268,322	433,557		—268,322	+ 433,557	
				+261,598	—1511,919	E
	108,055		131,184	—108,055	— 131,184	
				+153,543	—1643,103	G
35,491			78,956	+ 35,491	— 78,956	
				+189,034	—1722,059	D
+35,491	—376,377	+433,557	—210,140			
	—340,886	+223,417				
дол. быть	—340,886	+223,417	дол. быть			
$f_y =$	0,000	0,000	$=f_x$			
				+ 153,543	—1643,103	G
	86,673		109,138	— 86,673	— 109,138	
				+ 66,870	—1752,241	H
82,641			44,651	+ 82,641	— 44,651	
				+ 149,511	—1796,892	C
+1			20,448	+ 196,871	— 20,448	
196,870				+ 346,382	—1817,340	B
+279,511	—86,673	0	—174,237			
192,838						
192,839	= дол. быть	дол. быть	= —174,237			
+0,001	$=f_y$	$f_x =$	0,000			

№ группы	Точки	Изъ какого Δ-ка взяты данныя	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $r_n = r_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	Сторона S_n	$\lg \sin r_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos r_n$	$\lg S_n \cdot \sin r_n$ $\lg S_n \cdot \cos r_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
5	E	$V_E^D =$	219° 28' 40",7	219° 28' 40",7			
		ΔI	40 21 58,8			9,9931417n	2,1840685n
		(13)		259 50 39,5		2,1909268	1,4372373n
	F	ΔI	76 50 54,9			9,2463105n	
		(13)		156 41 34,4		9,5973216	1,6505567
		(G)				2,0532351	2,0162657n
6	J	$V_j^{III} =$	186° 16' 21",3	186° 16' 21",3			
		$\Delta 14$	46 2 3,2			9,8983390n	1,9145592n
				232 18 24,5		2,0162202	1,8025691n
	K	$\Delta 14$	127 47 49,0			9,7863489n	
				180 6 13,5		7,2578652n	0,1001178n
		III				2,8422526	2,8402519n
						9,9999993n	

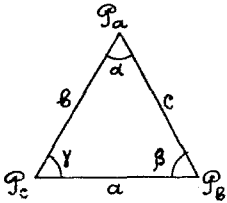
Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot \sin V_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot \cos V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	—	+	—			
9		10		11	12	13
	152,781		27,368	+261,598	—1511,919	E
				—152,782	— 27,368	
				+108,817	—1539,287	F
44,726			103,816	+ 44,724	— 103,816	
				+153,543	—1643,103	G
+44,726	—152,781	0	—131,184			
дол. быть	—108,055 —108,055	дол. быть	—131,184			
$f_y =$	0,000	$f_x +$	0,000			
	—16 82,141		—1 63,470	+ 24,018	—1906,419	J
				— 82,157	— 63,471	
	—1 1,259		—12 695,428	— 58,139	—1969,890	K
				— 1,260	— 695,440	
				— 59,399	—2665,330	III
0	—83,400	0	—758,898			
дол. быть	—83,417	дол. быть	—758,911			
$f_y =$	—0,017	$f_x =$	—0,013			

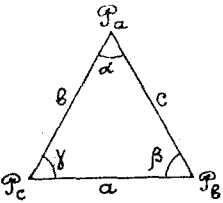
§ 13.

Вычисленіе застѣченныхъ вспомогагельныхъ пунктовъ Q....до J.

[Углы измѣрялись въ 1 пріемъ при каждой вершинѣ каждаго $\triangle$ -ка; невязка распределѣна поровну между углами каждаго $\triangle$ -ка].

Вычисленіе треугольниковъ.

	Измѣренны углы	Исправлен- ные углы	$\lg\left(m=\frac{a}{\text{Sn } \alpha}\right)$ lg Sn	lg сторонъ $a=m \cdot \text{Sn } \alpha$ $b=m \cdot \text{Sn } \beta$ $c=m \cdot \text{Sn } \gamma$
$\triangle 15$ $P_a=Q$ $P_b=J$ $P_c=IV$	$+15,0$ $\alpha 75^{\circ} 39' 22'',5$ $+15,0$ $\beta 50 46 0,0$ $+15,0$ $\gamma 53 33 52,5$	$75^{\circ} 39' 37'',5$ $50 46 15,0$ $53 34 7,5$	$2,023 5914$ $9,986 2542$ $9,889 0902$ $9,905 5638$	$a 2,009 8456$ $b 1,912 6816$ $c 1,929 1552$
$\triangle 16$ $P_a=R$ $P_b=E$ $P_c=A$	$-12,5$ $\alpha 96 47 0,0$ $-12,5$ $\beta 39 38 37,5$ $-12,5$ $\gamma 43 35 0,0$	$96 46 47,5$ $39 38 25,0$ $43 34 47,5$	$2,710 5081$ $9,996 9524$ $9,804 7972$ $9,838 4492$	$a 2,707 4605$ $b 2,515 3053$ $c 2,548 9573$
$\triangle 17$ $P_a=S$ $P_b=D$ $P_c=A$	$\alpha ---$ $\beta 32 19 45,0$ $\gamma 33 10 33,8$	$114 29 41,2$ $32 19 45,0$ $33 10 33,8$	$2,651 1681$ $9,959 0409$ $9,728 1772$ $9,738 1568$	$a 2,610 2090$ $b 2,379 3453$ $c 2,389 3249$
	$65 30 18,8$	$180 0 0,0$		

	Измеренные углы	Исправленные углы	$\lg\left(m = \frac{a}{\text{Sn } \alpha}\right)$ lg Sn	lg сторонъ $a = m \cdot \text{Sn } \alpha$ $a = m \cdot \text{Sn } \beta$ $a = m \cdot \text{Sn } \gamma$
Δ 18 $P_a = T$ $P_b = R$ $P_c = A$	α — — — β 36° 10' 37",5 γ 26 0 0,0 62 10 37,5	117° 49' 22",5 36 10 37,5 26 0 0,0 180 0 0,0	2,568 6594 9,946 6459 9,771 0602 9,641 8420	a 2,515 3053 b 2,339 7196 c 2,210 5014
Δ 19 $P_a = U$ $P_b = B$ $P_c = A$	α — — — β 44 18 56,2 γ 32 33 18,8 76 52 15,0	103 7 45 44 18 56,2 32 33 18,8 180 0 0,0	2,361 4560 9,988 4967 9,844 2350 9,730 8728	a 2,349 9527 b 2,205 6910 c 2,092 3288
Δ 20 $P_a = V$ $P_b = A$ $P_c = B$	α — — — β 45 53 22,5 γ 45 47 11,2 91 39 33,7	88 20 26,3 45 52 22,5 44 47 11,2 180 0 0,0	2,350 1348 9,999 8179 9,856 0018 9,855 3651	a 2,349 9527 b 2,206 1366 c 2,205 4999
Δ 21 $P_a = W$ $P_b = D$ $P_c = E$	α 49 26 30,0 β 96 38 45,0 γ 33 55 0,0 180 0 15,0 $f = -15,0$	α — — — 49 26 25,0 96 38 40,0 33 54 55,0 180 0 0,0	2,446 3130 9,880 6585 9,997 0731 9,746 6080	a 2,346 9715 b 2,463 3861 c 2,212 9210
Δ 22 $P_a = X$ $P_b = G$ $P_c = E$	α — — — β 44 17 7,5 γ 31 46 45,0 75 33 52,5	104 26 7,5 44 17 7,5 31 16 45,0 180 0 0,0	2,244 2693 9,986 0679 9,844 0004 9,715 3417	a 2,230 3372 b 2,088 2697 c 2,959 6110
Δ 23 $P_a = Y$ $P_b = A$ $P_c = E$	α — — — β 19 49 7,5 γ 28 33 45,0 48 22 52,5	131 37 7,5 19 49 7,5 28 33 45,0 180 0 0,0	2,833 8023 9,873 6582 9,530 2584 9,679 5343	a 2,707 4605 b 2,364 0607 c 2,513 3366

§ 14.

2. Вычисление координатъ

№ группы	Точки	Изъ какого $\triangle$ -ка взяты данныя	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $V_n = V_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	Сторона S_n	$\lg \sin V_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos V_n$	$\lg S_n \cdot \sin V_n$ $\lg S_n \cdot \cos V_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
7	J	$V_J^{IV} = \triangle 15$	126° 25' 14",1	126° 25' 14",1		8,690 1908	
			50 46 15,0	177 11 29,1		1,929 1552	0,619 3460
						9,9994780n	1,9286332n
(IV)	Q	$\triangle 15$	75 39 37,5	72 51 6,6		9,980 2514	1,892 9330
						1,912 6816	1,382 2735
						9,469 5919	
8	E	$V_E^A = \triangle 16$	148 14 50,2	148 14 50,2		9,1374472n	
			39 38 25,0	187 53 15,2		2,548 9573	1,6864045n
						9,9958717n	2,5448290n
(A)	R	$\triangle 16$	96 46 47,5	104 40 2,7		9,985 6114	2,500 9167
						2,515 3053	1,9187824n
						9,4034771n	

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВЪ.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot S_n \cdot V_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot cs \cdot V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	-	+	-			
9		10		11	12	13
				+ 24,018	-1906,419	J
4,162			84,846	+ 4,162	- 84,846	
				+ 28,180	-1991,265	Q
78,151		24,114		+ 78,151	+ 24,114	
				+106,331	-1967,151	IV
+82,313	0	+24,114	-84,846			
+82,313	-должно быть	должн. быть	-60,732			
			-60,732			
0,000	=f _y	f _x =	0,000			
				+261,598	-1511,919	E
	48,574		+1 350,614	- 48,574	- 350,613	
				+213,024	-1862,532	R
316,896			82,944	+316,896	- 82,944	
				+529,920	-1945,476	A
+316,896	-48,574	0	-433,558			
+268,322						
+268,322	-должно быть	должн. быть	-433,557			
0,000	=f _y	f _x =	0,001			

2. Вычисление координат

№ группы	Точки	Изъ какого Δ -ка взяты данные	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $r_n = r_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	Сторона S_n	$\lg \sin r_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos r_n$	$\lg S_n \cdot \sin r_n$ $\lg S_n \cdot \cos r_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
9	D	$V_D^A =$	123° 14' 27",1	123° 14' 27",1			
		$\Delta 17$	32 19 45,0	155 34 12,1		9,6165603 2,3893249 9,9592644n	2,0058852 2,3485893n
	S (A)	$\Delta 17$	114 29 41,2	90 3 53,3		9,9999997 2,3793453 7,0534935n	2,3793450 9,4328388n
10	K	$V_K^D =$	104 40 2,7	140 40 2,7			
		$\Delta 18$	36 10 37,5	140 50 40,2		9,8003233 2,2105014 9,8895454n	2,0108247 2,1000468n
	T (A)	$\Delta 18$	117 49 22,5	78 40 2,7		9,9914489 2,3397196 9,2933709	2,3311685 1,6330905

Вспомогательных пунктовъ.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot \sin V_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot \cos V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	—	+	—			
9		10		11	12	13
				+189,034	—1722,059	D
101,364			223,146	+101,364	— 223,146	
				+290,398	—1945,205	S
239,522			0,271	+239,522	— 0,271	
				+529,920	—1945,476	A
+340,846	0	0	—223,417			
+340,846	—должно быть	должн. быть	— —223,417			
0,000	=f _y	f _x =	0,000			
				+213,024	—1862,532	R
102,524			—1 125,906	+102,524	— 125,907	
				+315,548	—1988,439	T
214,372		42,963		+214,372	+ 42,963	
				+529,920	—1945,476	A
+316,896	0	+42,963	—125,906			
+316,896	—должно быть	должн. быть	— 82,943			
0,000	=f _y	f _x =	— 82,944			
			0,001			

2. Вычисление координатъ

№ группы	Точки	Изъ какого Δ -ка взяты данныя	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $V_n = V_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	S_n Сторона	$\lg \sin V_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos V_n$	$\lg S_n \cdot \sin V_n$ $\lg S_n \cdot \cos V_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
11	B	r_B^A	124° 55' 9",7	124° 55' 9",7			
		$\Delta 19$	44 18 56,2	169 14 5,9		9,271 3343 2,092 3288 9,9922890n	1,363 6631 2,0846178n
	U	$\Delta 19$	103 7 45,0	92 21 50,9		9,999 6302 2,205 6910 8,6154272n	2,205 3212 0,8211182n
		(A)					
12	A	r_A^B	304° 55' 9",7	304° 55' 9",7			
		$\Delta 20$	45 52 22,5	350 47 32,2		9,2041286n 2,205 4999 9,994 3676	1,4096285n 2,199 8675
	V	$\Delta 20$	88 20 26,3	259 7 58,5		9,9921412n 2,206 1366 9,2753834n	2,1982778n 1,4815200n
		B					

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХЪ ПУНКТОВЪ.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot \sin V_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot \cos V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+\Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+\Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	—	+	—			
9		10		11	12	13
				+346,382	—1817,340	B
— 1 23,103			121,512	+ 23,102	— 121,512	
				+369,484	—1938,852	U
— 7 160,443			6,624	+160,436	— 6,624	
				+529,920	—1945,476	A
+183,546	0	0	— 128,136			
+183,538	должно быть	долж. быть	— 128,136			
—0,008	=fy	fx=	0,000			
				+529,920	—1945,476	A
	+ 1 25,682	158,441		— 25,681	+ 158,441	
				+504,239	—178,7035	V
	+ 5 157,862		30,305	—157,857	— 30,305	
				+346,382	—1817,340	B
0	—183,544	+158,441	—30,305			
долж. быть	—183,538	+128,136 +128,136	должно быть			
fy=	+ 0,006	0,000=	fx			

2. Вычисление координат

№ группы	Точки	Изъ какого Δ ка взяты данныя	Уголъ полигона β_n	Уголъ прости- ранія (азимуть) $r_n = r_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	Сторона S_n	$\lg \sin r_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos r_n$	$\lg S_n \cdot \sin r_n$ $\lg S_n \cdot \cos r_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
13	D	V_D^E	19° 3' 1",6	19° 3' 1",6			
		$\triangle 21$	96 38 40,0			9,954 7806	2,167 7016
				115 41 41,6		2,212 9210	1,8499889n
	W	$\triangle 21$	49 26 25,6			9,6370679n	
						9,4091542n	1,8725403n
	E			345 8 6,6		2,463 3861	2,448 6031
14	G	V_G^E	39° 3' 40",7	39° 28' 40",7			
		$\triangle 22$	44 17 7,5			9,997 4221	1,957 0331
				83 45 48,2		1,959 6110	0,995 5791
	X	$\triangle 22$	104 26 7,5			9,035 9681	
						9,154 1448	1,242 4145
	(E)			8 11 55,7		2,088 2697	2,083 8080
						9,995 5383	

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХЪ ПУНКТОВЪ.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \text{ sn } r_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot \text{cs } r_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n и абсцисса $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	—	+	—			
9		19		11	12	13
147,130				+189,034	—1722,059	D
				+147,130	— 70,794	
				+336,164	—1792,852	W
	74,566	280,933		— 74,566	+ 280,933	
				+ 261,598	—1511,919	E
+147,130	74,566	280,933	70,793			
+ 72,564		210,140				
+ 72,564	должно быть	210,140	должно быть			
0,000 =	f_y	0,000	$=f_x$			
90,580				+153,543	—1643,103	G
				+ 90,580	+ 9,899	
				+244,123	—1633,204	X
				+ 17,475	— 121,285	
				+261,598	—1511,919	E
17,475		121,285				
108,055	0	131,184	0			
108,055	должно быть	131,184	должно быть			
0,000	$=f_y$	0,000	$=f_x$			

2. Вычисление координатъ

№ группы	Точки	Изъ, какого Δ-ка взяты данныя	Уголь полигона β_n	Уголь прости- ранія (азимуть) $V_n=V_{n-1}+\beta_n\pm\pi$	Сторона S_n	$\lg \sin r_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos r_n$	$\lg S_n \cdot \sin r_n$ $\lg S_n \cdot \cos r_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
15	A	V_A^E	328° 14' 50",2	328° 14' 50",2		9,3155176n	1,8288542n
		△ 23	19 49 7,5	348 3 57,7		2,513 3366	2,503 8471
	Y	△ 23	131 37 7,5	299 41 5,2		9,990 5102	
						9,9389014n	2,3029621n
(E)					2,364 0607	2,058 8658	
					9,694 8051		

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХЪ ПУНКТОВЪ.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \sin V_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cos V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n $y_n = y_{n-1} +$ $+ \Delta y_{n-1}$	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n $x_n = x_{n-1} +$ $+ \Delta x_{n-1}$	Т о ч к и
+	—	+	—			
9		19		11	12	13
				+529,920	—1945,476	A
	67,430	319,041		— 67,430	+ 319,041	
				+462 490	—1626,435	Y
	200,892	114,516		—200,892	+ 114,515	
				+261,598	—1511,919	E
0	—268,322	+433,557	0			
дол. быть	—268,322	+433,557	—дол. быть			
$f_y =$	0,000	0,000	$=f_x$			

§ 14.

Опредѣленіе пунктовъ сѣти $n, l, k, a, f, g, h, b, e, i, m$ помощью полигонной съемки.

Вышеприведенная триангуляціонная сѣть (см. черт. 13, а также стр. 124) была дополнена пунктами $n, l, k, \dots i, m$, координаты которыхъ опредѣлены при помощи *полигонной съемки* между этими пунктами, связавъ ихъ съ вышеопредѣленными триангуляціонными пунктами.

Полсвая работа состоитъ въ измѣреніи 1) *угловъ полигона* β_n между станамъ и 2) *длинъ становъ* S_n ; измѣренные углы β_n записываются въ графу 4-ю, а измѣренные длины S_n въ графу 6-ю нижеслѣдующаго формуляра.

1-й полигонъ съемки начать отъ триангуляціоннаго пункта К, причемъ координаты точки К и азимуть линіи КJ ($V_k^j = 52^\circ 18' 24'', 5$) уже извѣстны изъ триангуляціи; эти данныя записываются соотвѣтственно въ графы 5-ю, 11 и 12-ю.

Измѣривъ при точкѣ К теодолитомъ уголъ $JKn = \beta_n = 327^\circ 53' 22'', 5$, и длину $Kn = S_n = 145^m, 27$, записываютъ эти величины въ графы 4-ю и 6-ю, и затѣмъ производятъ вычисленіе приращеній координатъ точки n ($\Delta y = +47,766$ и $\Delta x = +137,193$) совершенно такимъ-же порядкомъ, какъ выше было показано при вычисленіи координатъ, триангуляціонныхъ пунктовъ.

Затѣмъ, по измѣреннымъ при n углу $Knl = \beta_n = 207^\circ 36' 22'', 5$ и длинѣ $nl = S_n = 26,16$, вычисляютъ приращенія координатъ точки l и т. д., пока полигонъ не достигнетъ новаго триангуляціоннаго пункта, координаты котораго ранѣе уже были опредѣлены, въ данномъ случаѣ—до точки Н; вычисливъ координаты Н на основаніи полигонной съемки и сравнивъ ихъ съ данными изъ триангуляціи координатами той-же точки Н, мы получимъ вообще нѣкоторую невязку, которая происходитъ отъ накопленія ошибокъ при полигонной съемкѣ; или, что все равно,—получимъ нѣкоторыя невязки f_y и f_x между суммами приращеній ординатъ и абсциссъ и разностями между координатами данныхъ начальной К и конечной Н точекъ триангуляціонной сѣти.

Эти невязки (въ разсматриваемомъ случаѣ $f_y = +0,048$ и $f_x = +0,086$) мы распредѣляемъ между отдѣльными приращеніями координатъ (числа: $+18^m, +7, +11, +12$ и $+54, +7, +11, +14$ въ графахъ 9-й и 10-й) пропорціонально величинамъ самихъ приращеній

ординатъ и абсциссъ, и, введя эти надписанныя поправки, заносимъ уже исправленныя приращенія координатъ въ графы 11-ю и 12-ю, послѣ чего получаемъ ужъ и самыя координаты точекъ $n, l, \dots$

По германской маркшейдерской инструкціи требуется, что-бы при общей длинѣ S всѣхъ становъ полигона ошибка не превосходила величины:

$$\Delta S = 0,01 \cdot \sqrt{4 \cdot S + 0,005 \cdot S^2}$$

гдѣ S есть сумма длинъ становъ (см. графу 6-ю):

$$S = [s]$$

Но если f_y и f_x суть невязки въ суммѣ ординатъ и въ суммѣ абсциссъ, то полная невязка въ положеніи конечной точки полигона будетъ равна:

$$f_s = \sqrt{f_y^2 + f_x^2}$$

слѣдовательно полигонная съемка признается удовлетворительною, когда

$$f_s < 0,01 \sqrt{4 \cdot [s] + 0,005 [s]^2}$$

Въ разсматриваемомъ примѣрѣ:

$$f_s = \sqrt{0,048^2 + 0,086^2} = 0,098 = 98 \text{ mm},$$

$$S = [s] = 256 \text{ m}, 93$$

слѣдовательно по инструкціи допускается ошибка

$$\Delta S = 0,01 \sqrt{4 \cdot 256,93 + 0,005 \cdot 256,93^2} = 0,368 = 368 \text{ mm}.$$

что значительно больше полученной невязки 98 mm.

Исправивъ, какъ выше сказано, ординаты и абсциссы точекъ, можно-бы ввести поправки также и въ длинѣ каждаго стана; но мы этого не дѣлаемъ.

2-й полигонъ (для опредѣленія точекъ a, f, g и h) взять между триангуляціоннымъ пунктомъ H (съ орьентирной линіей HG) и полигоннымъ k , координаты котораго уже опредѣлены въ 1-мъ полигонѣ.

3-й полигонъ (для опредѣленія точекъ b и e) взять между H и f , причемъ координаты f извѣстны изъ 2-го полигона.

Наконецъ, координаты отдѣльныхъ точекъ i и m опредѣлены, исходя соотвѣтственно изъ полигонныхъ точекъ h и l .

Вычисление координатъ

№ группы		Точки полиг.		Углы полигона	Углы простира- ния	Измѣ- ренныя длины S_n	Приве- денныя длины	$\lg \sin V_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos V_n$	$\lg S_n \cdot \sin V_n$ $\lg S_n \cdot \cos V_n$
1	2			3	4	5	6	7	8
16	K	V_k^j	52° 18' 24",5	52° 18' 24",5					
			325 53 22,5				9,516 9412	1,679 1171	
				19 11 47,0	145,27		2,162 1759	2,137 3305	
	l						9,975 1546		
			207 36 22,5				9,862 7276	1,280 3635	
				46 48 9,5	26,16		1,417 6377	1,253 0197	
	n						9,835 3820		
			0 0 0,0				9,862 7276	1,472 6420	
				46 48 9,5	40,73		1,609 9144	1,445 2964	
	k						9,836 3820		
			172 37 18,8				9,802 8156	1,453 8027	
				39 25 28,3	44,77		1,650 9871	1,538 8641	
					Сумма	256,93	=[s]		

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot \sin r_n$		Разность абсцисс $\Delta x_n = S_n \cdot \cos r_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината y_n	Исправлен- ная раз- ность абс- цисс Δx_n и абсцисса x_n	Точки
+	-	+	-			
10		11		12	13	14
+18 47,766		+54 137,193		-58,139	-1969,890	K
				+47,784	+ 137,247	
+ 7 19,071		17,907		-10,355	-1832,643	n
				+19,078	+ 17,914	
+11 29,692		+11 27,880		+ 8,723	-1814,729	l
				+29,703	+ 27,891	
+12 28,432		+14 34,583		+38,426	-1786,838	k
				+28,444	+ 34,597	
				+66,870	-1752,241	H
124,961	0	217,563	0			
125,009	=ДОЛЖНО БЫТЬ	217,649	=ДОЛЖНО БЫТЬ			
+0,048	= f_y	+0,086	= f_x			
$f_s = 0,098$						
Допускается по инструкции $= 0,368 = 001 \cdot \sqrt{4 [s] + 0,005 [s]^2}$						

Вычисление координат

№ группы	Точки полиг.		Углы полигона	Углы простира- ния	Измѣ- ренныя длины	Приве- денныя длины	$\lg \sin V_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos V_n$	$\lg S_n \cdot \sin V_n$ $\lg S_n \cdot \cos V_n$
			β_n	$V_n = V_{n-1} + \beta_n \pm \pi$	S_n			
1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	H	$\lg_n$	$38^\circ 27' 19'',2$	$38^\circ 27' 19'',2$	22,97		9,7937236 1,3611610 9,8938134	1,1548846 1,2549744
	a		84 0 30,0	302 27 49,2	119,75		9,9262045n 2,0777312 9,7297839	2,0039357n 1,8075151
	f		78 00 0,0	200 27 49,2	76,24		9,5435880n 1,8819550 9,9716905n	1,4255430n 1,8536455n
	g		97 38 0,0	118 05 49,2	45,27		9,9455432 1,6542728 9,6729892n	1,5998160 1,3262620n
	h		0 00 0,0	118 05 49,2	51,15		9,9455432 1,7077405 9,6729892n	1,6532837 1,3807297n
				Сумма	315,38	= [s]		

точекъ полигонной съемки.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot \sin \varphi_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot \cos \varphi_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината y_n	Исправлен- ная раз- ность аб- сциссъ Δx_n и абсцисса x_n	Точки.
+	-	+	-			
10		11		12	13	14
+1 14,285		-15 17,988		+ 66,870	-1752,241	H
				+ 14,286	+ 17,973	
	+10 100,910	-54 64,197		+ 81,156	-1734,268	a
				-100,900	+ 64,143	
	+2 26,641		-59 71,391	- 19,744	-1670,125	f
				- 26,639	- 71,450	
+4 39,794			-18 21,196	- 46,383	-1741,575	g
				+ 39,798	- 21,214	
+4 45,007			-20 24,029	- 6,585	-1762,789	h
				+ 45,011	- 24,049	
				+ 38,426	-1786,838	k
+99,086	-127,551	+82,185	-116,616			
	- 28,444		- 34,431			
дол. быть	= - 28,465	дол. быть	= - 34,597			
$t_y =$	= 0,021	$f_x =$	- 0,166			
$f_s = 0,167$						

Допускается по инструкции $0,419 = 0,01 \sqrt{4[s] + 0,005[s]^2}$

Вычисление координатъ

№ группы	Точки полиг.		Углы полигона	Углы простира- нія	Измѣ- ренныя длины S_n	Приве- денныя длины.	$\lg \sin V_n$	$\lg S_n \cdot \sin V_n$
			β_n	$V_n = V_{n-1} + \beta_n \pm \pi$			$\lg S_n$	$\lg S_n \cdot \cos V_n$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	H	r_n^g	38° 27' 19",2	38° 27' 19",2	38,41		9,7937236	1,3781679
							1,5844443	1,4782577
							9,8938134	
	b		108 39 0,0	327 6 19,2	129,26		9,7348768n	1,8462737n
							2,1113969	2,0355057
							9,9241088	
	e		68 25 56,2	215 32 15,4	69,63		9,7643534n	1,6061507n
							1,8417973	1,7522799n
	f						9,9104826n	
				Сумма	237,30	= [s]		
19	h	r_k^g	298 5 49,2	298 5 49,2			9,8446400	1,5126530
			106 16 15,0	44 22 4,2	46,56		1,6680130	1,5222373
	i						9,8542243	
20	l	r_n^k	46 48 9,5	46 48 9,5			9,8600481	1,5701655
			86 46 7,5				1,7101174	1,5484991n
	m			133 34 17,0			9,8383817n	

точекъ полигонной съемки.

Разность ординатъ $\Delta y_n = S_n \cdot \sin V_n$		Разность абсциссъ $\Delta x_n = S_n \cdot \cos V_n$		Исправлен- ная раз- ность орди- натъ Δy_n и ордината y_n	Исправлен- ная раз- ность абс- циссъ Δx_n и абсцисса x_n	Точки
+	—	+	—			
10		11		12	13	14
+12 23,887		+7 30,079		+66,870	—1752,241	H
				+22,899	+ 30,086	
				+90,762	—1722,155	b
	+36 70,190		+26 108,520	—70,154	+ 108,546	
	+20 40,379		+14 56,530	+20,615	—1613,609	c
				—40,359	— 56,516	
				—19,714	—1670,125	f
23,887	—110,569	+138,599	56,530			
долж. быть	— 86,682	+ 82,069	—должно быть			
	— 86,614	+ 82,116				
$f_y =$	+0,068	+0,047	$= f_x$			
$f_s = 0,083$						
$0,351 = 0,01 \sqrt{4[s] + 0,005[s]^2}$ — допускается.						
32,558		33,284		— 6,585	—1762,789	h
				—32,558	+ 33,284	
				+25,973	—1729,505	i
37,168		35,359		+ 8,723	—1814,729	l
				+37,168	— 35,359	
				+45,891	—1850,088	m

ГЛАВА III.

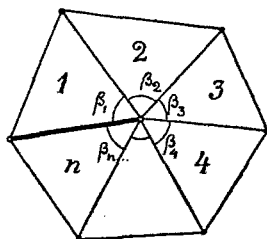
Примѣръ сокращеннаго уравновѣшенія малой центральной сѣти треугольниковъ.

§ 1.

Предварительныя замѣчанія.

„Центральною“ сѣтью треугольниковъ мы будемъ называть группу ихъ вокругъ одного центрального пункта.

При такомъ расположеніи n треугольниковъ, которое является лишь частнымъ случаемъ расположенія, даннаго въ § 1, Гл. II, начальная сторона (базисъ) будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ и конечною, а сумма угловъ $[\beta]$ вокругъ одной точки будетъ здѣсь всегда:



Черт. 24.

$$\sigma = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 360^\circ \dots \dots \dots \text{условіе горизонта.}$$

Вслѣдствіе равенства между начальной и конечной сторонами ($A=E$), въ формулахъ § 1, Гл. II вовсе не будутъ фигурировать ни A , ни E .

Во всемъ остальномъ вычисленіе триангуляціи производится совершенно аналогично ходу вычисленія, данному въ главѣ II.

§ 2.

Выбранная для примѣра центральная сѣть.

Вся сѣть базируется на два, данныхъ координатами, пункта:

Данные пункты.	Абсциссы.	Ординаты.
А	+1502,228	+2477,610
В	+1524,979	+2348,462

Характеръ мѣстности позволилъ выбрать 1 центральный пунктъ и вокругъ него 6 другихъ главныхъ пунктовъ такъ, что изъ каждаго видно не меньше трехъ изъ остальныхъ, причемъ форма треугольниковъ не весьма удалялась отъ идеальной.

Измѣренія направленій производились репетиціоннымъ микроскопъ теодолитомъ Hildebrand'a, дающимъ точность прямого отсчета до 1"; измѣрялись направленія на каждой точки стоянія въ 4 пріема.

Вычисленіе средней ошибки одного направленія при каждой точкѣ стоянія производилось по формулѣ, данной въ § 17, гл. I, ч. 1-я причемъ, для каждаго изъ 7 главныхъ пунктовъ: А, В, С, Е, F₁, D, G, эта ошибка оказалась соответственно: $\pm 2'',70$; $\pm 2'',00$; $\pm 3'',91$; $\pm 3'',44$; $4'',45$; $\pm 8'',67$; $\pm 2'',44$.

Главные пункты сѣти суть (см. черт.): А, В, С, D, Е, F₁, и G; второстепенные пункты: Н, F, K, L и М.

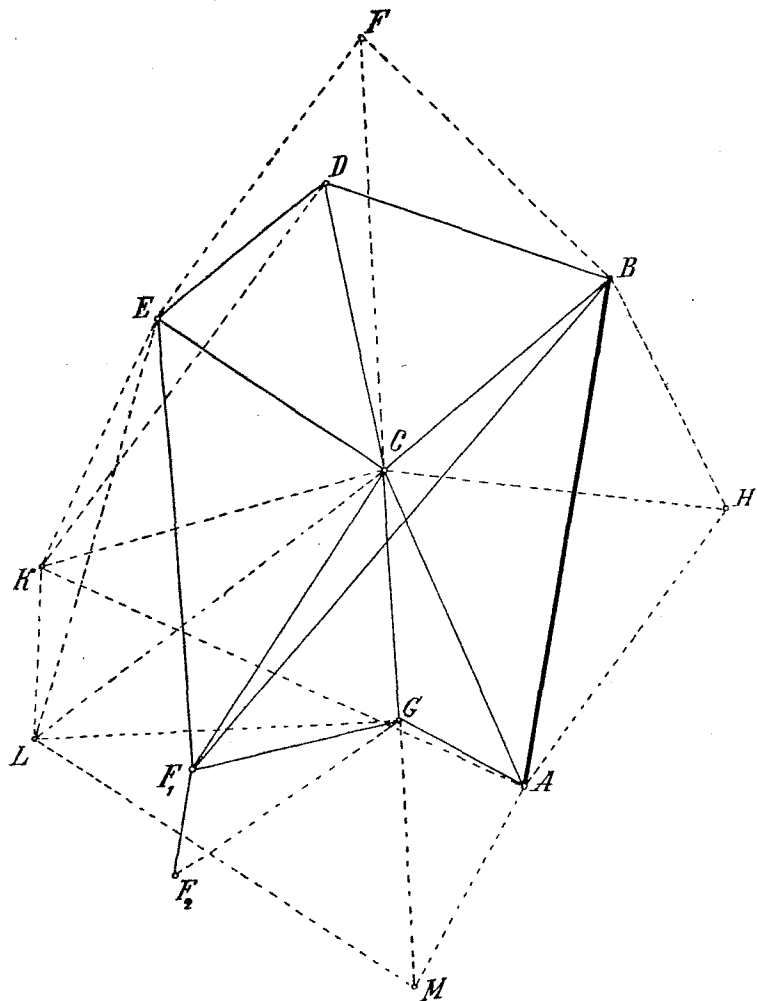
Сѣть изъ 6 треугольниковъ между главными пунктами уравнивалась какъ одна цѣльная группа ихъ; опредѣленіе-же координатъ пунктовъ Н, F, K, L и М производилась для каждаго отдѣльно при помощи вставки двухъ треугольниковъ въ углѣ, точно опредѣленномъ уравниваніемъ главной сѣти.

Такъ какъ при сокращенномъ способѣ уравниванія опредѣленіе точности результатовъ не такъ удобно, какъ при полномъ, а всетаки желательно имѣть данныя для сужденія о достоинствѣ результатовъ, то можно приблизительно допустить, что послѣ выполненія условій суммы угловъ и условій сторонъ окончательныя поправки угловъ имѣютъ характеръ наивѣроятныхъ ошибокъ наблюденій. Въ этомъ предположеніи и сдѣлано вычисленіе, приведенное въ § 6, b. (см. также § 3 и § 6 гл. I, ч. 1).

Кромѣ тріангуляціи между главными и второстепенными пунктами была произведена еще и детальная съемка теодолитомъ (съ отсчетомъ до $\frac{1}{10}$ минуты) домовъ, зданій, трубъ и проч. при помощи прямой засѣчки („засѣчка впередъ“). Эта засѣчка производилась по способу пріемовъ, именно—въ 2 пріема, причемъ для каждой точки стоянія всегда служила въ качествѣ нульпункта горизонтальнаго круга теодолита та вершина треугольника, которая вошла уже въ тріангуляціонную сѣть. Для большей надежности, съ каждой точки сѣти производились визированія на возможно большее число угловъ зданій: каждый уголъ зданія засѣченъ не меньше, какъ съ трехъ точекъ стоянія, такъ кто ихъ координаты могутъ быть вычислены по крайней мѣрѣ изъ 2 треугольниковъ; согласіе результатовъ въ полученныхъ такимъ образомъ координатахъ служить гарантіей

правильности ихъ опредѣленія. При сопоставленіи треугольниковъ этой детальной съемки 3-й уголъ въ нихъ опредѣлялся какъ дополнение до 180° (эти углы написаны курсивомъ).

Остальные подробности участка опредѣлены тахиметромъ).



Черт. 25.

§ 3.

Результаты полевыхъ измѣреній теодолитомъ.

„Приведенныя“ направленія, среднія изъ всѣхъ 4 пріемовъ оказались (журналъ полевыхъ работъ составляется такъ, какъ показано въ примѣрѣ гл. II, § 3):

Точка стоя- нія	Точка визи- ров.	Направление
А	М	0° 0' 0",0
	К	84 43 5,2
	Г	90 50 23,6
	С	116 54 5,3
	В	156 55 50,7
	Н	187 20 38,4
В	А	0 0 0,0
	С	57 49 3,7
	Д	105 39 10,5
	Г	110 25 11,3
	Н	329 6 39,2
С	А	0 0 0,0
	Г	30 4 54,0
	Г ₁	62 23 34,0
	Л	90 44 1,4
	К	113 7 47,8
	Е	147 18 0,6
	Г	184 33 26,0
	Д	195 4 46,6
	В	277 50 38,4
	Н	320 3 1,2

Точка стоя- нія	Точка визи- ров.	Направление
Д	В	0° 0' 0",0
	С	49 23 59,7
	К	106 0 45,6
	Е	110 37 6,8
Е	Г	0 0 0,0
	Д	33 34 1,2
	С	104 34 34,2
	Г ₁	156 25 24,5
	Л	188 44 9,8
	К	203 56 10,9
Г ₁	Е	0 0 0,0
	С	43 14 40,8
	В	60 37 24,2
	Г	82 49 29,2
	Г ₂	223 31 8,5
Г	Г ₁	0 0 0,0
	Л	18 5 30,7
	С	108 7 26,2
	А	231 58 13,9
	М	298 48 47,5

Точка стоя- нія	Точка визи- ров.	Направление
Н	А	0° 0' 0",0
	С	69 36 7,4
	В	118 41 45,8
Г	В	0 0 0,0
	С	34 7 26,4
	Е	72 17 16,1
К	Д	0 0 0,0
	С	41 26 35,4
	А	76 8 12,7
Л	Е	0 0 0,0
	С	39 15 45,7
	Г	68 34 46,3
	М	136 3 26,3
М	Л	0 0 0,0
	Г	33 13 42,9
	А	55 33 19,4

§ 4.

Вычисленіе азимута (простиранія) V_A^B и длины S_A^B базиса.

$$\operatorname{tg} V_A^B = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-129,148}{+ 22,751}$$

$$\lg \operatorname{tg} V_A^B = \lg \operatorname{tg} (AB) = 0,7540872_n$$

$$V_A^B = (AB) = 360^\circ - 80^\circ 0' 32'',9 = 279^\circ 59' 27'',1$$

$$S_A^B = AB = \frac{\Delta y}{\operatorname{sn}(AB)} = \frac{\Delta x}{\operatorname{cs}(AB)}$$

$\lg \Delta y = 2,111\ 0877$	$\lg \Delta x = 1,357\ 0005$
$\lg \operatorname{sn} (AB) = 9,993\ 3637$	$\lg \operatorname{cs} (AB) = 9,239\ 2772$
$\lg AB = 2,117\ 7240$	$\lg AB = 2,117\ 7233$

$$\lg AB = 2,117\ 7237$$

$$AB = 131^m,136$$

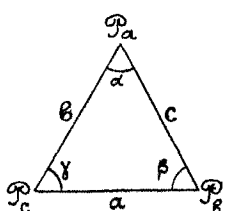
Повѣрка: по формулѣ

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + V_A^B \right) = \frac{\Delta x + \Delta y}{\Delta x - \Delta y}$$

получимъ для $V_A^B = (AB)$ тотъ-же результатъ.

§ 5. Уравнивание 1-й группы—6 главных треугольников (вокруг точки C).

Оно производится аналогично § 6, гл. II, сообразуясь с § 1 настоящей главы; (1), (2),... (6) суть поправки углов по условию суммы углов Δ -ка в каждом Δ -ке соответствующаго №.

№ Δ -ка и № погр.		Измеренные углы	Ошибки и поправки углов f_{Π} и f_{Π}	Исправленные углы	Условие сторон ($\lg Sn$ знаменат. и $\lg Sn$ числителя.)	Таблич. разность на 1"	$\lg \left(m = \frac{a}{\sin \alpha} \right)$	$\lg$ сторонъ
							$\lg \sin$ (вновь исправленных угловъ)	$a = m \cdot \sin \alpha$ $b = m \cdot \sin \beta$ $c = m \cdot \sin \gamma$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Начальная сторона=AB=Конечная сторона.</i>								
(1)	$P_a = A$	$\alpha = 40^\circ 1' 45,4$	— 5,0	$40^\circ 1' 40,4$	$9,808 \ 3193$	+25,1	$1,121 \ 8069$	$\lg m_1 = \lg AB - \lg \sin C$
	$P_b = B$	$\beta = 57 \ 49 \ 3,7$	— 5,0	$57 \ 48 \ 58,7$	$0,072 \ 4527$	+13,1	$9,808 \ 3195$	$BC = 1,930 \ 1264$
	$P_c = C$	$\gamma = 82 \ 9 \ 21,6$	— 0,8	$82 \ 9 \ 29,8$			$9,927 \ 5472$	$AC = 2,049 \ 3541$
		$180 \ 0 \ 10,7$ $f_1 = +10,7$	—10,7	$179 \ 59 \ 59,9$			$9,995 \ 9171$	$AB = 2,117 \ 7240$
(2)	$P_a = B$	$\alpha = 47 \ 50 \ 6,8$	— 0,8	$47 \ 50 \ 6,0$	$9,869 \ 9441$	+19,1	$2,049 \ 7316$	$\lg m_2 = \lg BC - \lg \sin D$
	$P_b = D$	$\beta = 49 \ 23 \ 59,7$	— 0,8	$49 \ 23 \ 58,9$	$0,119 \ 6050$	+18,1	$9,869 \ 9443$	$DC = 1,919 \ 6759$
	$P_c = C$	$\gamma = 82 \ 45 \ 51,8$	+ 3,4	$82 \ 45 \ 55,2$			$9,880 \ 3948$	$BC = 1,930 \ 1264$
		$179 \ 59 \ 58,3$ $f_2 = -1,7$	+ 1,7	$180 \ 0 \ 0,0$			$9,996 \ 5286$	$BD = 2,046 \ 2602$
(3)	$P_a = D$	$\alpha = 61 \ 13 \ 7,1$	—10,1	$61 \ 12 \ 57,0$	$9,942 \ 7220$	+11,5	$1,943 \ 9893$	$\lg m_3 = \lg CE - \lg \sin E$
	$P_b = E$	$\beta = 71 \ 0 \ 33,0$	—10,1	$71 \ 0 \ 22,9$	$0,024 \ 3133$	+ 7,2	$9,942 \ 7219$	$EC = 1,886 \ 7113$
	$P_c = C$	$\gamma = 47 \ 46 \ 46,0$	— 5,9	$47 \ 46 \ 40,1$			$9,975 \ 6866$	$DC = 1,919 \ 6759$
		$180 \ 0 \ 26,1$ $f_3 = +26,1$	—26,1	$180 \ 0 \ 0,2$				$ED = 1,813 \ 5421$

4	$P_a = E$	$\alpha = 51 \ 50 \ 50,3$	$-0,6$	$51 \ 50 \ 49,7$	$+0,1$	$9,895 \ 6244$	$+16,5$	$2,050 \ 9493$	$= \lg m_4 = \lg CE - \lg \text{Sn} \Gamma$
(4)	$P_b = F_1$	$\beta = 43 \ 14 \ 40,8$	$-0,6$	$43 \ 14 \ 40,2$	$-0,1$	$0,164 \ 2378$	$+22,4$	$9,895 \ 6246$	$F_1 C = 1,946 \ 5739$
	$P_c = C$	$\gamma = 84 \ 54 \ 26,6$	$+3,6$	$84 \ 54 \ 30,2$	$+0,1$			$9,885 \ 7620$	$EC = 1,886 \ 7113$
		$179 \ 59 \ 57,7$	$+2,3$	$180 \ 0 \ 0,1$				$9,998 \ 2829$	$EF_1 = 2,049 \ 2326$
		$f_4 = -2,3$							
5	$P_a = F_1$	$\alpha = 39 \ 34 \ 48,4$	$-19,6$	$39 \ 34 \ 28,8$	$+0,1$	$9,804 \ 1961$	$+25,4$	$1,968 \ 6604$	$= \lg m_5 = CF_1 - \lg \text{Sn} G$
(5)	$P_b = G$	$\beta = 108 \ 7 \ 26,2$	$-19,6$	$108 \ 7 \ 6,6$	$-0,1$	$0,022 \ 0866$	$-6,9$	$9,804 \ 1963$	$CG = 1,772 \ 8567$
	$P_c = C$	$\gamma = 32 \ 18 \ 40,0$	$-15,4$	$32 \ 18 \ 24,8$				$9,977 \ 9135$	$CF_1 = 1,946 \ 5739$
		$180 \ 0 \ 54,6$	$-54,6$	$180 \ 0 \ 0,2$				$9,727 \ 9609$	$GF_1 = 1,696 \ 5707$
		$f_5 = +54,6$							
(6)	$P_a = G$	$\alpha = 123 \ 50 \ 47,7$	$+10,8$	$123 \ 50 \ 58,5$	$+0,1$	$9,919 \ 3411$	$-14,1$	$2,130 \ 0129$	$= \lg m_6 = \lg CG - \lg \text{Sn} A$
	$P_b = A$	$\beta = 26 \ 3 \ 41,7$	$+10,8$	$26 \ 3 \ 52,5$	$-0,1$	$0,357 \ 1558$	$+43,0$	$9,919 \ 3411$	$AC = 2,049 \ 3539$
	$P_c = C$	$\gamma = 30 \ 4 \ 54,0$	$+15,0$	$30 \ 5 \ 9,0$				$9,642 \ 8436$	$GC = 1,772 \ 8567$
		$179 \ 59 \ 23,4$	$+36,6$	$180 \ 0 \ 0,0$				$9,700 \ 0404$	$AG = 1,830 \ 1079$
		$f_6 = -36,6$							

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = [f_n] =$	$+50,8$	$\lg \text{числ.} - \lg \text{зн.} =$	$\text{сумма} = 9,999 \ 9982$	$+180,5 =$	$\text{Въ 1-мъ и 6-мъ \Delta-кахъ}$
			$= 0,000 \ 0018$	$= [d]$	$AC = 2,049 \ 3541$
			$\varphi = +18$		$AC = 2,049 \ 3539$
					$\text{Ош. выч. } 0,000 \ 0002$

1. Условіе горизонта. Сумма угловъ вокругъ C:	2. Поправки угловъ по условію суммы угловъ Δ -ковъ.	Поправки централ. угловъ C:
$82^\circ \ 9' \ 21'',6$	$(s) = \frac{[f_n] - 3 \cdot [f_s]}{2 \cdot n} = \frac{50,8}{12} = +4'',2$	
$82 \ 45 \ 51,8$	$(1) = -\frac{1}{3} \{ f_1 + (s) \} = -\frac{1}{3} (+10,7 + 4,2) = -5'',0$	$(1) + (s) = -0'',8$
$47 \ 46 \ 46,0$	$(2) = -\frac{1}{3} \{ f_2 + (s) \} = -\frac{1}{3} (-1,7 + 4,2) = -0,8$	$(2) + (s) = +3,4$
$84 \ 54 \ 26,6$	$(3) = -\frac{1}{3} \{ f_3 + (s) \} = -\frac{1}{3} (+26,1 + 4,2) = -10,1$	$(3) + (s) = -5,9$
$32 \ 18 \ 40,0$	$(4) = -\frac{1}{3} \{ f_4 + (s) \} = -\frac{1}{3} (-2,3 + 4,2) = -0,6$	$(4) + (s) = +2,6$
$30 \ 4 \ 54,0$	$(5) = -\frac{1}{3} \{ f_5 + (s) \} = -\frac{1}{3} (+54,6 + 4,2) = -19,6$	$(5) + (s) = -15,4$
Сумма $= 360 \ 0 \ 0,0$	$(6) = -\frac{1}{3} \{ f_6 + (s) \} = -\frac{1}{3} (-36,6 + 4,2) = +10,8$	$(6) + (s) = +15,0$
Д. б. $= 360 \ 0 \ 0,0$		
$f_s = 0'',0$		

Компюль: эти по-
правки угловъ С
должны быть равны
 $f_n + 2(n);$ наир для
6-го Δ -ка: $-36'',6 +$
 $2 \cdot 10'' = -16'',6$
 $= -15'',0$
и рно! $(s) + (9) =$

3. Поправки угловъ по условію сторонъ:

$$\frac{\text{Sn } A_1. \text{Sn } B_2. \text{Sn } D_3. \text{Sn } E_4. \text{Sn } F_5. \text{Sn } G_6}{\text{Sn } B_1. \text{Sn } D_2. \text{Sn } E_3. \text{Sn } F_4. \text{Sn } G_5. \text{Sn } A_6} = 1 \text{ (должно быть)}$$

гдѣ значки буквъ соответствуютъ номеру Δ -ка, изъ котораго берется уголъ.

Поправка равна (см. графы 6-ю и 7-ю):

$$c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{+18}{180,5} = \pm 0'',1$$

Эти поправки надписаны въ графѣ 5-й надъ каждымъ угломъ, а въ графѣ 6-й—соответствующія поправки $\lg' \text{Sn}$ и $\lg \text{Sn}$ этихъ угловъ.

§ 6.

Вычисленіе среднихъ ошибокъ для главной сѣти.

а) До уравновѣшенія:

1) Нужно вычислить среднія ошибки одного направленія для каждой точки стоянія изъ журнала измѣреній, какъ показано въ § 17, гл. I, ч. 1-е (см. § 2 этой главы).

2. Средняя ошибка невязки одного Δ -ка при числѣ ихъ $n=6$ въ центральной группѣ равна (см. § 2):

$$M = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{5124,6}{6}} = \pm 22'',9$$

3. Средняя ошибка опредѣленія изъ непосредственныхъ измѣреній одного угла:

$$m_w = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{3.n}} = \pm \sqrt{\frac{5124,6}{3.6}} = \pm 17'',9$$

4. Средняя ошибка одного направленія:

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[ff]}{2.3.n}} = \pm \sqrt{\frac{5124,6}{2.3.6}} = \pm 11'',9$$

в) После уравновѣшенія:

Разности между углами центральной группы 6 Δ -ковъ, полученными изъ наблюдений (см. § 5, графа 3-я) и уравновѣшенными (см. § 5, графа 5-я съ поправками) суть:

$\lambda_1 = -4'',9$	$\lambda_4 = -0'',7$	$\lambda_7 = -10'',2$	$\lambda_{10} = -0'',5$	$\lambda_{13} = -19'',5$	$\lambda_{16} = +10'',9$
$\lambda_2 = -5,1$	$\lambda_5 = -0,9$	$\lambda_8 = -10,2$	$\lambda_{11} = -0,7$	$\lambda_{14} = -19,7$	$\lambda_{17} = +10,7$
$\lambda_3 = -0,8$	$\lambda_6 = +3,4$	$\lambda_9 = -5,9$	$\lambda_{12} = +3,6$	$\lambda_{15} = -15,2$	$\lambda_{18} = +10,5$

Сумма квадратовъ всѣхъ λ , т. е. $[\lambda\lambda] = 1773,75$, поэтому приблизительно:

1. Средняя ошибка одного угла

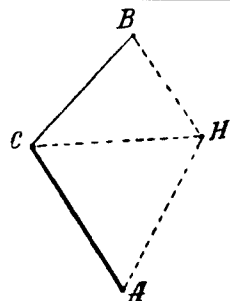
$$m_w = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{104,0}{17}} = \pm 10'',2$$

2. Средняя ошибка одного направленія:

$$m_r = \pm \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{2(n-1)}} = \pm \frac{m_w}{\sqrt{2}} = \pm 7'',2$$

§ 7. Вычисленіе координатъ главныхъ пунктовъ (центральной группы).

Сто- роны S	Углы полигона β_n	Азимуты (простиранія) γ_n	$\lg \sin \gamma_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos \gamma_n$	$\lg (S_n \sin \gamma_n)$ $\lg (S_n \cos \gamma_n)$	Разность ординатъ Δy	Разность абсциссъ Δx	Ординаты y	Абсциссы x	Пункты
AB	—	$279^{\circ} 59' 27'', 1$	—	—	—	—	+2348,462	+1524,979	B
BC	$57^{\circ} 48' 58'', 6$	$157^{\circ} 48' 25,7$	$\begin{matrix} 9,577 & 1762 \\ 1,930 & 1264 \\ 9,966 & 5724_n \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,507 & 3026 \\ 1,896 & 6988_n \end{matrix}$	+32,159	—78,831	+2380,621	+1446,148	C
CD	$277^{\circ} 14' 4,8$	$255^{\circ} 2' 30,5$	$\begin{matrix} 9,985 & 0286_n \\ 1,919 & 6759 \\ 9,411 & 8119_n \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,904 & 7045_n \\ 1,331 & 4878_n \end{matrix}$	—80,298	—21,453	+2300,323	+1424,695	D
DE	$61^{\circ} 12' 57,1$	$136^{\circ} 15' 27,6$	$\begin{matrix} 9,839 & 7397 \\ 1,813 & 5421 \\ 9,858 & 8117_n \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,653 & 2813 \\ 1,672 & 3538_n \end{matrix}$	+45,007	—47,028	+2345,330	+1377,667	E
EF ₁	$122^{\circ} 51' 12,6$	$79^{\circ} 6' 40,2$	$\begin{matrix} 9,992 & 1102 \\ 2,049 & 2326 \\ 9,276 & 2413 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2,041 & 3428 \\ 1,325 & 4739 \end{matrix}$	+109,987	+21,158	+2455,317	+1398,825	F ₁
F ₁ G	$82^{\circ} 49' 9,0$	$341^{\circ} 55' 49,2$	$\begin{matrix} 9,491 & 6043_n \\ 1,696 & 5797 \\ 9,978 & 0344 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,188 & 1250_n \\ 1,674 & 6051 \end{matrix}$	—15,423	+47,272	+2439,894	+1446,097	G
GA	$231^{\circ} 58' 5,1$	$33^{\circ} 53' 54,3$	$\begin{matrix} 9,746 & 4179 \\ 1,830 & 1079 \\ 9,974 & 0926 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1,576 & 5258 \\ 9,749 & 2005 \end{matrix}$	+37,716	+56,131	+2477,610	+1502,228	A
AB	$66^{\circ} 5' 32,9$	$279^{\circ} 59' 27,2$ (для контроля)	—	—	—	—	+2477,610 $\pm 0,00$	+1502,218 $\pm 0,00$	A(дол. быть) вѣрно!



Черт. 26.

Уравновѣшеніе 2-й группы треугольниковъ.

[Треугольники А С Н (№ 7-й) и В С Н (№ 8-й) въ уравновѣшенномъ углѣ А С В 1-й группы].

№ $\triangle$ -ка и № поправки		Измѣренные углы	Поправки угловъ f_n и f_s	Неправленные углы	(Условіе стороны) $\lg' \text{Sn}$ знаменателя и $\lg \text{Sn}$ числителя	Табл. разн. на $1''$	$\lg \left(\frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$	$\lg$ стороны
							$\lg \text{Sn}$	$a = m \cdot \text{Sn} \alpha$ $b = m \cdot \text{Sn} \beta$ $c = m \cdot \text{Sn} \gamma$
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Начальная сторона А С ; конечная сторона В С.

(7)	$P_a = A =$	$\alpha = 70^\circ 26' 33'', 1$	$+ 6,7$	$70^\circ 26' 39'', 8$	$9,974 \ 1970$	-80	$\lg m_1 = 2,077 \ 4645$	$= \lg AC + \lg' \text{Sn} H$
	$P_b = H =$	$\beta = 69 \ 36 \ 7,4$	$+ 6,7$	$69 \ 36 \ 14,1$	$0,028 \ 1187$	-84	$+ 7,5 \ 9,974 \ 1890$	$CH = 2,051 \ 6535$
	$P_c = C =$	$\gamma = 39 \ 56 \ 58,8$	$+ 6,3$	$39 \ 57 \ 6,1$			$+ 7,8 \ 9,971 \ 8897$	$AC = 3,049 \ 3542$
		$179 \ 59 \ 39,3$	$+ 20,7$	$180 \ 0 \ 0,0$			$9,807 \ 6308$	$AH = 1,885 \ 0953$
		$f_7 = -20'', 7$		$\lg AC =$	$2,049 \ 3541$			

8	$P_a = H =$	$\alpha = 49 \ 5 \ 38,4 \ \text{---} \ 8,8$	49 5 29,6	$\begin{matrix} -10,7 \\ -196 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9,878 \ 3822 \\ +18,3 \end{matrix}$	$\lg m_2 = 2,051 \ 7640$	$= \lg HC + \lg' Sn B$
(8)	$P_b = B =$	$\beta = 88 \ 42 \ 24,5 \ \text{---} \ 8,8$	88 42 15,7	$\begin{matrix} +10,7 \\ +6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,000 \ 1110 \\ + \ 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9,778 \ 3626 \\ 9,999 \ 8896 \end{matrix}$	$BC = 1,930 \ 1266$ $HC = 2,051 \ 6536$
	$P_c = C =$	$\gamma = 42 \ 12 \ 22,8 \ \text{---} \ 8,1$	42 12 14,7			$\begin{matrix} 9,827 \ 2228 \end{matrix}$	$BH = 1,878 \ 9868$
		$180 \ 0 \ 25,7 \ \text{---} 25,7$	$180 \ 0 \ 0,0$				
		$t_8 = +25'',7$	$\lg' BC =$	$8,069 \ 8736$			

			Сумма =	$0,000 \ 0366$	$+34,1 =$		
		$f_7 + t_8 = [t] = \text{---} 2'',1$	$\varphi =$	366	$= [dd]$		

Поправки по условию суммы угловъ:

$$C_7 = 39^\circ \ 56' \ 58'',8$$

$$C_8 = 42 \ 12 \ 22,8$$

$$C_7 + C_8 = 82 \ 9 \ 21,6$$

$$\text{должно быть } A C B = 82 \ 9 \ 20,8$$

$$(s) = \frac{[f] - 3.f_s}{2.n} = \frac{+5,0 - 2,4}{4} = +0'',6$$

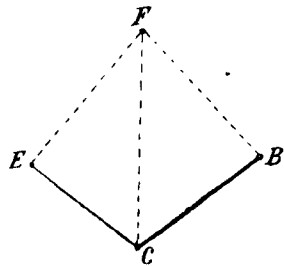
$$(7) = -\frac{1}{3} \left\{ f_7 + (s) \right\} = -\frac{1}{3} \left(-20,7 + 0,6 \right) = +6'',7$$

$$(8) = -\frac{1}{3} \left\{ f_8 + (s) \right\} = -\frac{1}{3} \left(+25,7 + 0,6 \right) = -8'',8$$

Поправка по условию сторонъ (AC . Sn A₇ . Sn H₈ = BC . Sn H₇ . Sn B₈):

$$t_s = +0'',8$$

$$c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{366}{34,1} = 10'',7$$



Черт. 27.

§ 9.

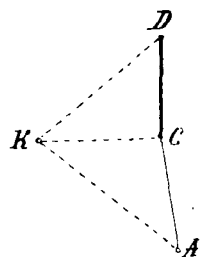
Уравновѣшеніе 3-й группы треугольниковъ.

[Треугольники ВFC (№ 9-й) и FЕС (№ 10-й) въ уравновѣшенномъ углѣ ВСЕ 1-й группы].

№ 1	№ 2	Измѣренные углы	Поправки угловъ f_b и f_c	Исправленные углы	Условіе сторонъ) $\lg \text{Sn}$ знаменателя и $\lg \text{Sn}$ числителя	Табличн. разн. d на $1''$	$\lg \left(m = \frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$	$\lg$ стороны
							$\lg \text{Sn}$	$a = m \cdot \text{Sn} \alpha$ $b = m \cdot \text{Sn} \beta$ $c = m \cdot \text{Sn} \gamma$
9	$P_a = B$	$\alpha = 52^\circ 36' 7'',6$	$-17,8$	$52^\circ 35' 49'',8$	$+45,5$ $+732$	$9,900\ 0308$	$\lg m_1 = 2,181\ 3712$	$= \lg BC + \lg' \text{Sn} F$
(9)	$P_b = F$	$\beta = 34\ 7\ 26,4$	$-17,8$	$34\ 7\ 8,6$	$-45,5$ $+1414$	$0,251\ 1034$	$+16,1\ 9,900\ 1040$	$FC = 2,081\ 4752$
	$P_c = C$	$\gamma = 93\ 17\ 12,4$	$-10,8$	$93\ 17\ 1,6$			$+31,1\ 9,748\ 7552$	$BC = 1,930\ 1264$
		$180\ 0\ 46,4$	$-46,4$	$180\ 0\ 0,0$			$9,999\ 2867$	$BF = 2,180\ 6576$
		$f_b = +46'',4$		$\lg BC =$				$1,930\ 1264$

Начальная скорость ВС; конечная сторона СЕ.

10	$P_a = F$	$\alpha = 38 \ 9 \ 49,7 \ + \ 1,2$	$38 \ 9 \ 50,9$	$+1219$ $9,790 \ 9297$	$\lg m_2 =$ $+26,8$	$2,095 \ 6590$	$= \lg CF + \lg' SnE$
(10)	$P_b = E$	$\beta = 104 \ 34 \ 34,2 \ + \ 1,2$	$104 \ 34 \ 35,4$	-250 $0,014 \ 2088$	$-5,5$	$9,791 \ 0516$	$EC = 1,886 \ 7106$
	$P_c = C$	$\gamma = 37 \ 15 \ 25,4 \ + \ 8,3$	$37 \ 15 \ 33,7$			$9,782 \ 0596$	$EF = 1,877 \ 7186$
		$179 \ 59 \ 49,3 \ +10,7$	$180 \ 0 \ 0,0$				
		$f_{10} = -10,7$	$\lg' EC =$	$8,113 \ 2887$			
$t_9 + t_{10} = [f] = -35,7$			Сумма =	$9,999 \ 6878$ $0,090 \ 3122$ -3122	$+68,5 =$ $= [d]$		
$C_9 = 93 \ 17 \ 12,4$ $C_{10} = 37 \ 15 \ 25,4$ $C_9 + C_{10} = 130 \ 32 \ 37,8$ Должно быть ВЕС = 130 32 35,3			Поправки по условию суммы угловъ: $(s) = \frac{[f] - 3.f_s}{2.n} = \frac{35,7 - 7,5}{4} = +7''0$ $(9) = -\frac{1}{3} \left\{ f_9 + (s) \right\} = -\frac{1}{3} (46,4 + 7,0) = -17'',8$ $(10) = -\frac{1}{3} \left\{ f_{10} + (s) \right\} = -\frac{1}{3} (-10,7 + 7,0) = +1,2$ Поправка по условию сторонъ (BC.SnB. ₉ SnF ₁₀ =CE.SnF ₉ .SnE ₁₀): $c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{3122}{68,5} = 45'',5$				
		$f_s = +2'',5 \ -2'',5$					



Черт. 29.

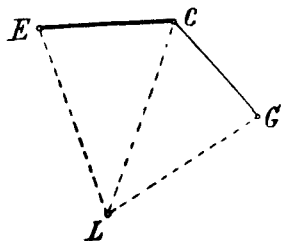
§ 10.

Уравновѣшеніе 4-й группы треугольниковъ.

[Треугольники D K C (№ 11) и K A C (№ 12) въ уравновѣшенномъ углѣ D C A 1-й группы].

№ угла и ѣ поправки		Измѣренные углы	Поправки угловъ f _α и f _β	Исправленные углы	(Условіе сторонъ) lg Sn знаменателя и lg Sn числителя	Таблич. разн. d на 1"	$\lg \left(m = \frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$	lg стороны
							lg Sn	$a = m \cdot \text{Sn} \alpha$ $b = m \cdot \text{Sn} \beta$ $c = m \cdot \text{Sn} \gamma$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Начальная сторона D C ; конечная сторона A C.								
11	P _a =D	$\alpha = 56^\circ 36' 45",9$	$- 9",8$	$56^\circ 36' 36",1$	$- 82$ 9,921 6575	$+ 13,9$	9,921 6493	$\lg m_1 = 2,098\ 9081 = \lg DC + \lg \text{Sn} K$
(11)	P _b =K	$\beta = 41\ 26\ 35,4$	$- 9,8$	$41\ 26\ 25,6$	$+ 5,8$ $- 140$ 0,179 2462	$+ 23,9$	9,820 7678	DC=1,919 6759
	P _c =C	$\gamma = 81\ 56\ 58,8$	$- 0,5$	$81\ 56\ 58,3$			9,995 6988	KD=2,094 6069
		180 0 20,1	$- 20",1$	180 0 0,0				
		f ₁₁ = +20,1		lg DC = 1,919 6759				

12 (12)	$P_a = K$	$\alpha = 84\ 41\ 37,3 - 11,5$	$34\ 41\ 25,8$	$9,755\ 2215$	$\lg m_2 = 2,294\ 1503$	$1503 - \lg CK + \lg SnA$
	$P_b = A$	$\beta = 32\ 11\ 0,1 - 11,5$	$32\ 10\ 48,6$	$0,273\ 6124$	$+30,4$	$9,755\ 2038$
	$P_c = C$	$\gamma = 113\ 7\ 47,8 - 2,2$	$113\ 7\ 45,7$		$+33,5$	$9,726\ 4071$
		$180\ 0\ 25,2 - 25,2$	$180\ 0\ 0,1$			$9,963\ 6086$
		$f_{12} = +25,2$	$\lg' AC =$	$7,950\ 6459$		
			Сумма =	$0,0000594 +$	$101,7 =$	
		$f_{11} + f_{12} = [f] =$	$-45'',3$	$\varphi = +594$	$= [d]$	
	$C_{11} = 81^\circ\ 56'\ 58'',8$	Поправки по условию суммы угловъ: $s = \frac{[f] - 3 \cdot f_s}{3} = \frac{45,3 - 7,5}{3} = +9'',4$ $(11) = -\frac{1}{3} \left\{ 20,1 + 9,4 \right\} = -9'',8$ $(12) = -\frac{1}{3} \left\{ 25,2 + 9,4 \right\} = -11'',5$				
	$C_{12} = 113\ 7\ 47,8$					
	$C_{11} + C_{12} = 195\ 4\ 46,6$					
	должно быть $ACD = 195\ 4\ 44,1$	Поправка по услов. сторонъ $(DC \cdot Sn D_{11} \cdot Sn K_{12} - AC \cdot Sn K_{11} \cdot Sn A_{12})$: $c = \frac{\gamma}{[d]} = \frac{594}{101,7} = 5'',8$				
	$f_s = +2'',5$	$-2'',5$				

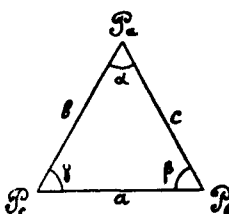


Черт. 29.

§ 11.

Уравновѣшеніе 5-й группы треугольниковъ.

(Треугольники E L C (№ 13) и L G C (№ 14) въ уравновѣшенномъ углѣ E C G 1-й группы).

№ Δ -ка и поправки		Измѣренные углы.	Поправки угловъ f_{α} и f_{β} .	Исправленные углы	Условіе сторонъ $\lg' \text{ Sn}$ знаменателя и $\lg \text{ Sn}$ числителя.	Табличная разности на $1''$.	$\lg(m = \frac{a}{\text{Sn}\alpha})$ $\lg \text{ Sn}$	$\lg$ стороны. $a = m \cdot \text{Sn}\alpha$ $b = m \cdot \text{Sn}\beta$ $c = m \cdot \text{Sn}\gamma$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Начальная сторона $E C$; кончная $C G$.								
13	$P_a = E$	$\alpha = 84^{\circ} 9' 35'',6$	$+19,1$	$84^{\circ} 9' 54'',7$	$9,997 \overset{-18.8}{7441}$	$+ 2,2$	$9,997 7400$	$CL = 2,083 \ 0346$
(13)	$P_b = L$	$\beta = 39 \ 15 \ 45,7$	$+19,1$	$39 \ 16 \ 4,8$	$0,198 \overset{+18.8}{6316}$	$-25,7$	$9,801 4160$	$EC = 1,886 \ 7106$
	$P_c = C$	$\gamma = 56 \ 33 \ 59,2$	$+ 1,3$	$56 \ 34 \ 0,6$			$9,921 4414$	$EL = 2,006 \ 7360$
		$179 \ 59 \ 20,5$ $f_{13} = -39,5$	$+39,5$	$180 \ 0 \ 0,1$				

14 (14)	$P_a = L$	$\alpha = 29\ 19\ 0,6$	$+ 4,7$	$\lg CE = 1,886\ 7113$	$\lg m_2 = 2,083\ 0347$	$= \lg CL + \lg' Sn\ G$
	$P_b = G$	$\beta = 90\ 1\ 55,5$	$+ 4,7$	$\begin{matrix} -18,8 \\ 29\ 19\ 5,3 \\ +18,8 \\ 90\ 2\ 0,2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -709 \\ 9,689\ 8932 \\ -0 \\ 0,000\ 0000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} +37,5 \\ 9,689\ 8223 \\ + 0,0 \\ 9,999\ 9999 \end{matrix}$
	$P_c = C$	$\gamma = 60\ 39\ 7,4$	$-13,0$	$60\ 38\ 54,4$		$CG = 1,772\ 8560$
		$180\ 0\ 3,5$	$- 3,5$	$180\ 0\ 0$	$\lg' CG = 8,227\ 1433$	

			Сумма	$0,000\ 1236$	$+65,4 =$	
$t_{13} + t_{14} = [f] =$			$+36,0$	$\varphi =$	$+1236$	$= [d]$

$C_{13} = 56^\circ 33' 59'',2$	<i>Поправки по условию суммы углов:</i>
$C_{14} = 60\ 39\ 7,4$	
$C_{13} + C_{14} = 117\ 13\ 6,6$	
$\text{дол. быть } ECG = 117\ 12\ 55,0$	
$t_s = +11,6$	$(s) = \frac{-36,0 - 34,8}{4} + = 17'',7$
$-11'',6$	

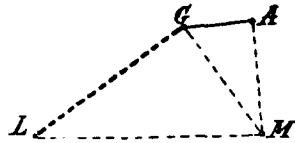
$$(13) = -\frac{1}{3} \left\{ -39,5 - 17,7 \right\} = +19,1$$

$$(14) = -\frac{1}{3} \left\{ -3,5 - 17,7 \right\} = +4,7$$

Поправки по условию сторон ($EC \cdot Sn\ E_{13} \cdot Sn\ L_{14} = CG \cdot Sn\ L_{13} \cdot Sn\ G_{14}$):

$$c = \frac{\varphi}{[d]} = \frac{1236}{65,4} = 18'',8$$

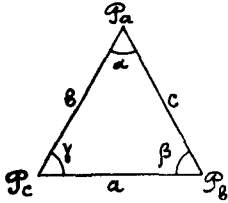
§ 12.



Черт. 30

Уравновѣшеніе 6-й группы треугольниковъ.

[Треугольники L M G (№ 15) и M A G (№ 16) въ уравновѣшенномъ углѣ L G A].

№ $\triangle$ -ка и № поправки		Измѣренные углы	Поправки угловъ f_n и f_s	Исправленные углы	(Условіе сторонъ) $\lg' \text{ Sn}$ знаменателя и $\lg \text{ Sn}$ числителя	Табл. разн. d на 1"	$\lg \left(m = \frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$ $\lg \text{ Sn}$	$\lg$ стороны $a = m \cdot \text{Sn} \alpha$ $b = m \cdot \text{Sn} \beta$ $c = m \cdot \text{Sn} \gamma$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Начальная сторона $L G$; кончая $A G$.									
15	$P_a = L$	$\alpha = 67^\circ 28' 40'', 0$	+28,3	$67^\circ 29' 8'', 3$	$9,965 \ 5702$	+311	$\lg m_1 = 2,284 \ 6248$	$= \lg LG + \lg' \text{ Sn } M$	
(15)	$P_b = M$	$\beta = 33 \ 13 \ 42,9$	+28,3	$33 \ 14 \ 11,2$	$0,261 \ 1438$	+1149	+ 8,7	$9,965 \ 6013$	$GM = 2,250 \ 2261$
	$P_c = G$	$\gamma = 79 \ 16 \ 43,2$	— 2,7	$79 \ 16 \ 40,5$			+32,1	$9,738 \ 7413$	$LG = 2,023 \ 3661$
		$179 \ 59 \ 6,1$ $t_{15} = -53,9$	+53,9	$180 \ 0 \ 0,0$ $\lg LG =$	$2,023 \ 3661$		$9,992 \ 3526$	$LM = 2,276 \ 9774$	

16 (16)	$P_a=M$	$\alpha=22\ 19\ 36,5$	$-0,9$	$22\ 19\ 35,6$	$+35,8$	$+1833$	$\lg m_2=2,250\ 2739=\lg GM+\lg' SnA$
	$P_b=A$	$\beta=90\ 50\ 23,6$	$-0,9$	$90\ 50\ 22,7$	$-35,8$	$+11$	$9,579\ 6521+51,2\ 9,579\ 8354\ AG=1,830\ 1083$
	$P_c=G$	$\gamma=66\ 50\ 33,6$	$-1,8$	$66\ 50\ 1,7$			$0,000\ 0467-0,3\ 9,999\ 9522\ MG=2,250\ 2261$
							$9,963\ 4892\ AM=2,213\ 7631$
		$180\ 0\ 33,7$	$-33,7$	$180\ 0\ 0,0$			
		$f_{16}=+33,7$	$\lg' AG=$		$8,169\ 8921$		
			Сумма =				$9,999\ 6710+91,7$
$f_{15}+f_{16}=[t]=$			$+20,2$	$\varphi=$	-3290	$=[d]$	
$G_{15}=79^\circ 16' 43'',2$				<i>Поправки по условию суммы угловъ:</i> $(s)=\frac{-20,1-104,1}{4}=-31'',0$			
$G_{16}=66\ 50\ 33,6$							
$G_{15}+G_{16}=146\ 7\ 16,8$							
дол.быть $ALG=146\ 6\ 42,1$							
$f_s=+34,7$							
				$-34'',7$			
				$(15)=-\frac{1}{3}\left\{-53,9-31,0\right\}=+28,3$			
				$(16)=-\frac{1}{3}\left\{-33,7-31,0\right\}=-0,9$			
<i>Поправки по условию сторонъ (GL.SnL₁₅.SnM₁₆=AG.SnM₁₅.SnA₁₆):</i>							
				$c=\frac{3290}{91,7}=35'',8$			

Вычисление координат пунктов: *H, F, K, L и M.*

Сторона S_n	Уголь полигона	Азимутъ (простира- ние) V	$\lg \sin V_n$ $\lg S_n$ $\lg \cos V_n$	$\lg S_n \sin V_n$ $\lg S_n \cos V_n$	Разность ординатъ	Разность абсциссъ	Ординаты	Абсциссы	Точки
CA		59 57 46,5					+2477,610	+1502,228	A
АН	70 26 29,1	310 24 15,6	9,881 6638n 1,885 0953 9,811 6939	1,766 7591n 1,696 7892	— 58,446	+ 49,749	+2419,164	+1551,977	H
HB	118 41 43,7	249 5 59,3	9,970 4413n 1,878 9868 9,552 3533n	1,849 4281n 1,431 3401n	— 70,701	— 26,999	+2348,463	+1524,978	B
BF	141 19 1,7	210 25 1,0	9,704 3983n 2,180 6575 9,935 6906n	1,885 0558n 2,116 3481n	— 76,746	—130,722	+2271,717	+1394,256	F
FE	72 16 59,5	102 42 0,5	9,989 2425 1,877 7186 9,342 1237n	1,866 9611 1,219 8423n	+ 73,614	— 16,590	+2345,331	+1377,666	E
EC	104 33 49,9	27 15 50,4							
CD		255 2 30,5					+2300,323	+1424,695	D
DK	65 36 30,3	131 3 90,8	9,873 4461 2,094 6069 9,822 5482n	1,968 0530 1,917 1551n	+ 92,908	— 82,633	+2393,231	+1342,062	K
KA	76 7 51,4	27 46 52,2	9,668 4752 2,257 7589 9,946 8129	1,926 2341 2,204 5718	+ 84,379	+160,166	+2477,610	+1502,228	A
AC	32 10 54,4	239 57 46,6							
CE		207 15 50,4					+2345,330	1377,667	E
EL	84 9 35,9	111 25 26,3	9,968 9045 2,006 7360 9,562 6096n	1,975 6405 1,569 3456n	+ 94,545	— 37,097	+2439,875	+1340,570	L

LG	68 35 10,1	0 0 36,4	6,246 6371 2,023 3661 0,000 0000	8,270 0032 2,023 3661	+	0,019	+105,528	+2439,894	+1446,098	G
GC	90 2 19,0	270 2 55,4								
GL		180 0 36,4						+2439,875	+1340,570	L
LM	67 29 44,1	67 30 20,5	9,965 6332 2,276 9754 9,582 7355	2,242 6086 1,859 7109	+	174,827	+ 72,395	+2614,702	+1412,965	M
MA	55 33 46,8	303 4 7,3	9,923 2528n 2,213 7609 9,736 9095	2,137 0137n 1,950 6704	—	137,092	+ 89,263	+2477,610	+1502,228	A
AG	90 49 46,9	213 53 54,2								

§ 14.

Итакъ, имѣемъ слѣдующія величины координатъ:

Пункты.	Ординаты у	Абсциссы х	(Изъ нивелли- ровки) высоты z
A	+2477,610	+1502,228	240,640
B	+2348,462	+1524,979	239,957
C	+2380,621	+1446,148	241,030
D	+2300,323	+1424,695	240,802
E	+2345,330	+1377,667	239,926
F ₁	+2455,317	+1398,825	
G	+2439,894	+1446,097	240,836
H	+2419,164	+1551,977	240,103
F	+2271,717	+1394,256	239,926
K	+2393,231	+1342,062	240,676
L	+2439,875	+1340,570	239,470
M	+2614,702	+1412,965	225,384

Детальная теодолитная съемка при помощи прямой засѣлки
§
Полевой
Точка ст

Точка визир- ров.	I микроск. А	II микроск. В	Среднее	Приведенное среднее	Предметъ визирования
<i>Первый присѣлъ</i>					
M	0° 00, ' 00 180° 00, ' 00	180° 0', 1 0 0, 2	0° 0', 750	0° 0', 000	Триангуляц. пунктъ
1*)	40 48,9 220 48,6	220 48,7 40 48,4	40 48,650	40 47,900	Механ. мастерская
1	47 3,4 227 3,3	227 3,2 47 3,1	47 3,250	47 2,500	Надшахтное и котельное здание.
2	55 13,3 235 13,2	235 13,2 55 13,5	55 13,300	55 12,550	
5	57 52,0 237 51,7	237 51,8 57 51,5	57 51,750	57 51,000	
6	65 48,0 245 47,5	245 46,8 65 47,7	65 47,250	65 46,500	
7	70 0,4 250 0,3	250 0,2 70 0,1	70 0,250	69 59,500	
3	72 0,0 251 59,3	252 0,1 71 59,5	71 59,725	71 58,975	
4	74 34,7 255 34,9	255 34,5 75 34,9	75 34,750	75 34,000	
1	87 26,5 267 27,0	267 26,4 87 26,9	87 26,700	87 25,950	Кузница.
2	91 21,9 271 21,9	271 21,7 91 21,8	91 21,825	91 21,075	
G	90 49,8 270 49,9	270 49,7 90 49,8	90 49,800	90 49,050	Триангуляц. пунктъ
C	116 54,2 296 54,8	296 54,1 166 54,2	116 54,200	116 53,450	Триангул. пунктъ.
E	—	—	—	—	Триангул. пунктъ.

*) Числа этой графы суть отмѣченные на планѣ (составленномъ отъ руки) номера угловъ зданій и т. п.

ки (домовъ, машинныхъ зданій и др. рудничныхъ сооруженій).

15

ж у р н а л ь.

оянія А.

I микроск. А	II микроск. В	Среднее	Приведенное среднее	Прив. сред. изъ обоихъ прием.	
В т о р о й п р і е м ь				Въ дол. минуты	Въ секундахъ
270° 15',1 90 15,0	90° 15',0 270 14,9	90° 15',000	0° 0',000	0° 0',000=	0° 0' 0",0
311 4,1 131 3,8	131 3,9 311 3,6	131 3,850	40 48,850	40 48',375=	40° 48' 22",5
317 18,4 137 18,1	137 18,3 317 18,0	137 18,200	47 3,200	47 2,850=	47 2 51,0
325 27,8 145 27,9	145 27,9 325 28,0	145 27,900	55 12,900	55 12,725=	55 12 43,5
328 7,1 148 6,8	148 7,0 328 6,7	148 6,900	57 51,900	57 51,450=	57 51 27,0
336 2,1 156 2,0	156 1,9 336 2,0	156 2,000	65 47,000	65 46,750=	65 46 45,0
340 14,6 160 14,7	160 14,4 340 14,7	160 14,600	60 59,600	60 59,550=	60 59 33,0
342 14,8 162 14,1	162 14,5 342 14,0	162 350	71 59,350	71 59,162=	71 59 9,7
345 49,7 165 49,5	165 49,5 345 49,4	165 49,525	75 34,525	75 34,262=	75 34 15,7
357 42,0 177 41,5	177 41,9 357 41,4	177 41,700	87° 26',700	87 26,325=	87 26 9,5
1 36,5 181 36,4	181 36,3 1 36,2	181 36,350	91 21,350	91 21,212=	91 21 12,7
1 4,8 181 4,5	181 4,5 1 4,3	181 4,575	90 49,575	90 49,312=	90 49 18,7
27 9,0 207 9,0	207 8,9 27 8,9	207 8,950	116 53,950	116 53,700	116 53 42,0
Вычислено по углу простирания.				(103 39 9,8)	

§ 16.

Результаты измѣреній.

Совершенно такимъ же образомъ производились визированія со всѣхъ остальныхъ пунктовъ главной центральной) сѣти треугольниковъ, причемъ приведенное среднее направленіе изъ обоихъ пріемовъ для каждаго визированія на каждой точкѣ стоянія оказалось:

Точка визир.	Предметъ визи- рованія	Направление	Точка визир.	Предметъ визи- рованія	Направление
Точка стоянія А			6	Котельное и надшахтное зданіе.	109° 42 28,5
М	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0	4		117 16 50,3
1	Механ. мастер.	40 48 22,5	7		131 55 0,0
1	Надшахтное и котельное зданія.	47 2 51,0	1	Столярная мастерская.	137 33 28,5
2		55 12 73,5	2		143 38 37,5
5		57 51 27,0	3		146 39 43,5
6		65 46 45,0	1	Кузница.	170 27 14,3
7		69 59 33,0	2		
3		71 59 9,7	С	Трианг. пунктъ	236 9 30,0
4		75 34 15,7	Е	Трианг.	200 12 38,5
1	Кузница.	87 26 19,5	К	пункты.	170 15 33,6
2		91 21 12,7	Вычислены по азимутамъ.		
Точка стоянія С			Точка стоянія С		
Г	Трианг. пунктъ	90 49 18,7	А	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0
С	Трианг. пунктъ	116 53 42,0	3	Надшахтное и котельное зданіе.	33 50 21,7
Е	Трианг. пунктъ	103 39 9,8	4		46 40 40,5
		Вычислено по азимуту.	6		51 24 12,0
			7		65 13 50,3
Точка стоянія G			Точка стоянія G		
А	Трианг. пунктъ	0 0 0,0	1	Кузница.	67 47 15,7
2	Котельное и надшахтное зданіе.	68 21 30,0	2		68 46 7,5
3		70 9 37,5	3		78 9 50,3
5		103 54 46,5			

Точка визир	Предметъ визи- рования.	Направление	Точка визир.	Предметъ визи- рования.	Направление
3	Столяр. маст.	79° 19' 0",0	6	Надшахтное зданіе.	150° 26' 0",0
1	Мостъ.	186 28 17,3	7		158 0 44,3
2		196 4 5,3	8		162 24 17,3
K	Триангуля- ціонные пункты.	113 7 47,8	1	Дробилка.	237 36 39,7
E		147 18 0,6	2		239 33 54,7
G		30 4 54,0	3		243 16 54,1
B		277 50 38,4	1	Локомотив- ное депо.	243 29 18,0
		Вычислены по азимутамъ.	2		246 3 58,5
			3		252 55 15,7
Точка стоянія В			C	Триангуля- ціонные пункты.	104 34 34,2
A	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0	K		203 56 10,9
1	Мостъ.	87 29 36,7	G		131 24 32,3
2		105 48 0,7	A		124 1 16,6
			Вычислены изъ азимутовъ.		
C	Трианг. пунктъ	57 49 3,7	Точка стоянія К		
		Вычислено по азимуту.	E	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0
Точка стоянія Е			3	Кузница.	70 50 13,5
F	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0	4		76 38 19,5
2	Мостъ	34 48 51,0	7	Надшахтное зданіе.	101 35 40,5
1	Кузница.	65 58 35,3	8		110 48 37,5
2		139 44 9,7	2	Столярная мастерская.	102 31 15,5
3		143 3 0,0	3		105 21 5,3
4		147 15 0,0	4		111 33 24,7

Точка визир.	Предметъ визи- рования	Направление	Точка визир.	Предметъ визи- рования	Направление
1	Сарай	122 45 59,3	Точка стоянія L		
4	Дроанлка	288 46 30,0	M	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0
1		289 44 46,5	I	Громоотво- ды мойки	12 57 19,5
2		297 0 45,7	II		38 58 38,3
G	Трианг. пунктъ	77 32 3,1 вычисл.поазим	Точка стоянія M		
Точка стоянія F			L	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",0
B	Трианг. пунктъ	0° 0' 0",9	1	Механ. мастер.	20 7 57,7
3	Дробилка	98 34 32,3	1	Надшахт. здан.	30 49 1,5
2	Локомотив. бюро	88 38 45,7	II	Громоотводы мойки	337 53 35,7
3		90 27 25,5	I		352 34 54,7
E	Трианг. пунктъ	72 17 16,1 вычисл.поазим	A	Трианг. пунктъ	55 33 19,4 вычисл.поазим.

§ 17.

Вычисленіе $\triangle$ -ковъ детальной съемки.

Изъ предыдущей таблицы результатовъ полевыхъ измѣреній мы составляемъ $\triangle$ -ки, въ каждомъ изъ которыхъ два первые углы получены изъ журнала измѣреній соответственнымъ вычитаніемъ направлений, а третій полученъ какъ дополненіе суммы первыхъ двухъ до 180°.

Вычисленіе сторонъ производится по теоремѣ синусовъ, причемъ lg базиса каждаго $\triangle$ -ка уже извѣстенъ изъ триангуляціи и отсюда сюда выписывается.

1. $\triangle AMI$

$A = 47^{\circ} 2' 51",0$	$m = \frac{MA}{\sin 1}$	$A1 = m. \sin M$	$M1 = m. \sin A$
$M = 24 44 17,9$	$\lg MA = 2,213 7609$	$\lg m = 2,236 0855$	$\lg m = 2,236 0855$
$1 = 108 12 51,1$	$\lg \sin 1 = 9,977 6754$	$\lg \sin M = 9,621 6689$	$\lg \sin A = 9,864 4630$
180 0 0,0	$\lg m = 2,236 0855$	$\lg A1 = 1,857 7544$	$\lg M1 = 2,100 5485$

Совершенно такимъ-же способомъ мы вычисляемъ все остальные Δ -ки и въ результатѣ находимъ $\lg$ ихъ сторонъ:

N_2 Δ -ка	Углы Δ -ка	$\lg \left(m = \frac{a}{\sin \alpha} \right)$	$\lg b = \lg m \cdot \sin \beta$ $\lg c = \lg m \cdot \sin \gamma$
Надшахтное и котельное здание.			
1 AM1	A = 47° 2' 51",0 M = 24 44 17,9 I = 108 12 51,1	$m = \frac{AM}{\sin 1}$ $\lg m = 2,236 \ 0855$	A1 = 1,857 7544 M1 = 2,100 5485
2 AG2	A = 35 36 35,2 G = 68 21 30,0 2 = 76 1 54,8	$m = \frac{AG}{\sin 2}$ $\lg m = 1,843 \ 1436$	A2 = 1,811 3970 G2 = 1,608 2619
3 AG3	A = 18 50 9,0 G = 70 9 37,5 3 = 91 0 13,5	$m = \frac{AG}{\sin 3}$ $\lg m = 1,830 \ 1744$	A3 = 1,803 6009 G3 = 1,339 1855
4 AC3	A = 44 54 32,3 C = 33 50 21,7 3 = 101 15 6,0	$m = \frac{AC}{\sin 3}$ $\lg m = 1,057 \ 7827$	A3 = 1,803 5336 C3 = 1,36 5767
5 AG4	A = 15 15 3,0 G = 117 16 50,3 4 = 47 28 6,7	$m = \frac{AG}{\sin 4}$ $\lg m = 1,962 \ 6958$	A4 = 1,911 4863 G4 = 1,382 7253
6 AC4	A = 41 19 26,3 C = 46 40 40,5 4 = 91 59 53,2	$m = \frac{AC}{\sin 4}$ $\lg m = 2,049 \ 6182$	A4 = 1,911 4562 C4 = 1,869 3700
7 AG5	A = 32 57 51,7 G = 103 54 46,5 5 = 43 7 21,8	$m = \frac{AG}{\sin 5}$ $\lg m = 1,995 \ 3291$	A5 = 1,982 3973 G5 = 1,731 0216
8 AG6	A = 25 2 33,7 G = 109 42 28,5 6 = 45 14 57,8	$m = \frac{AG}{\sin 6}$ $\lg m = 1,978 \ 7408$	A6 = 1,952 5260 G6 = 1,605 3824

№ Δ-ка	Углы Δ-ка	$\lg \left(m = \frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$	$\lg b = \lg m \cdot \text{Sn} \beta$ $\lg c = \lg m \cdot \text{Sn} \gamma$
9 AC6	A= 51° 6' 57",0 C= 51 24 12,0 6= 77 28 51,0	$m = \frac{AC}{\text{Sn} 6}$ $\lg m = 2,059\ 8048$	A6=1,952 7654 C6=1,951 0169
10 AE6	A= 37 52 24,8 E= 26 24 43,4 6=115 42 51,8	$m = \frac{AE}{\text{Sn} 6}$ $\lg m = 2,304\ 6361$	A6=1,952 8239 E6=2,092 7486
11 GE7	G= 68 17 38,5 E= 26 36 12,0 7= 85 6 9,5	$m = \frac{GE}{\text{Sn} 7}$ $\lg m = 2,068\ 7568$	G7=1,719 8517 E7=2,036 8164
12 EK7	E= 45 55 26,6 K=101 36 40,5 7= 32 27 52,9	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 7}$ $\lg m = 2,046\ 0642$	E7=2,037 0845 K7=1,902 4417
13 EK8	E= 41 31 53,6 K=110 48 37,5 8= 27 39 28,9	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 8}$ $\lg m = 2,109\ 1615$	E8=2,079 8621 K8=1,930 6963
Механическая мастерская.			
14 AM1	A= 40 48 22,5 M= 35 25 21,7 1=103 46 15,8	$m = \frac{AM}{\text{Sn} 1}$ $\lg m = 2,226\ 4278$	A1=1,989 5591 M1=2,041 6755
К у з н и ц а.			
15 AG1	A= 3 22 59,2 G=170 27 14,3 1= 6 9 46,5	$m = \frac{AG}{\text{Sn} 1}$ $\lg m = 2,799\ 2820$	A1=2,018 9710 G1=1,570 2231
16 AC1	A= 29 27 22,5 C= 67 47 15,7 1= 82 45 21,8	$m = \frac{AC}{\text{Sn} 1}$ $\lg m = 2,052\ 8344$	A1=2,019 3466 C1=1,744 5865

№ Δ-ка	УГЛЫ Δ-ка	$\lg \left(m = \frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$	$\lg b = \lg m \cdot \text{Sn} \beta$ $\lg c = \lg m \cdot \text{Sn} \gamma$
17 AC2	A = 25° 32' 29",3 C = 68 46 7,5 2 = 85 41 23,2	$m = \frac{AC}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 2,050 \ 5841$	A2 = 2,020 0589 C2 = 1,685 2269
18 CE2	C = 78 31 53,1 E = 35 9 35,5 2 = 66 18 31,4	$m = \frac{CE}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 1,924 \ 9468$	C2 = 1,685 2636 E2 = 6,916 1879
19 CE3	C = 69 8 10,3 E = 38 28 25,8 3 = 72 23 23,9	$m = \frac{CE}{\text{Sn} 3}$ $\lg m = 1,907 \ 5556$	C3 = 1,701 4557 E3 = 1,878 1022
20 EK3	E = 60 53 10,9 K = 70 50 13,5 3 = 48 16 35,6	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 3}$ $\lg m = 1,902 \ 9086$	E3 = 1,878 1515 K3 = 1,844 2492
21 EK4	E = 56 41 10,9 K = 76 38 19,5 4 = 46 40 29,6	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 4}$ $\lg m = 1,914 \ 0441$	E4 = 1,902 1267 K4 = 1,836 0823
Столярная мастерская.			
22 GK2	G = 26 36 56,1 K = 24 59 12,6 2 = 128 23 51,3	$m = \frac{GK}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 2,162 \ 8229$	G2 = 1,788 5570 K2 = 1,814 1031
23 GC3	G = 89 29 46,5 C = 49 14 6,0 3 = 41 16 7,5	$m = \frac{GC}{\text{Sn} 3}$ $\lg m = 1,953 \ 5814$	G3 = 1,832 9033 C3 = 1,953 5646
М о с т ь.			
24 BC1	B = 29 40 33,0 C = 91 22 21,1 1 = 58 57 5,9	$m = \frac{BC}{\text{Sn} 1}$ $\lg m = 1,997 \ 2813$	B1 = 1,997 1567 C1 = 1,691 9674

№ △-ка	Углы △-ка	$\lg \left(m = \frac{a}{\text{Sn} \alpha} \right)$	$\lg b = \lg m \cdot \text{Sn} \beta$ $\lg c = \lg m \cdot \text{Sn} \gamma$
25 CE1	C = 39° 10' 16",7 E = 38 35 58,9 I = 102 13 44,4	$m = \frac{CE}{\text{Sn} 1}$ $\lg m = 1,896 \ 6795$	C1 = 1,691 7774 E1 = 1,697 1499
26 BC2	B = 47 58 57,0 C = 81 46 33,1 2 = 50 14 29,9	$m = \frac{BC}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 2,044 \ 3421$	B2 = 2,039 8527 C2 = 1,915 2961
27 CE2	C = 48 46 4,7 E = 69 45 43,2 2 = 61 28 12,1	$m = \frac{CE}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 1,942 \ 9362$	C2 = 1,915 2612 E2 = 1,819 1810
Д р о б и л к а.			
28 EK1	E = 33 40 28,8 K = 70 15 13,5 I = 76 4 17,7	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 1}$ $\lg m = 1,788 \ 8214$	E1 = 1,762 5025 K1 = 1,532 7046
29 EK2	E = 35 37 43,8 K = 62 59 14,3 2 = 81 23 1,9	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 1,780 \ 7896$	E2 = 1,730 6214 K2 = 1,546 1095
30 EF3	E = 116 43 5,9 F = 26 17 16,2 3 = 36 59 37,9	$m = \frac{EK}{\text{Sn} 3}$ $\lg m = 2,098 \ 3174$	E2 = 1,744 6043 F3 = 2,049 2797
Локомотивное депо.			
31 EF2	E = 113 56 1,5 F = 16 21 29,6 2 = 49 42 28,9	$m = \frac{EF}{\text{Sn} 2}$ $\lg m = 1,995 \ 3313$	E2 = 1,445 0285 F2 = 1,956 2847

№ Δ-ка	Углы Δ-ка	$\lg \left(m = \frac{a}{\sin \alpha} \right)$	$\lg b = \lg m \cdot \sin \beta$ $\lg c = \lg m \cdot \sin \gamma$
32 EF3	E=107° 4' 44,3 F= 18 10 9,4 3= 54 45 6,3	m= $\frac{EF}{\sin 3}$ lgm=1,965 6777	E3=1,459 5893 F3=1,946 0905
М о й к а.			
33 IMI	L= 12 57 19,5 M= 7 25 5,3 I=159 37 35,2	m= $\frac{ML}{\sin I}$ lgm=2,735 2222	LI=1,846 1805 MI=2,085 8438
34 LMII	L= 38 58 38,3 M= 22 6 29,3 II=118 54 52,4	m= $\frac{LM}{\sin II}$ lgm=2,334 7978	LII=1,910 3965 MII=2,133 4571

§ 18.

Вычисленіе координатъ точекъ детальной съемки.

Съ этими вычисленными $\lg$ сторонъ Δ -ковъ, а также—пользуясь азимутами различныхъ направлений, известными уже изъ триангуляціи, и, наконецъ, азимутами и $\lg$ сторонъ:

$$(\Delta E)=180^\circ + 46^\circ 43' 17'',1 \quad \lg (\Delta E)=2,259 \ 3455$$

$$(\Delta G)=180 + 54 \ 6 \ 32,8 \quad \lg (\Delta G)=2,067 \ 1684$$

$$(\Delta K)=180 - 53 \ 22 \ 35,2 \quad \lg (\Delta K)=1,775 \ 8604$$

$$(\Delta K)=180 + 24 \ 9 \ 27,9 \quad \lg (\Delta K)=2,056 \ 9836$$

вычисленными по координатамъ точекъ А, Е, G, К, мы вычисляемъ координаты точекъ детальной съемки:

Точка визиро- ванія	Азимуть Γ (простираніе)	$\lg \sin V$ $\lg S_n$ $\lg \cos V$	$\lg (S_n \cdot \sin V)$ $\lg (S_n \cdot \cos V)$	Разность орди- нать Δy
Надшахтное и ко				
A 1	170 6 58,3	9,234 6454 1,857 7544 9,993 5059 n.	1,092 3998 1,851 2603 n.	+ 12,371
M 1	278 19 49,4	9,995 3935 n. 2,100 5485 9,161 0115	2,095 9420 n. 1,261 5600	— 124,722
A 2	178 17 19,1	8,475 1545 1,811 3970 9,999 8062 n.	0,286 5515 1,811 2032 n.	+ 1,934
G 2	102 15 24,3	9,989 9862 1,608 2619 9,326 9353 n.	1,598 2481 0,935 1972 n.	+ 39,656
A 3	195 3 45,3	9,414 7627 n. 1,803 6009 9,984 8164 n.	1,218 3636 n. 1,788 4173 n.	— 16,533
G 3	104 3 31,8	9,986 7927 1,339 1855 9,385 4598	1,325 9782 0,724 6453 n.	+ 21,183
A 3	195 3 14,3	9,414 5201 n. 1,803 5336 9,984 8340 n.	1,218 0537 n. 1,788 3676 n.	— 16,522
C 3	93 48 8,3	9,999 0430 1,906 5767 8,821 6056	1,905 6197 0,728 1823 n.	+ 80,467
A 4	198 38 51,3	9,504 8055 n. 1,911 4863 9,976 5807 n.	1,416 2918 n. 1,888 0670 n.	— 26,079
G 4	151 10 44,6	9,683 1137 1,382 7253 9,942 5688 n.	1,065 8390 1,325 2941 n.	+ 11,637
A 4	198 38 20,3	9,504 6121 n. 1,911 4562 9,976 6027	1,416 0683 n. 1,888 0589 n.	— 26,066
C 4	106 38 27,1	9,981 4192 1,869 3700 9,456 9302 n.	1,850 7892 1,326 3002 n.	+ 70,923

координатъ.

Разность абсциссъ Δx	Координаты точки стоянія		Координаты засѣченной точки		Засѣчен- ная точка.
	Ординаты	Абсциссы	Ординаты y	Абсциссы x	
тельное зданіе.					
— 71,001	+2477,610	+1502,228	+2489,981	+1431,227	1
+ 18,262	+2614,702	+1412,965	+2489,980	+1431,227	
— 64,745	+2477,610	+1502,228	+2479,544	+1437,483	2
+ 8,614	+2439,894	+1446,097	+2479,544	+1437,483	
— 61,435	+2477,610	+1502,228	+2461,077	+1440,793	3
— 5,304	+2439,894	+1446,097	+2461,077	+1440,793	
— 61,428	+2477,610	1502,228	+2461,088	+1440,800	
— 5,348	+2380,621	+1446,148	+2461,088	+1440,800	
— 77,280	+2477,610	+1502,228	+2451,531	+1424,948	4
— 21,150	+2439,894	+1446,097	+2451,531	+1424,947	
— 77,278	+2477,610	+1502,228	+2451,544	+1424,950	
— 21,198	+2380,621	+1446,148	+2451,544	+1424,950	

Точка визиро- ванія	Азимуть V (простираніє)	$\lg \sin V$ $\lg S_n$ $\lg \cos V$	$\lg (S_n \cdot \sin V)$ $\lg (S_n \cdot \cos V)$	Разность орди- натъ Δy
A 5	180 56 2,6	8,212 2308 n. 1,982 3973 9,999 9424 n.	0,194 6281 n. 1,982 3397 n.	— 1,565
G 5	137 48 40,8	9,827 0939 1,731 0216 9,869 7815 n.	1,558 1155 1,600 8031 n.	+ 36,151
A 6	188 51 20,6	9,187 3708 n. 1,952 5260 9,994 7917 n.	1,139 8968 n. 1,947 3177 n.	— 13,800
G 6	143 36 22,8	9,773 2962 1,605 3824 9,905 7739 n.	1,378 6786 1,511 1563	+ 23,915
A 6	188 50 49,6	9,186 9417 n. 1,952 7654 9,994 8019 n.	1,139 7071 n. 1,947 5673 n.	— 13,794
C 6	111 21 58,6	9,969 0758 1,951 0169 9,561 4935 n.	1,920 0927 n. 1,512 5104 n.	+ 83,194
A 6	188 50 52,3	9,186 9882 n. 1,952 8239 9,994 8010 n.	1,139 8121 n. 1,947 6249 n.	— 13,798
E 6	73 8 0,5	9,980 9043 2,092 7486 9,462 6123	2,073 6529 1,555 3609	+118,482
G 7	165 48 54,3	9,389 2586 1,719 8517 9,986 5523	1,109 1103 1,706 4040 n.	+ 12,856
E 7	80 42 44,8	9,994 2691 2,036 2164 9,207 8752	2,031 0855 1,244 6916	+107,420
E 7	80 41 58,2	9,994 2531 2,037 0845 9,208 4748	2,031 3376 1,245 5593	+107,482
K 7	48 11 5,3	9,872 6694 1,902 4417 9,823 5261	1,775 1111 1,725 9678	+ 59,582

Разность абсциссъ Δx	Координаты точки стоянія.		Координаты засѣченной точки.		Засѣчен- ная точка
	Ординаты	Абсциссы	Ординаты y	Абсциссы x	
— 96,015	2477,610	+1502,288	+2476,045	+1406,213	5
— 39,885	+2439,894	+1446,097	+2476,045	+1406,212	
— 88,576	+2477,610	+1502,228	+2438,810	+1413,652	
— 32,446	+2439,894	+1446,097	+2463,809	+1413,651	6
— 88,627	+2477,610	+1502,228	+2463,816	+1413,601	
— 32,547	+2380,621	+1446,148	+2463,815	+1413,601	
— 88,639	+2477,610	+1502,229	+2463,812	+1413,589	
+ 35,922	+2345,330	+1377,667	+2563,812	+1413,589	7
— 50,863	+2439,894	+1446,097	+2452,750	+1395,234	
+ 17,567	+2345,330	+1377,667	+2452,750	+1395,234	
+ 17,602	+2345,330	+1377,667	+2452,812	+1395,269	
+ 53,207	+2393,231	+1342,062	+2452,813	+1395,269	

Точка визиро- ванія	Азимутъ V (простираніе)	$\lg \sin V$ $\lg S_n$ $\lg \cos V$	$\lg (S_n \cdot \sin V)$ $\lg (S_n \cdot \cos V)$	Разность орди- нать Δy
E s	85 5 31,2	9,998 4047 2,079 8621 8,932 2507	2,078 2668 1,012 1128	+119,747
K s	57 26 2,3	9,925 7100 1,930 6963 9,731 0011	1,856 4063 1,661 6974	+ 71,847
Механическая				
A 1	163 52 29,8	9,443 6303 1,989 5591 9,982 5687 n.	1,433 1894 1,972 1278 n.	+ 27,114
M 1	267 38 45,6	9,999 6333 n. 2,041 6755 8,613 5617 n.	2,041 3088 n. 0,655 2372 n.	—109,978
К у з				
A 1	210 30 55,1	9,705 6658 n. 2,018 9710 9,935 2520 n.	1,724 6368 n. 1,954 2230 n.	— 53,044
G 1	204 21 8,6	9,615 2634 n. 1,570 2231 9,959 5310 n.	1,185 4865 n. 1,529 7541 n.	— 15,328
A 1	210 30 24,1	9,705 5550 n. 2,019 3466 9,935 2905 n.	1,724 9016 n. 1,954 6371 n.	— 53,077
C 1	127 45 2,3	9,898 0022 1,744 5865 9,786 9119 n.	1,642 5887 1,531 4984 n.	+ 43,912
A 2	214 25 17,3	9,752 2607 n. 2,020 0589 9,916 4022 n.	1,772 3196 n. 1,936 4611 n.	— 59,199
C 2	128 43 54,1	9,892 1416 1,685 2269 9,796 3483 n.	1,577 3685 1,481 5752 n.	+ 37,789
И		т а к ъ	д а л ъ с.	

Разность абсцисс Δx	Координаты точки стоянія.		Координаты засѣченной точки.		Засѣчен- ная точка
	Ординаты	Абсциссы	Ординаты y	Абсциссы x	
+ 10,283	+2345,330	+1377,667	+2465,077	+1387,950	α
+ 45,888	+2393,231	+1342,062	+2465,078	+1387,950	
мастерская.					
— 93,784	+2477,610	+1502,228	+2504,724	+1408,444	
— 4,521	+2614,702	+1412,965	+2504,724	+1408,444	
и ц а.					
— 89,996	+2477,610	+1502,228	+2424,566	+1412,232	
— 33,865	+2439,894	+1446,097	+2424,566	+1412,232	
— 90,082	+2477,610	+1502,228	+2424,533	+1412,146	
— 34,001	+2380,621	+1446,148	+2424,533	+1412,147	
— 86,390	+2477,610	+1502,228	+2418,411	+1415,838	
— 30,309	+2380,621	+1446,148	+2418,410	+1415,839	

§ 19.

Сопоставление результатов детальной съемки.

Разсматривая полученные результаты для одного и того же пункта, определенного разными засѣчками, мы видимъ, на сколько они точны. Среднія арифметическія изъ нихъ даютъ намъ слѣдующую таблицу координатъ угловъ важѣйшихъ зданій рудничнаго участка.

I. Надшахтное и котельное зданіе			II. Механическая мастерская		
Пункты	Ординаты	Абсциссы	Пункты	Ординаты	Абсциссы
1	+2489,980	+1431,227	1	+2504,724	+1408,444
2	+2479,544	+1437,483	III. Кузница		
3	+2641,082	+1440,796	1	+2424,550	+1412,189
4	+2451,538	+1426,949	2	+2418,412	+1415,837
5	+2476,042	+1406,212	3	+2414,189	+1408,704
6	+2463,819	+1413,614	4	+2420,309	+1405,050
7	+2452,781	+1395,252	IV. Слесарная мастерская		
8	+2465,078	+1387,950	2	+2442,530	+1384,699
			3	+2439,238	+1378,038

V. Мостъ			VII. Дробилка		
Пункты	Ординаты	Абсциссы	Пункты	Ординаты	Абсциссы
1	+2335,534	+1426,482	1	+2364,842	+1323,178
2	+2300,777	+1426,287	2	+2361,723	+1326,446
			3	+2358,784	+1323,780
VI. Локомотивное депо			VIII. Мойка		
2	+2350,758	+1350,338	I	+2509,079	+1352,193
3	+2347,530	+1348,938	II	+2517,889	+1317,486
Примѣчаніе. Еще болѣе детальную съемку рекомендуется производить тахиметромъ.					

Оглавление.

Часть I.

Глава I. Уравновѣшеніе непосредственныхъ наблюденій.

	<i>Страница.</i>
§ 1. Основной принципъ способа наименьшихъ квадратовъ	5
§ 2. Условныя обозначенія суммъ	5
§ 3. Первая формула средней ошибки одного измѣренія	6
§ 4. Вѣроятная ошибка наблюденій	7
§ 5. Точность наблюденій	8
§ 6. Вторая формула средней ошибки одного наблюденія	8
§ 7. Средняя ошибка функции одной непосредственно измѣренной величины	9
§ 8. Средняя ошибка функции нѣсколькихъ непосредственно измѣренныхъ величинъ	10
§ 9. Средняя ошибка функции нѣсколькихъ равноошибочно измѣренныхъ величинъ. Средняя ошибка арифметической середины	13
§ 10. Вѣса наблюденій	18
§ 11. Вѣсъ функции одной непосредственно измѣренной величины	18
§ 12. Вѣсъ функции нѣсколькихъ непосредственно измѣренныхъ величинъ	19
§ 13. Общая арифметическая середина	25
§ 14. Вычисленіе средней ошибки изъ разности наблюденій	30
§ 15. Средняя ошибка одного направленія и одного угла при визированіи съ одной точки стоянія на нѣсколько пунктовъ (по способу пріемовъ)	31

Глава II. Уравновѣшеніе посредственныхъ наблюденій.

§ 1. Уравненія погрѣшностей при наблюденіяхъ равнаго вѣса	34
§ 2. Составленіе нормальныхъ уравненій при наблюденіяхъ равнаго вѣса	36
§ 3. Рѣшеніе нормальныхъ уравненій при наблюденіяхъ равнаго вѣса . .	36
§ 4. Опредѣленіе вѣсовъ найденныхъ наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ	38
§ 5. Среднія ошибки найденныхъ наивѣроятныхъ значеній неизвѣстныхъ	39
§ 6. Особый случай уравненій погрѣшностей	40
§ 7. Уравновѣшеніе посредственныхъ наблюденій неравнаго вѣса	41
§ 8. Схема рѣшенія нормальныхъ уравненій для случая трехъ неизвѣстныхъ. Примѣры	42

Глава III. Уравновѣшеніе условныхъ наблюденій.

§ 1. Уравненія коррелятъ и нормальныя уравненія въ общемъ случаѣ нелинейныхъ условныхъ уравненій	56
§ 2. Уравненія коррелятъ и нормальныя уравненія въ частномъ случаѣ линейныхъ условныхъ уравненій	59
§ 3. О составленіи условныхъ уравненій и методѣ рѣшенія. Примѣры . .	61

Часть II. Триангуляція.

Глава I. Способы уравнивания триангуляций малых участков. Частные случаи полного и сокращенного уравнивания.

	Стр.
§ 1. Общія замѣчанія	75
§ 2. Ходъ полного уравниванія группы $\triangle$ -ковъ съ общею вершиною. .	76
§ 3. Ходъ сокращеннаго уравниванія	78
§ 4. Уравниваніе нѣсколькихъ неравнобѣсно измѣренныхъ величинъ, сумма истинныхъ значеній которыхъ заранее извѣстна.	81
§ 5. Продолженіе предыдущаго §. Случай равновѣсныхъ измѣреній	82
§ 6. Уравниваніе направленій одного четырехугольника, въ которомъ одинъ пунктъ недоступенъ и одна линія визированія невозможна. .	84
§ 7. Уравниваніе угловъ четырехугольника, въ которомъ всѣ пункты видимы, но одинъ недоступенъ	88
§ 8. Уравниваніе направленій при прямой засѣчкѣ недоступнаго пункта съ нѣсколькихъ (< 3) данныхъ пунктовъ	91
§ 9. Заданія предыдущаго §. Сокращенное уравниваніе	95
§ 10. Уравниваніе угловъ при прямой засѣчкѣ недоступнаго пункта съ трехъ данныхъ	97
§ 11. Тѣ-же заданія. Сокращенное уравниваніе	101
§ 12. Уравниваніе направленій въ цѣпи треугольниковъ.	102
§ 13. Уравниваніе угловъ четырехугольника, въ которомъ всѣ пункты доступны и всѣ видимы.	106
§ 14. Уравниваніе направленій въ полномъ четырехугольникѣ, въ которомъ всѣ пункты доступны и всѣ видимы	113
§ 15. Уравниваніе четырехугольника при опредѣленіи координатъ доступной точки по тремъ даннымъ точкамъ	114
§ 16. Уравниваніе цѣпи треугольниковъ съ двумя независимо измѣренными базисами	118

Глава II. Полный примѣръ триангуляціи съ сокращеннымъ уравниваніемъ сѣти по частямъ (по формуламъ *F. Gauss'a*).

§ 1. Предварительныя замѣчанія	121
§ 2. Выбранная для примѣра триангуляціонная сѣть.	123
§ 3. Полевой журналъ измѣреній теодолитомъ и вычисленіе приведенныхъ среднихъ направленій.	127
§ 4. Сопоставленіе результатовъ полевыхъ измѣреній	148
§ 5. Вычисленіе простирания и длины базиса	149
§ 6. Уравниваніе первой группы треугольниковъ.	150
§ 7. Уравниваніе второй группы	158
§ 8. Уравниваніе третьей группы	163
§ 9. Уравниваніе четвертой группы	166
§ 10. Вычисленіе отдѣльныхъ треугольниковъ.	170
§ 11. Вычисленіе среднихъ ошибокъ.	171
§ 12. Вычисленіе координатъ точекъ главной сѣти	172
§ 13. Вычисленіе засѣченныхъ вспомогательныхъ пунктовъ	180
§ 14. Опредѣленіе пунктовъ сѣти помощью полигонной съемки.	192

**Глава III. Примѣръ сокращеннаго уравновѣшенія малой центральной сѣти-
треугольниковъ.**

	<i>Стр.</i>
§ 1. Предварительныя замѣчанія	200
§ 2. Выбранная для примѣра центральная сѣть	200
§ 3. Результаты полевыхъ измѣреній теодолитомъ	202
§ 4. Вычисленіе азимута и длины базиса	203
§ 5. Уравновѣшеніе первой группы. Шесть главныхъ треугольниковъ во- кругъ одной точки	204
§ 6. Вычисленіе среднихъ ошибокъ для главной сѣти	206
§ 7. Вычисленіе координатъ главныхъ пунктовъ (центральной группы) . .	207
§ 8. Уравновѣшеніе второй группы треугольниковъ	208
§ 9. Уравновѣшеніе третьей группы треугольниковъ	210
§ 10. Уравновѣшеніе четвертой группы треугольниковъ	212
§ 11. Уравновѣшеніе пятой группы треугольниковъ	214
§ 12. Уравновѣшеніе шестой группы треугольниковъ	216
§ 13. Вычисленіе координатъ	218
§ 14. Координаты	219
§ 15. Детальная теодолитная съемка при помощи прямой засѣчки	220
§ 16. Результаты измѣреній	222
§ 17. Вычисленіе треугольниковъ детальной съемки	224
§ 18. Вычисленіе координатъ точекъ детальной съемки	229
§ 19. Сопоставленіе результатовъ детальной съемки	236

Замѣченныя опечатки.

Страница	Строка.	Напечатано	Должно быть.	Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
8	2 и 8 сверх.	5,1	6,1	109	5 сн.	+ 100	+ 190
10	12 св.	X	M	110	3 сн.	+ 23,5	+ 23,2
11	7 и 11 снизу	подъ радикал. $\pm$	+	114	3 св.	$-(\alpha_9 - \alpha_7)$	$+(\alpha_9 - \alpha_7)$
12	11 св.	$-2x_1 x_2$	$-3x_1 x_2$	115	3 сн.	19"	20"
16	2 св.	s	S	117	9 и 4 сн.	1048,49	448,49
25	4 св.	невѣроятное	наивѣроятное	118	2 сн.	$180^\circ 0' 8''$	$179^\circ 52' 8''$
27	2 св.	+ 14	+ 13	118	1 сн.	$w_5 = +8''$	$w_5 = -52''$
28	10 сн.	+ 1220 ^m ,637	=1220 ^m ,637	119	12 св.	+ 6	- 52
38	9 св.	$\frac{[ac]}{[aa]} \delta z$	$-\frac{[ac]}{[aa]} \delta z$	121	7 св.	+ 6	- 52
50	10 св.	$= \frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	121	8 св.	- 33,2	- 32,2
57	12 св.	S _i	s _i	123	1 и 2 сн.	$y^{\text{III}} = 0$, и т. д.	(См. стр. 149 вверху.
60	16 св.	[bb].k ₁	[ab].k ₁	150	15 св.	(въ знам. корня) 9	3
62	6 сн.	(x ₁ + δx_2)	(x ₁ + δx_1)	151	8 св.	+ 4 (въ числит.)	+ 0
62	3 сн.	(x ₄ - δx_4)+(x ₆ - δx_6)+(x ₅ + δx_5)	(x ₄ + δx_4)+(x ₆ - δx_6)+(x ₅ + δx_5)	153	13 св.	$\lambda_5^2 = 12,25$	4,0
63	4 сн.	1	0	153	18 св.	$[\lambda\lambda] = 295,21$	286,96
67	5 сн.	-x ₁ +x ₂ -x ₃	-x ₁ +x ₃ -x ₂	156	3 сн.	35	25
73	5 сн.	Частые	Частные	157	6 св.	$-4,1$ 135 19 16,2	135 19 16,2 -4,1
81	4 св.	равновѣсно	не равновѣсно	157	7 св.	32 27 44,1	32 27 41,1
87	10 сн.	неизвѣстныхъ i	неизвѣстныхъ.	157	5 сн.	угловъ	сторонъ
89	сверх.	нужно перестави	тъ мѣста суммъ.	164	3 сн.	8,984 4506	8,984 4605
101	2 св.	уравновѣшено	уравновѣшеніе	165	9 сн.	$\beta 5^\circ 32' 3'',0$	$\beta 5^\circ 32' 3'',7$
102	5 сн.	110 37 0	110 37 5	167	6 св.	(1)-	(1) =
106	4 сн.	-d'	-d' ₁	168	9 св.	$\beta = 127^\circ 51' 18'',5$	$\beta 127^\circ 57' 18'',7$
107	6 св.	+13,2	+ 23,2	169	20 сн.	42 15 39,9	42 15 35,9
107	7 св.	+15,1	+ 25,1	170	3 гр.	$\begin{cases} 40 & 47 & 6,3 \\ 62 & 21 & 58,8 \end{cases}$	$\begin{cases} 40 & 21 & 58,8 \\ 62 & 47 & 6,3 \end{cases}$
109	9 св.	гдѣ 0,5=0	гдѣ 0,50=	174	5 гр.	301 55 9,7	304 55 9,7
				178	3 гр.	V_E^D	V_E^G

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть	Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
181	2 гр.	$\begin{cases} 45\ 53\ 22,5 \\ 31\ 46\ 45,0 \end{cases}$	$\begin{cases} 45\ 52\ 22,5 \\ 31\ 16\ 45,0 \end{cases}$	207	4 гр. вниз.	9,974 0926	9,919 0926
181	3 гр.	$\begin{cases} 44\ 47\ 11,2 \\ 19\ 49\ 7\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 45\ 47\ 11,2 \\ 19\ 49\ 7,5 \end{cases}$	207	5 гр. вниз.	9,749 2005	1,749 2005
181	5 гр.	c 2,959 6110	c 1,959 6110	214	7 гр.	— 25 7	+ 25,7
184	1, 2 и 4 гр.	$K \sqrt{\frac{D}{K}}\ 140\ 40\ 2,7$	$R \sqrt{\frac{D}{K}}\ 104\ 40\ 2,7$	217	3 ст. сн.	— 33,7	+ 33,7
188	4 гр.	$39^{\circ}\ 3'\ 40'',7$	$39^{\circ}\ 28'\ 40'',7$	221	3 гр.	181 3,850	181 3,750
199	12 гр.	+ 22,899	+ 23,899	225	3 гр.	lgm=1,057 7827	2,057 7827
204	5 гр.	82 9 29,8	82 9 20,8	227	4 гр.	6,916 1879	1,916 1879
206	16 св.	$M = \pm 22'',9$	$\pm 29'',2$	233	4 гр.	$\begin{cases} 2438,810 \\ 2563,812 \end{cases}$	$\begin{cases} 2463,810 \\ 2463,812 \end{cases}$
206	7 сн.	$\lambda_{18} = +10,5$	$\lambda_{18} = +15,0$	236	2 гр.	+ 2641,082	+ 2461,082